KARL STUMPFF

HIMMELSMECHANIK

BAND I



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

K. STUMPFF

HIMMELSMECHANIK

BAND I



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERICHTIGUNGEN

Seite 86 8. Zeile von unten, lies: bestätigt worden statt: meßbar geworden

Seite 96 3. Zeile von unten, lies: (III; 11) statt: (III; 10)

Seite 202 5. Zeile von unten, lies: $\dddot{\varphi}$ statt: $\ddddot{\varphi}$

Seite 329 Fußnote, lies: (1947) statt: (1949)

Seite 343 6. Zeile von unten, lies: $k = 1$ statt: $\varkappa = 1$

K. STUMPFF · HIMMELSMECHANIK I

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON FRANZ X. EDER UND ROBERT ROMPE

BAND 32

HIMMELSMECHANIK

BAND I

DAS ZWEIKÖRPERPROBLEM
UND DIE METHODEN DER BAHNBESTIMMUNG
DER PLANETEN UND KOMETEN

VON

KARL STUMPFF

Dr. phil., a.o. Universitätsprofessor i. R.,
Lehrbeauftragter für Sphärische Astronomie, Bahnbestimmung
und Himmelsmechanik an der Universität Göttingen

MIT 60 ABBILDUNGEN



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN 1959

Printed in Germany · Lizenz-Nr. 206 - 435/41/59
Satz und Druck: VEB Offizin Andersen Nexö in Leipzig

VORWORT

Die mit NEWTONS „Philosophiae naturalis principia mathematica" (1687) beginnende klassische Epoche der modernen Astronomie ist etwa mit der letzten Jahrhundertwende zu Ende gegangen. Viele Versuche sind in jenem Zeitraum unternommen worden, die Ergebnisse der Himmelsmechanik zu einem Lehrgebäude zusammenzufassen. Besonders die Franzosen haben es verstanden, in ihrer schönen und exakten Sprache die Lehren dieser schönen und exakten Wissenschaft meisterhaft zu vermitteln. Ich darf nur an das fünfbändige Werk von LAPLACE, den „Traité de mécanique céleste" (1799–1825) erinnern, ferner an das gleichnamige vierbändige Werk von F. TISSERAND (1889–1896), das den Astronomengenerationen der letzten siebzig Jahre durch seine kristallene Klarheit und formvollendete Darstellungsweise den Zugang zu diesem erhabenen Gegenstand eröffnet und erleichtert hat. Am Ende dieser klassischen Epoche stehen die beiden dreibändigen Werke „Méthodes nouvelles de la mécanique céleste" (1892–1899) und „Leçons de mécanique céleste" (1905–1910) von H. POINCARÉ, die nicht nur das Vorhandene noch einmal zusammenfaßten, sondern aus tiefen mathematischen Einsichten heraus neue Wege für die zukünftige Forschung eröffneten.

Das zwanzigste Jahrhundert hat diesen Meisterwerken nur wenig Ebenbürtiges an die Seite zu stellen. In deutscher Sprache erschien 1902 die „Mechanik des Himmels" des schwedischen Astronomen C. V. L. CHARLIER, ein ausgezeichnetes Buch, das auch die damals neuesten Ergebnisse berücksichtigte, so die Arbeiten von G. W. HILL und G. H. DARWIN über die Mondbewegung und über die Bahnen von Planetoiden in der Nähe der LAGRANGEschen Librationszentren sowie die POINCARÉsche Theorie der periodischen Lösungen des Dreikörperproblems. Im Jahre 1912 veröffentlichte F. R. MOULTON das kleine Buch „An Introduction to Celestial Mechanics", das als erste Einführung in diese Wissenschaft bleibenden Wert besitzt und das seit 1927 auch in deutscher Übersetzung vorliegt. In Frankreich trat (1923–1926) H. ANDOYER mit seinem zweibändigen „Cours de mécanique céleste" hervor, der das Gebiet besonders hinsichtlich der allgemeinen Störungstheorie bereicherte, aber die ungemein fruchtbaren POINCARÉschen Ideen unberücksichtigt ließ. In Deutschland erschien 1941 „Das Dreikörperproblem" von H. HAPPEL, das für den Kenner der Probleme ein äußerst wertvolles Nachschlagewerk über viele in den älteren Werken noch nicht enthaltenen Methoden darstellt und insbesondere die wichtigen Ergebnisse neuerer Forscher wie GYLDÉN, SUNDMAN, BRENDEL u.a. bringt, aber als Lehrbuch für Studierende weit weniger geeignet ist, als es die obengenannten Werke der klassischen Fachliteratur gewesen sind. Von den Erscheinungen der letzten Jahre verdienen noch die „Celestial Mechanics" von W. M. SMART (1953) und die „Vorlesungen über Himmelsmechanik" von C. L. SIEGEL (1956) genannt zu werden. Das letztere nur wenig umfangreiche Buch

betrachtet die Probleme der Himmelsmechanik (insbesondere das Dreikörperproblem) vom Standpunkt des reinen Mathematikers aus und beschäftigt sich daher vorwiegend mit Konvergenz- und Stabilitätsfragen und mit Betrachtungen über die mathematische Behandlung von allgemeinen kanonischen Differentialgleichungssystemen, also mit Dingen, die für den Theoretiker außerordentlich bedeutsam, für den Anfänger aber zu schwierig und für den praktischen Astronomen weniger wichtig sind. Der letztere wird die Grundlagen für seine Tätigkeit nicht so sehr aus den Werken über die allgemeine Himmelsmechanik erarbeiten als aus der Spezialliteratur über die Bahnbestimmung der Himmelskörper und die Methoden der speziellen Störungsrechnung. Hier sei besonders auf zwei Bücher verwiesen: die „Bahnbestimmung der Himmelskörper“ von J. BAUSCHINGER (1906, letzte Auflage 1928) und die „Bahnbestimmung der Planeten und Kometen“ von G. STRACKE (1929).

Inzwischen ist die in Zeitschriften und Publikationen weit verstreute Literatur ungeheuer stark angewachsen. Das Bedürfnis nach einer auf den modernsten Stand gebrachten Darstellung der Himmelsmechanik in deutscher Sprache, die sich als Einführung in das Studium eignet und die auch dem Astronomen zur Vervollständigung seines Wissens dienen kann, ist unzweifelhaft heute größer als noch vor wenigen Jahren. Während die moderne Astrophysik, die der Forschung in den letzten fünfzig Jahren eine ungeheure Fülle neuer Aufgaben eröffnet hat, das Interesse der jungen Astronomengeneration beinahe ausschließlich in Anspruch genommen hat, sind die Probleme der Himmelsmechanik, die noch im vorigen Jahrhundert im Vordergrund gestanden haben, stark beiseite gedrängt worden. Das wird sich aber bald wieder ändern: Das Zeitalter der künstlichen Erdsatelliten und der ersten Vorstöße in den Weltenraum wird mit zwingender Notwendigkeit das Augenmerk auf eine Wissenschaft lenken, von der noch vor kurzem mit Unrecht vermutet wurde, daß ihre Probleme, soweit unsere mathematischen Hilfsmittel es erlauben, gelöst seien, und die man daher als abgeschlossenes und der Forschung wenig Anreiz bietendes Lehrfach ansah.

Der Plan, ein Lehrbuch der Himmelsmechanik zu schreiben, entstand bei mir schon 1944, mußte aber damals, nachdem einige Kapitel des ersten Bandes zu Papier gebracht worden waren, infolge der Ungunst der Zeitverhältnisse unterbrochen und auf längere Zeit verschoben werden. Ich bin auch heute noch, nachdem der „Deutsche Verlag der Wissenschaften“, der erst kürzlich mein Lehrbuch „Geographische Ortsbestimmungen“ herausgebracht hat, mich zur Vollendung dieses alten Vorhabens ermutigt hatte, sehr im Zweifel gewesen, ob ich es wagen sollte, eine so große und verantwortungsvolle Aufgabe auf mich zu nehmen, deren Erledigung jahrelange Arbeit erfordern wird, und die mir dadurch erschwert erscheint, daß in der Vergangenheit so große Vorbilder aufgerichtet sind, die auch nur annähernd zu erreichen ich nicht hoffen darf. Wenn ich mich trotzdem entschlossen habe, diesen Versuch zu unternehmen, so vor allem, weil ich von seiner Notwendigkeit überzeugt bin und weil ich vielleicht, wenn auch sicher nicht die Meisterschaft jener Vorbilder, so doch die bescheidene Fähigkeit mitbringe, die dem Anfänger schwer verständlichen Dinge klar und leicht faßlich darzustellen. Was den Stoff anbetrifft, so kann ich wenig-

stens auf einigen Gebieten, wie in der Theorie der Zweikörperbewegung und der Methodik der Bahnbestimmung der Himmelskörper, auf eigene Ideen verweisen. So darf ich hoffen, daß zumindest der Band I, der jetzt vollendet vorliegt und der sich hauptsächlich mit diesen Dingen beschäftigen soll, in einigen seiner Abschnitte sein eigenes Gesicht tragen wird.

Im ganzen sind drei Bände geplant. Der erste umfaßt, wie gesagt, die Analyse des Zweikörperproblems und die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. Der Band II wird sich mit dem Dreikörperproblem und den Methoden der numerischen Integration und der Berechnung spezieller Störungen befassen, Band III mit den allgemeinen Störungen und allen damit zusammenhängenden Fragen (Stabilität des Planetensystems, Bewegung der Satelliten, einschließlich der künstlichen Erdsatelliten, kosmogonische Probleme). Ob es nötig (und möglich) sein wird, noch einen weiteren Band über Rotationsprobleme hinzuzufügen, wird die Zukunft lehren.

Ich lasse den Band I mit einem Kapitel über das ptolemäische Weltsystem beginnen. Die Kenntnis der antiken Vorstellungen von der Mechanik und Kinematik des Planetensystems ist heute weitgehend verlorengegangen, und wenn ich von einem kurzgefaßten Anhang in FRISCHAUFS „Grundriß der Theoretischen Astronomie" und einem Abschnitt in VALENTINERS „Handwörterbuch der Astronomie" absehe, so ist mir kein modernes Lehrbuch bekannt, in dem die Bemühungen der Alten um die Erforschung des Weltmechanismus die ihnen gebührende Würdigung erfahren haben. Das mag daran liegen, daß die griechischen und lateinischen Texte des „Almagest" (von dem arabischen ganz zu schweigen) der neuen Generation kaum noch zugänglich sind. Seitdem aber K. MANITIUS (1912) uns die schöne und sorgfältige (leider längst vergriffene) Übersetzung dieses antiken Werkes ins Deutsche geschenkt hat, läßt sich die völlige Vernachlässigung des geschichtlich Gewordenen im Studium der Astronomie kaum noch entschuldigen. In meiner Darstellung habe ich nur das berücksichtigt, was auch für die moderne Himmelsmechanik interessant und wesentlich ist. Ich weiß wohl, daß die Ansicht weit verbreitet ist, die Beschäftigung mit diesen Dingen sei überflüssig und eine unnötige Belastung für Geist und Gedächtnis. Ich hoffe trotzdem, daß dieser Versuch bei den Jüngern der astronomischen Wissenschaft Anklang finden und ihnen den Anreiz geben wird, sich ein wenig in dieses anziehende Thema zu versenken, das so viele Jahrhunderte lang *das* Thema der astronomischen Vorlesungen an allen Universitäten des Abend- und Morgenlandes gewesen ist. Die Übertragung der schwerfälligen geometrischen Ausdrucksweise des PTOLEMÄUS in die elegantere Form der modernen mathematischen Symbolik verhilft dazu, auf die Denkart und den Scharfsinn des großen Ägypters überraschende Lichter zu werfen, und die Erkenntnis, daß viele moderne Gedankengänge und Methoden in ihrem Ursprung schon auf ihn und seine Zeit zurückgehen, sollte in dem Schatz der allgemeinen Bildung auch des modernen Wissenschaftlers nicht fehlen.

In den nachfolgenden Kapiteln wird die Theorie der Zweikörperbewegung mit der ihr gebührenden Gründlichkeit behandelt. In der Tat ist ja die Bewegung in Kegelschnittsbahnen nach den KEPLERschen Gesetzen als erste Näherung

für die Bewegungen der Planeten, Kometen und Satelliten unseres Sonnensystems der Ausgangspunkt für die meisten himmelsmechanischen Untersuchungen, und es wäre durchaus falsch, in Unterschätzung dieses Umstandes sich damit zufrieden zu geben, dieses Problem (was an sich möglich wäre) mit wenigen Federstrichen zu lösen, um dann sogleich auf das wesentlich schwierigere Dreikörperproblem überzugehen oder gar mit diesem zu beginnen und jenes dann als besonders einfachen Spezialfall nur am Rande zu behandeln. Vielmehr zeigt sich, daß das Zweikörperproblem trotz seiner relativen Einfachheit erstaunlich vielseitig ist und daß fast jeder der zahlreichen Gesichtspunkte, von denen aus man es betrachten und analysieren kann, Wege erkennen läßt, die in die noch recht unerschlossenen Tiefen des Dreikörperproblems und in die schwierigen Entwicklungen der Störungstheorie hineinführen.

Um dem Studierenden das Hineinlesen in den Gegenstand zu erleichtern, habe ich es bewußt vermieden, die allgemeinen mechanischen Prinzipe, wie sie von LAGRANGE, d'ALEMBERT, HAMILTON, JACOBI usw. entwickelt worden sind und die häufig (so bei TISSERAND, POINCARÉ, HAPPEL) an den Beginn der himmelsmechanischen Deduktionen gestellt worden sind, auch hier an den Anfang zu setzen. Die Erfahrung lehrt, daß der Anfänger dadurch leicht entmutigt wird. Vom Standpunkt des Lehrers aus scheint es mir ratsam, das Verständnis des Schülers nicht von vornherein mit diesen schönen, aber tief liegenden und sehr abstrakten Gedankengängen zu belasten, sondern ihn allmählich über konkrete und der Anschauung zugängliche Zwischenstufen auf sie vorzubereiten. So soll auch die HAMILTON-JACOBIsche Theorie erst im Band II Platz finden, damit der Leser, der den ersten aufmerksam studiert hat, ihre Gültigkeit sogleich an den noch einfachen und durchsichtigen Zusammenhängen in der Zweikörperbewegung zu verifizieren imstande ist.

Die Kapitel VIII und IX behandeln Probleme und Methoden der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen. Über diesen Gegenstand ist in den letzten Jahrzehnten viel geschrieben worden, und es müßte einem besonderen Werk über Bahnbestimmung vorbehalten werden, die Vielzahl der vorgeschlagenen Methoden darzustellen und kritisch miteinander zu vergleichen. Das ist z.T. schon in dem obenerwähnten Lehrbuch von G. STRACKE geschehen, in dem natürlich die seit 1930 hinzugekommene Literatur noch nicht berücksichtigt werden konnte. Teilweise ist dies in der Abhandlung von P. HERGET: „The Computation of Orbits (1948)" nachgeholt worden. Ich selbst habe versucht, aus der Vielzahl der dargebotenen Methoden diejenigen herauszuheben, deren Gedankenführung besonders charakteristische Merkmale zeigt. Dagegen habe ich es vermieden, allzusehr ins Einzelne gehende praktische Anweisungen, Rechenschemata und Rechenbeispiele zu geben. Diese Dinge gehören in ein Rezeptbuch für den Rechner, wie es (im besten Sinne) das Buch von STRACKE darstellt, aber nicht in ein allgemeines Lehrbuch der Himmelsmechanik, in dem es mehr auf die Herausarbeitung der Ideen als auf Anleitungen für deren praktische Anwendung ankommt.

Das letzte Kapitel behandelt schließlich einige Probleme, die über die Zweikörperbewegung nach dem NEWTONschen Gesetz hinausgehen: die Zentralbewegungen auf Grund verschiedener Beschleunigungsgesetze – als besonders

wichtiger Spezialfall erscheint hier die Bewegung sonnennaher Planeten nach der allgemeinen Relativitätstheorie.

Ursprünglich bestand die Absicht, noch ein Kapitel über die Methoden der Berechnung spezieller Störungen hinzuzufügen. Ich habe mich aber während der Arbeit an diesem Band I entschlossen, die Behandlung dieses Gegenstandes auf den Band II zu verschieben, da die Methoden der numerischen Integration ja nicht nur im Zusammenhang mit der Bahnbestimmung und Ephemeridenrechnung, sondern in weit größerem Umfang bei der numerischen Lösung allgemeinerer himmelsmechanischer Aufgaben angewandt werden. Ich erinnere nur an die Kopenhagener Arbeiten über die periodischen Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem. So habe ich mich damit begnügt, in den Kapiteln über Bahnbestimmung einiges über die Berücksichtigung von Störungseinflüssen bei der Bahnberechnung der Planetoiden zu sagen.

Im Anhang habe ich eine Reihe von Tabellen und Tafeln zusammengestellt, die für die Ephemeridenrechnung und Bahnbestimmung nützlich sind. Teil A des Anhangs bringt eine Anzahl kleinerer Tabellen, während Teil B eine umfangreichere sechsstellige Tafel der von mir eingeführten *c*-Funktionen enthält, wie sie – abgesehen von einer weitmaschigen Tabelle in den Astronomischen Nachrichten (Band *275*, 108) – noch nirgends existiert. Bei der Berechnung dieser Tafel stand mir, dank dem Entgegenkommen von Prof. L. BIERMANN, die elektronische Rechenanlage G I des MAX-PLANCK-INSTITUTS FÜR PHYSIK in Göttingen zur Verfügung. Für die Ausführung dieser Rechnung danke ich Dipl.-Phys. PETER STUMPFF, der mir auch wertvolle Hilfe bei der Korrektur dieses Bandes geleistet hat.

Möge dieses Buch, für dessen Gestaltung dem Verlag mein besonderer Dank gebührt, dazu dienen, dem Studierenden der Himmelskunde die Probleme der Himmelsmechanik wieder näher zu bringen, die zweifellos in der zukünftigen Entwicklung der astronomischen Wissenschaft sehr bald den Platz zurückgewinnen werden, der ihnen von alters her und von Rechts wegen zukommt.

Göttingen, im April 1958 KARL STUMPFF

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel V: Die Zweikörperbewegung als Anfangswertproblem

Kapitel VI: Die Zweikörperbewegung als Randwertproblem

Kapitel VII: Reihenentwicklungen im Zweikörperproblem

Kapitel VIII: Bahnbestimmung der Himmelskörper nach dem LAPLACEschen Prinzip

Kapitel IX: Bahnbestimmung der Himmelskörper nach dem GAUSSschen Prinzip

Kapitel X: Das allgemeine Zweikörperproblem

Anhang

KAPITEL I

DIE HIMMELSMECHANIK DER ANTIKE

1. *Das geozentrische und das heliozentrische Prinzip*

Die Anschauungen der Alten über den Aufbau des Weltalls und die Bewegungen der Himmelskörper waren sehr verschiedenartig und haben sich im Laufe der Zeit oft gewandelt. Vorherrschend ist aber in ihnen die Vorstellung von der im Weltmittelpunkt ruhenden Erde (geozentrisches Weltbild) und von der gleichförmigen Kreisbewegung der Himmelskörper. Die Kugelgestalt der Erde wurde schon sehr frühzeitig erkannt; der Erdumfang wurde bereits von ERATOSTHENES (276–195 v.Chr.) durch ein Verfahren, das im Prinzip der modernen Gradmessung völlig entspricht, größenordnungsmäßig richtig bestimmt. Auch die Rotation der Erde wurde im Altertum mehrfach behauptet und zur Erklärung des täglichen Umschwungs der Fixsternsphäre benutzt. Ein Ansatz dazu findet sich schon in der merkwürdigen Theorie der Pythagoräer (PHILOLAUS): Die Erde und eine Gegenerde bewegen sich mit 24-stündiger Umlaufszeit gemeinsam um ein (von den bewohnten Erdgegenden aus nicht sichtbares) Zentralfeuer. Auch ARISTARCH VON SAMOS (3. Jh. v.Chr.) lehrte die Erdrotation und erstmalig auch die Bewegung der Erde um die Sonne, doch konnten beide Anschauungen sich nicht durchsetzen, sondern blieben lediglich als Kuriositäten im Gedächtnis der Zeiten haften.

Die endgültige Gestalt des geozentrischen Weltbildes der Antike hat uns (um 150 n.Chr.) der alexandrinische Gelehrte CLAUDIUS PTOLEMÄUS überliefert. Sein 13 Bücher umfassendes Werk ist uns unter dem Titel *μεγάλη σύνταξις* oder besser noch unter dem der späteren arabischen Übersetzung „Almagest“[1]) erhalten geblieben und vermittelt uns eine Gesamtdarstellung des astronomischen Wissens der damaligen Zeit sowie den Versuch einer geometrisch-mechanischen Theorie der Bewegungen aller bekannten Himmelskörper mit Ausschluß der Kometen, die von den Alten meist als „sublunare“ Erscheinungen, d.h. als irdischen Ursprungs, gedeutet wurden. Die im Almagest vorgetragene Theorie der Bewegung von Sonne, Mond und Planeten ist in ihrer Endform das eigene Gedankengut des PTOLEMÄUS, doch stammen ihre Grundlagen aus älteren Quellen. Die astronomischen Beobachtungsdaten, auf die sich diese Theorie stützt, hat sich PTOLEMÄUS z.T. selbst verschafft, z.T. sind sie ihm aus älterer Zeit überliefert worden. Vor allem bedient er sich der Aufzeichnungen des HIPPARCH VON NICÄA (190–125 v.Chr.), der ein ausgezeichneter Beobachter war. Auch im Aufbau der Theorien selbst folgt PTOLEMÄUS, wo es nur angeht, den Spuren des HIPPARCH, den er mit Recht als den größten unter den älteren Astronomen ansieht und dessen Ergebnisse er daher nur selten, und auch dann

---

[1]) Das Beiwort *μεγάλη* (die große) im Titel des Werkes wurde später durch den Superlativ *μεγίστη* (die größte) ersetzt. Durch Verschmelzung mit dem arabischen Artikel *al* entstand so das Wort Almagest.

nur widerstrebend, abändert. Von HIPPARCH übernimmt er die Kenntnis der Präzession der Tag- und Nachtgleichen, ferner die Verwendung des exzentrischen Kreises zur Erklärung der ungleichförmigen Geschwindigkeit der Sonnenbewegung längs der Ekliptik. Die Idee der Epizykelbewegung, des bekanntesten Bestandteiles der ptolemäischen Theorien, ist ebenfalls schon von HIPPARCH verwendet worden, läßt sich aber bis auf den Mathematiker APOLLONIUS VON PERGE zurückführen, der etwas vor HIPPARCH, um 200 v. Chr., gelebt hat. Alleiniges Verdienst des PTOLEMÄUS bleibt es, diese verschiedenen Elemente zu einem Ganzen verwebt zu haben, das den vorliegenden Erfahrungstatsachen innerhalb der damals noch sehr geräumigen Grenzen der Beobachtungsgenauigkeit gerecht wurde.

Das Studium des Almagest, der bis zu den Zeiten von KOPERNIKUS und KEPLER, also rund anderthalb Jh. lang, als Standardwerk der gesamten Astronomie galt und dem in diesem langen Zeitraum nur wenig Ergänzendes hinzugefügt werden konnte, sollte auch heute nicht ganz vernachlässigt werden. Wenn wir auch jetzt in der Lage sind, das Problem der Himmelsmechanik von einem höheren Standpunkt aus zu überblicken, so wollen wir doch nicht vergessen, daß der überwundene geozentrische Standpunkt eigentlich der natürlichere ist, weil von ihm aus alle theoretischen Erörterungen unmittelbar an die durch die sinnliche Wahrnehmung gegebenen Erfahrungstatsachen angeschlossen werden. Die Elemente der Erfahrung – das sind hier insbesondere die periodischen „Ungleichheiten“ oder „Anomalien“ in der scheinbaren Bewegung der Sonne, des Mondes und der Planeten – lassen sich im Prinzip ebensogut durch eine geozentrische wie durch eine heliozentrische Theorie darstellen; nur erlaubt die letztere – und das ist natürlich entscheidend – alle Erscheinungen physikalisch zu deuten und unter ein einziges Gesetz von großer Einfachheit, das NEWTONsche Gravitationsgesetz, einzuordnen, während der antiken Astronomie jede Möglichkeit fehlte, die Vielheit der Erscheinungen deduktiv aus einem universellen Grundprinzip abzuleiten. Die Bewegungstheorien der Sonne, des Mondes und jedes der fünf im Altertum bekannten Planeten standen einzeln zur Diskussion und erforderten zur Erklärung der beobachteten Erscheinungen besondere Mechanismen. Je größer die Anzahl der Einzelelemente wurde, d.h. also hier der periodischen Schwankungen im Lauf der Wandelsterne, desto verwickelter und unübersichtlicher gestaltete sich der Aufbau des Weltsystems. Das Gemeinsame an beiden Auffassungen, der antiken und der modernen, ist die Feststellung der Existenz dieser Anomalien selbst. Die antike Himmelsmechanik beschritt den mühsamen und zu keinem klar erkennbaren Ziel führenden Weg der Synthese der beobachteten Himmelsbewegungen aus diesen Elementen. Die moderne Astronomie hingegen leitet diese selben Anomalien analytisch als periodische Glieder von Reihenentwicklungen ab, die sich ihrerseits als Folgerungen aus einem mathematisch formulierbaren Grundgesetz ergeben. Was dort, dem auf das Sinnfällige gerichteten Geist der Antike entsprechend, als ein System von einander überlagernden Kreisbewegungen (etwa als eine aus Hebeln und Rädern zusammengesetzte Maschinerie) erscheint, dessen Struktur keinen einheitlichen Bauplan verrät, wird in der modernen Himmelsmechanik zu einer formal-mathematischen, aber dafür auch eindeutigen und

zwangsläufigen Folgerung aus einem einfachen und allgemeingültigen Kraftgesetz.

Aus dieser Gegenüberstellung ergibt sich unschwer einer der Gründe dafür, daß die antike Weltmaschinerie nur ein unvollständiges Abbild der Wirklichkeit bleiben mußte. Die Anzahl der Glieder einer Reihenentwicklung läßt sich theoretisch bis ins Unendliche steigern, ohne daß neue Gesichtspunkte ins Feld geführt werden müßten, d.h. praktisch bis an die Grenze, die durch die Genauigkeit der durch die Theorie rechnerisch darzustellenden Beobachtungsgrößen vorgeschrieben ist. Die antiken Konstruktionen werden sich dagegen mit endlich vielen, d.h. praktisch mit möglichst wenigen Elementarmechanismen (Anomalien) begnügen müssen, da jedes neue Zusatzglied, das keinen sichtbaren logischen Zusammenhang mit den schon vorhandenen besitzt, die Theorie komplizierter macht. So finden wir denn auch bei PTOLEMÄUS, daß er sich beim Aufbau seiner Planetentheorien mit ganz wenigen Anomalien, meist mit einer oder zwei, zufrieden gibt. Der andere Grund für das Steckenbleiben in diesen verhältnismäßig primitiven Annäherungen ist das sture Festhalten an dem Prinzip der gleichförmigen Kreisbewegung der Himmelskörper. Die spätere Geschichte hat tatsächlich gezeigt, daß der eigentliche Anstoß zu der Weiterentwicklung der Himmelsmechanik nach langer Stagnation nicht so sehr durch KOPERNIKUS erfolgte, als er das schon von ARISTARCH vertretene heliozentrische Prinzip aufs neue in die Diskussion warf, sondern durch KEPLER, der an die Stelle der gleichförmigen Bewegung in Kreisen die ungleichmäßig schnelle Bewegung in elliptischen Bahnen einführte.

Die Abschnitte dieses Kapitels werden uns zeigen, wie nahe der Wahrheit der scharfsinnige Denker PTOLEMÄUS in manchen Einzelheiten seines Systems gekommen ist. An anderen Stellen wird eine Kritik seiner Gedankengänge zeigen, daß vermeidbare Fehler ihn ebenso wie die obengenannten Vorurteile daran gehindert haben, den letzten Schritt in das schon so nahe Ziel zu tun. Besonders interessant und aufschlußreich wird aber das Studium der Methoden sein, die PTOLEMÄUS bei der Ableitung der Elemente seiner Himmelskörperbahnen aus den Beobachtungen benutzte. In ihnen wird die Urform der modernen Bahnbestimmungsmethoden sichtbar werden, deren Darstellung einen angemessenen Raum in den nachfolgenden Kapiteln dieses Buches einnehmen wird.

2. *Die Bewegung der Fixsternsphäre und der Sonne*

Die scheinbare, d.h. vom irdischen Beobachtungsstandpunkt aus gesehene, Bewegung der Gestirne setzt sich aus zwei wesentlich verschiedenen Komponenten zusammen: dem in einem Sterntage (= rund $23^h\ 56^m$ mittlere Sonnenzeit) erfolgenden Umschwung der gesamten Himmelskugel (Sphäre) in ost-westlicher Richtung um die durch die Pole des Himmelsäquators gehende Weltachse, an dem Fixsterne, Sonne, Mond und Planeten gemeinsam teilnehmen, und der weit langsamer vor sich gehenden eigenen Bewegung der Wandelsterne in der Zone des „Tierkreises“, deren vorwiegende Richtung die west-östliche ist. Die Alten wußten diese beiden Komponenten sehr wohl zu trennen, so daß wir hier

von der ersteren, der durch die Rotation der Erde verursachten scheinbaren gleichförmigen Drehung der Sphäre, im allgemeinen absehen dürfen.

Die übrigbleibenden Eigenbewegungen betreffen die Sonne, den Mond und die Planeten – von den letzteren waren den Alten fünf bekannt; Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn. Daß unter diesen sieben beweglichen Gestirnen die Sonne einen besonders erhöhten Rang einnimmt, wird auch von PTOLEMÄUS anerkannt. Zwar ist er noch weit davon entfernt, ihr den Platz in der Mitte des Weltalls zuzubilligen, er weiß aber bereits, daß ihre Größe die der Erde übertrifft[1]), und er erkennt, daß die Bahnbewegungen der übrigen sechs Gestirne mit der Bahn der Sonne deutlich gekoppelt sind, während sie untereinander (abgesehen von gewissen übereinstimmenden Merkmalen in der Art der Bewegungen) keinerlei Bindungen aufzuweisen scheinen. Darüber hinaus ist die Sonnenbahn im Gegensatz zu denen des Mondes und der Planeten außerordentlich einfach: Sie erfolgt auf einem größten Kugelkreis der Sphäre, der seine Lage unter den Fixsternen nicht ändert. Dieser größte Kreis der Himmelskugel, die *Ekliptik*, bildet die Mittellinie der Tierkreiszone, eines etwa 20° breiten Gürtels, innerhalb dessen die Bewegungen aller übrigen Wandelsterne sich abspielen. Die Ebene der Ekliptik, die durch den Erdmittelpunkt geht und in der sich die Bahnbewegung der Sonne vollzieht, bietet sich somit von selbst als Hauptkoordinatenebene dar, nicht nur für die Bewegung der Sonne, sondern auch für die der Planeten und des Mondes, deren Bahnen gegen die Ekliptik nur wenig geneigt sind und die sich daher fast verzerrungsfrei auf die Ekliptikebene projizieren lassen.

PTOLEMÄUS benutzt schon, wie wir, die Koordinatendarstellung der sphärischen Gestirnsörter in diesem Ekliptiksystem nach *Länge* und *Breite*, doch sieht er sich noch vor die Alternative gestellt, ob er den Anfangspunkt der Längenzählung auf der Ekliptik durch die Fixsterne festlegen soll oder durch die dem jahreszeitlichen Lauf der Sonne entstammenden Punkte der Sonnenwenden (Solstitien) und Tag- und Nachtgleichen (Äquinoktien). Infolge der schon von HIPPARCH entdeckten *Präzession* verändern nämlich die Äquinoktien und Solstitien und damit die durch sie bestimmten zwölf „Zeichen" des Tierkreises ihre Lage gegen das System der Fixsterne langsam, aber beständig. PTOLEMÄUS entscheidet sich dafür, die Äquinoktien als feste und unveränderliche Richtungen anzusehen, auf die sich alle Vorgänge am Himmel zu beziehen haben. Die geozentrischen Polarkoordinaten der Gestirne an der Sphäre sind demnach Länge und Breite, wobei die Breite den Winkelabstand von der Ekliptik bedeutet, während die Länge in der Ekliptik selbst, und zwar im Sinne der Sonnenbewegung, vom *Frühlingspunkt* aus zu zählen ist.

Nach dieser Festsetzung ergibt sich, daß die Fixsterne infolge der Präzession eine langsame Ortsveränderung zeigen: Während ihre Breiten konstant bleiben, nehmen die Längen im Laufe der Zeit gleichmäßig zu. Der Name „Präzession" ist durch diese Definition als Vorwärtsbewegung der Fixsterne historisch gerechtfertigt – nach unserer heutigen Auffassung, die das System der Fixsterne

[1]) Er unterschätzt die Größe der Sonne, der er fünffache Erdgröße zubilligt, allerdings noch bedeutend.

(von deren individuellen Eigenbewegungen abgesehen) als räumlich fest ansieht, besteht die Präzession ja in einem *Rückwärtsschreiten* der Äquinoktien. HIPPARCH war noch der Meinung, daß von dieser Bewegung in Länge nur die Fixsterne der Tierkreiszone betroffen seien. PTOLEMÄUS weist dagegen nach, daß die Konstellationen der Fixsterne an der gesamten Sphäre sich seit den ältesten Zeiten nicht geändert hätten, was nur möglich ist, wenn die Fixsternsphäre als Ganzes die Präzessionsbewegung als eine Drehung ihrer Rotationsachse um die Pole der Ekliptik mitmacht. Zur Ableitung der Präzessionskonstanten benutzt er die Beobachtungen des HIPPARCH und die Sternbedeckungen durch den Mond, die um 390 v. Chr. von TIMOCHARIS in Alexandrien beobachtet wurden. Sein Ergebnis ist, daß die Längen der Fixsterne um rund 1° in 100 Jahren zunehmen. Die Präzessionskonstante beträgt daher nach PTOLEMÄUS 36″ im Jahr, während der moderne Wert (rund 50″) nicht unbeträchtlich größer ist. Diese Diskrepanz ist z. T. auf die Ungenauigkeit der benutzten Unterlagen zurückzuführen, z. T. aber auch auf mangelnde Sorgfalt bei der Reduktion und auf das unseren heutigen Begriffen von wissenschaftlicher Sauberkeit widersprechende Bestreben des PTOLEMÄUS, seine Ergebnisse untereinander und mit den von HIPPARCH überlieferten durch willkürliche Abrundungen in Übereinstimmung zu bringen.

Die Bewegung der Sonne längs der Ekliptik erfolgt von Frühlingspunkt zu Frühlingspunkt in einem tropischen Jahre und mit ungleichförmiger Geschwindigkeit. Um diese Ungleichförmigkeit mit dem antiken Grundsatz von den gleichförmigen Kreisbewegungen der Himmelskörper in Einklang zu bringen, stellte schon HIPPARCH die räumliche Sonnenbahn als einen *exzentrischen Kreis* dar. Dieser wird von der Sonne mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen; von der außerhalb seines Mittelpunktes stehenden Erde aus erscheint diese Bewegung im *Apogäum* (Erdferne) langsamer, im *Perigäum* (Erdnähe) schneller als im Mittel. PTOLEMÄUS übernimmt diese Theorie ohne Änderung.

Zur vollständigen Beschreibung der Sonnenbewegung auf der Ekliptik sind vier Angaben erforderlich: Die Dauer des tropischen Jahres, die Länge des Apogäums, die Exzentrizität der Bahn und die mittlere Länge der Sonne zu einem vorgeschriebenen Zeitpunkt, der „Epoche“.

Die *Länge des tropischen Jahres* leitet PTOLEMÄUS aus den Zeitpunkten der Äquinoktien ab, wie sie einerseits von HIPPARCH, andererseits – 285 Jahre später – von ihm selbst bestimmt worden waren. Die Beobachtungsmethode war ziemlich ungenau: Ein Metallring von quadratischem Querschnitt wurde so an der Südwand eines Hauses befestigt, daß seine Ebene mit der des Himmelsäquators übereinstimmte. Zur Zeit der Äquinoktien, d. h., wenn die Sonne genau im Himmelsäquator stand, fiel der Schatten der vorderen Ringhälfte genau auf die hintere Innenfläche. PTOLEMÄUS gelangt zu dem Ergebnis, daß das tropische Jahr etwas kürzer als das julianische von $365^1/_4$ Tagen sei, und zwar um soviel, daß sich die Differenz in 300 Jahren zu einem vollen Tag aufsummiert. Das ergibt $365\overset{d}{.}24667$, während der moderne Wert mit $365\overset{d}{.}24220$ merklich kleiner ist. Auch aus den älteren Beobachtungen der Solstitien durch die Schule des METON und des EUKLEMON (432 v. Chr.) leitet er den gleichen fehlerhaften

Wert ab, was wahrscheinlich wieder seiner schon erwähnten Manier zuzuschreiben ist, die Beobachtungsdaten so auszuwählen oder gar abzuändern, daß die innere Übereinstimmung nicht leidet.

Aus der Jahresperiode T folgt unmittelbar die *mittlere tägliche Bewegung* der Sonne in Länge:

$$\nu = \frac{360^\circ}{T} = \begin{cases} 0^\circ\ 59'\ 8''\!.3304 & \text{(moderner Wert)} \\ 0\ \ 59\ \ 8.2870 & \text{(Ptolemäus)} \end{cases}$$

Um diesen Betrag wächst täglich und gleichförmig der Winkel φ, unter dem (Abb. 1) der Abstand AS (Apogäum–Sonne) vom Mittelpunkt M des Exzenters $AS\Pi$ aus erscheint. Man bezeichnet φ als die *mittlere Anomalie* der Sonne, während der ungleichförmig wachsende Winkel ψ, unter dem sich die Apogäumsdistanz der Sonne von der Erde E aus darbietet, ihre *wahre Anomalie* genannt wird. Die Differenz beider Anomalien ist der Winkel ζ, unter dem die *lineare Exzentrizität* ME der Bahn von der Sonne aus erscheint. PTOLEMÄUS gebraucht sie im Sinne $\zeta = \psi - \varphi$, d.h. als Korrektion, die der mittleren Anomalie hinzuzufügen ist, um die wahre zu erhalten; wir werden sie dagegen im umgekehrten Sinne verwenden und $\varphi = \psi + \zeta$ schreiben. Der Winkel ζ ist dann positiv, wenn sich die Sonne auf dem Wege vom Apogäum A zum Perigäum Π befindet, negativ auf der anderen Bahnhälfte. PTOLEMÄUS bezeichnet diese Größe, die bald als additive, bald als subtraktive Korrektion auftritt, als *Prosthaphäresis* (Zusammensetzung aus πρόσθεσις = Addition und ἀφαίρεσις = Subtraktion). Man beweist leicht, daß die Prosthaphäresis ihren Maximalbetrag erreicht, wenn die wahre Anomalie 90° bzw. 270° beträgt. Im Dreieck MES ist nämlich

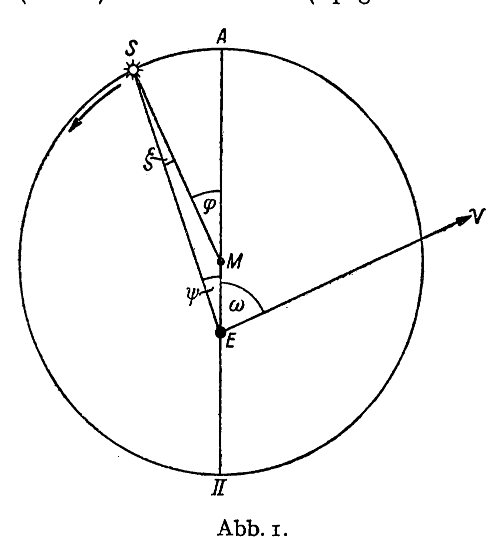


Abb. 1.
Bewegung der Sonne nach HIPPARCH.

$$\sin\zeta = \frac{ME}{MS}\sin\psi = e\sin\psi, \tag{I; 1}$$

wobei das Verhältnis e der linearen Exzentrizität ME zum Exzenterradius MS eine Bahnkonstante, die *numerische Exzentrizität*, bedeutet.

Die *Länge des Apogäums* ist der geozentrisch gemessene Winkel ω zwischen den Richtungen nach dem Frühlingspunkt ♈ und dem Apogäum. PTOLEMÄUS hält sie für konstant, obwohl eine genaue Analyse des ihm zur Verfügung stehenden Beobachtungsmaterials das langsame Fortschreiten des Apogäums

im Sinne der Sonnenbewegung hätte zutagefördern müssen. Diese Bewegung der *Apsidenlinie*, d.h. der Verbindungslinie Perigäum–Erde–Apogäum, wurde erst um 900 n.Chr. von dem arabischen Astronomen ALBATEGNIUS entdeckt. Die Summe der Winkel ω und ψ, d.h. der geozentrisch gesehene Abstand der Sonne vom Frühlingspunkt, heißt ihre *wahre Länge*, die Summe $\omega + \varphi$ ihre *mittlere Länge*, und es gilt die Beziehung

$$\text{mittlere Länge} = \text{wahre Länge} + \text{Prosthaphäresis}.$$

Wahre und mittlere Länge, ebenso natürlich auch wahre und mittlere Anomalie, stimmen miteinander überein, wenn die Prosthaphäresis verschwindet, d.h. im Apogäum und Perigäum. Zur Berechnung des wahren Sonnenortes für eine beliebige Zeit t genügt es also, wenn man außer der mittleren täglichen Bewegung v der Sonne, der Exzentrizität e und der Apogäumslänge ω den Zeitpunkt eines beliebigen Apogäumsdurchgangs kennt. Sei dieser Θ, so ist

$$\varphi = v(t - \Theta),$$

vermindert um ganze Vielfache von 360°, die mittlere Anomalie zur Zeit t. Setzen wir in (I; 1) $\psi = \varphi - \zeta$, so erhalten wir

$$\sin\zeta = e(\sin\varphi\cos\zeta - \cos\varphi\sin\zeta)$$

und hieraus zur Bestimmung der Prosthaphäresis als Funktion von φ die Formel

$$\text{(I; 2)} \qquad \operatorname{tg}\zeta = \frac{e\sin\varphi}{1 + e\cos\varphi}.$$

PTOLEMÄUS gibt an Stelle der Apogäumsdurchgangszeit Θ die mittlere Länge der Sonne für eine Epoche an, die vor den Daten der ältesten von ihm benutzten Beobachtungen liegt. Er wählt dazu den mittleren Mittag des 1. ägyptischen Thot der Regierung des NABONASSAR in Babylon (26. Februar 747 v. Chr.). Sei dieser Zeitpunkt E und die mittlere Länge der Sonne für diese Epoche λ_0, so ist die mittlere Länge der Sonne zur Zeit t

$$\lambda = \lambda_0 + v(t - E)$$

und ihre mittlere Anomalie

$$\varphi = \lambda - \omega.$$

3. *Bestimmung der Elemente der Sonnenbahn*

Die Aufgabe, Exzentrizität und Apogäumslänge der Sonnenbahn auf Grund der Hypothese des exzentrischen Kreises zu bestimmen, ist bereits von HIPPARCH vollständig gelöst worden. Es handelt sich hier um die erste Methode der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers, die wir in der Geschichte der Astronomie antreffen. PTOLEMÄUS hat die gleiche Methode auf eigene Beobachtungen angewandt; daß er nicht nur denselben Wert für die Länge des Apogäums

findet wie HIPPARCH (obwohl diese in den seitdem verflossenen 285 Jahren infolge des Vorrückens der Apsiden um fast 5° angewachsen sein mußte), sondern daß er auch den gleichen fehlerhaften Wert für die numerische Exzentrizität erhält, auf den HIPPARCH infolge der Ungenauigkeit seiner Sonnenbeobachtungen gestoßen war, zwingt uns zu der Annahme, daß PTOLEMÄUS die Ausgangsdaten seiner Rechnung nicht aus unvoreingenommenen Beobachtungen abgeleitet, sondern diese der Übereinstimmung mit HIPPARCH zuliebe zurechtgemacht hat.

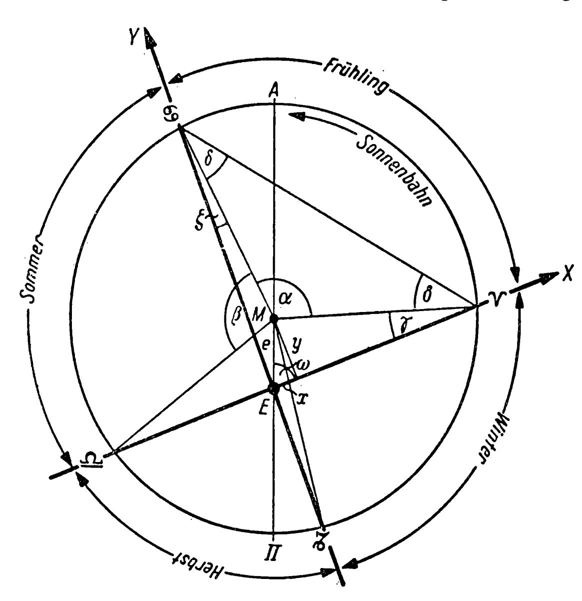


Abb. 2. Bestimmung der Elemente der Sonnenbahn.

Die Methode selbst beruht auf der Beobachtung der Länge der Jahreszeiten, die infolge der Exzentrizität der Sonnenbahn verschiedene Dauer haben. HIPPARCH findet für die Dauer des Frühlings, also für die Zeit zwischen Frühlingsäquinoktium (♈) und Sommersolstitium (♋) 94.5 mittlere Sonnentage und für die Dauer des Sommers, die Zeit zwischen Sommersolstitium und Herbstäquinoktium (♎), 92.5 Tage. Frühling und Sommer zusammen dauern demnach 187 Tage, also mehr als die Hälfte des tropischen Jahres. Das Apogäum der Sonnenbahn muß demnach (Abb. 2) auf dem Sommerbogen der Ekliptik, also zwischen ♈ und ♎ liegen, da diejenige Hälfte der Ekliptik, in der das Apogäum liegt, notwendig in der längeren Zeit durchlaufen wird. Da außerdem der Frühling länger als der Sommer war, mußte (zur Zeit des HIPPARCH!) das Apogäum irgendwo im Frühlingsquadranten liegen (Punkt A in Abb. 2).

Der Halbmesser des Exzenters sei gleich eins gesetzt. Dann ist die lineare Exzentrizität ME der numerischen Exzentrizität gleich. Man findet e und ω, wenn es gelingt, die rechtwinkligen Koordinaten

$$x = e\cos\omega, \quad y = e\sin\omega$$

des Exzentermittelpunktes in bezug auf das durch die Geraden ♎♈ und ♑♋ gebildete Achsenkreuz zu bestimmen. Da $x = \sin\zeta$, $y = \sin\gamma$, so kommt diese Aufgabe auf die Messung der beiden Winkel ζ und γ hinaus. Nun sind die Längen der Jahreszeiten und die mittlere tägliche Bewegung der Sonne be-

kannt, also auch die beiden Winkel

$$\alpha = 94.5\,\nu = 93^\circ\ 8'\!.5 \quad (\text{nach Ptolemäus } 93^\circ\ 9')$$
$$\beta = 92.5\,\nu = 91^\circ\ 10'\!.1 \quad (\text{nach Ptolemäus } 91^\circ\ 11')$$

bekannt. In den beiden gleichschenkligen Dreiecken M♈♋ und M♈♎ mit den Winkeln an der Spitze α bzw. $360^\circ - (\alpha + \beta)$ sind damit auch die Basiswinkel δ bzw. γ gegeben. Im rechtwinkligen Dreieck ♈E♋ ist dann $\delta + \zeta = 90^\circ - (\delta + \gamma)$; setzt man hierin $\delta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ und

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} - 90^\circ,$$

so erhält man

$$\zeta = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

und es ist dann

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x} = \frac{\sin \gamma}{\sin \zeta}; \quad e = \frac{\sin \zeta}{\cos \omega}.$$

Führen wir diese einfache Rechnung mit den von Ptolemäus aufgerundeten Werten für α und β durch, so ergibt sich

$$\gamma = 2^\circ\ 10', \quad \zeta = 0^\circ\ 59'; \quad \omega = 65^\circ\ 35', \quad e = \frac{1}{24.1}.$$

Ptolemäus erhält $\omega = 65^\circ\ 30'$ und $e = \frac{1}{24}$; die kleinen Abweichungen liegen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen seiner Rechnung.

Es ist nützlich, diese Ergebnisse mit denjenigen zu vergleichen, die man auf Grund moderner Daten erhalten würde. Das Berliner Astronomische Jahrbuch für 1950 gibt für den Eintritt

des Frühlingsäquinoktiums	den 21. März,	$4^h\ 36^m$ Weltzeit,
des Sommersolstitiums	den 21. Juni,	$23^h\ 37^m$ Weltzeit,
des Herbstäquinoktiums	den 23. Sept.,	$14^h\ 44^m$ Weltzeit

an. Daraus folgt für die Dauer des Frühlings $92^d\!.7923$, für die des Sommers $93^d\!.6299$. Verwenden wir den modernen Wert der mittleren täglichen Bewegung der Sonne, $\nu = 0^\circ\!.98565$, so folgt

$$\alpha = 91^\circ\!.4598; \quad \beta = 92^\circ\!.2864.$$

Die weitere Rechnung führt sodann auf

$$\gamma = 1^\circ\!.873, \quad \zeta = -\,0^\circ\!.413; \quad \omega = 102^\circ\ 26', \quad e = \frac{1}{29.9}.$$

Der exakte Wert für die Länge des Sonnenapogäums (die gleich der Länge des Perihels der Erdbahn ist) beträgt für 1950.0 $\omega = 102^\circ\, 4'.8$. Die geringe Abweichung des obigen Ergebnisses von diesem Wert beruht natürlich darauf, daß die Hypothese des exzentrischen Kreises zur Darstellung der Sonnenbewegung nicht exakt ist. Zur Beurteilung der Zuverlässigkeit des von PTOLEMÄUS mitgeteilten Wertes berücksichtigen wir, daß (nach NEWCOMB) die Apsiden der Erdbahn jährlich um $61''.9$ fortschreiten. Die Differenz von $36'.5$ zwischen unserem und dem antiken Ergebnis für ω führt demnach auf eine Zeitspanne von 2123 Jahren, also auf das Jahr $-173 = 174$ v. Chr. Wenn wir die Ungenauigkeit der antiken Beobachtungen in Rechnung stellen, so lassen sich die rund 25 Jahre später erfolgten Beobachtungen des HIPPARCH mit diesem Befund einigermaßen in Einklang bringen, nicht aber die des PTOLEMÄUS, die noch etwa 300 Jahre später durchgeführt wurden.

Was die Exzentrizität e anbelangt, so ist der von uns errechnete Betrag $\frac{1}{29.9}$ genau doppelt so groß wie die Exzentrizität der elliptischen Erdbahn $\left(e = \frac{1}{59.8}\right)$. Daß dies so sein muß, werden wir später (Abschn. 9) einsehen lernen. Der Wert $e = \frac{1}{24}$ von HIPPARCH-PTOLEMÄUS, der also einer Erdbahnexzentrizität $\frac{1}{48}$ entsprechen würde, erweist sich deshalb als bei weitem zu groß. Das wird auch nicht viel anders, wenn wir die säkulare Änderung der Erdbahnexzentrizität berücksichtigen, die für die Zeit des HIPPARCH auf rund $0.0176 = \frac{1}{57}$ führt.

4. *Die Perioden der Mondbewegung*

Von den sieben Wandelsternen ist neben der Sonne nur noch der Mond niemals rückläufig, sondern wandert ständig in gleicher Richtung durch den Tierkreis. Im Gegensatz zur Sonnenbahn ist aber der Weg des Mondes so kompliziert, daß seine genaue Beschreibung nicht nur den Astronomen der Antike, sondern auch der modernen Himmelsmechanik erhebliche Schwierigkeiten bereitet hat.

Die Ebene der Mondbahn ist gegen die Ekliptik um $5^\circ\, 9'$ geneigt. Dieser Winkel ist nur kleinen periodischen Änderungen unterworfen, die den Alten nicht bekannt waren. Es genügt also hier, die Neigung der Mondbahn als konstant anzusehen. Anders ist es mit der durch den Erdmittelpunkt gehenden Knotenlinie, in der sich die Ebenen der Mondbahn und der Ekliptik schneiden. Durch sie werden auf der Ekliptik zwei Punkte ausgezeichnet: der *aufsteigende Knoten*, in dem der Mond von der Südseite der Ekliptik auf die Nordseite übertritt, und der ihm gegenüberliegende *absteigende Knoten*. Die Längen der Knoten sind aber nicht konstant, sondern (wiederum abgesehen von kleinen periodischen Schwankungen) in einer ständigen Abnahme begriffen: Die Knoten wandern in rückläufigem Sinn um die Ekliptik. Die etwa 18.6 Jahre betragende

Umlaufsperiode der Mondbahnknoten war den Alten wohlbekannt und fand in den Mondtheorien von HIPPARCH und PTOLEMÄUS volle Berücksichtigung. Von HIPPARCH übernahm PTOLEMÄUS auch die Kenntnis einer periodischen Ungleichförmigkeit der scheinbaren Bahngeschwindigkeit des Mondes. Das Prinzip der gleichförmigen Kreisbewegung führte auch hier zu der Annahme, daß die ungleichmäßig schnelle Bewegung des Mondes durch seine verschiedene Entfernung in verschiedenen Bahnteilen vorgetäuscht wird. Diese Annahme ließe sich wieder, wie bei der Sonne, durch einen exzentrischen Kreis realisieren oder aber durch das im nächsten Abschnitt zu beschreibende Hilfsmittel des Epizykels. Jedenfalls findet man auch hier ein Apogäum, in dem die scheinbare Mondgeschwindigkeit ihr Minimum, und ein Perigäum, in dem sie ihr Maximum erreicht. Da diese Ungleichförmigkeit der Mondbewegung sehr ausgeprägt ist – die Abweichungen des wahren Mondorts vom mittleren erreichen nach jeder Seite hin rund 6° –, ließ sich auch mit den primitiven Beobachtungsgeräten der Alten die Lage der Apsiden der Mondbahn unschwer bestimmen, und so konnte auch nicht verborgen bleiben, daß Perigäum und Apogäum in raschem Vorwärtsschreiten auf der Mondbahn begriffen sind; in nicht ganz neun Jahren vollenden sie einen vollen Umlauf im rechtläufigen Sinne.

Diese besonderen Bewegungsverhältnisse geben Anlaß zu einer Reihe von Periodizitäten des Mondlaufs, auf deren genaue Bestimmung die Alten große und nicht vergebliche Mühe verwendet haben. Ihre Beobachtungen führten zunächst auf drei voneinander unabhängige Grundperioden, nämlich

1. den *synodischen Monat* oder die mittlere Dauer der Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen des Mondes mit der Sonne, d.h. die Periode des Mondphasenwechsels;

2. den *drakonitischen Monat* oder die mittlere Dauer der Zwischenzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Monddurchgängen durch den aufsteigenden Knoten, d.h. die Periode, in der sich die Schwankungen der Mondbreite wiederholen;

3. den *anomalistischen Monat* oder die mittlere Dauer der Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Apogäen des Mondes, d.h. die Periode der Schwankung der scheinbaren Bahngeschwindigkeit des Mondes.

Zwei weitere Perioden lassen sich ableiten, wenn man die Periode des synodischen Umlaufs in geeigneter Weise mit denen der jährlichen Sonnenbewegung und der Präzession kombiniert. Es sind dies

4. der *tropische Monat* oder die mittlere Dauer eines Mondumlaufs durch den Tierkreis, d.h. die Periode der Wiederkehr gleicher Längen des Mondes;

5. der *siderische Monat* oder die mittlere Dauer der Zwischenzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen des Mondes mit dem gleichen Punkt der Fixsternsphäre.

Die Beziehungen zwischen dem tropischen und dem siderischen Monat einerseits und dem synodischen Monat, dem tropischen Jahr und der Präzessionsperiode andererseits ergeben sich leicht durch folgende Überlegung: Es seien

zur Zeit t, immer in bezug auf den Frühlingspunkt als Koordinatenanfang, die mittleren Längen des Mondes und der Sonne L und λ; die Länge eines beliebigen Punktes der Fixsternsphäre sei l. Zur Epoche t_0 seien die entsprechenden Längen L_0, λ_0 und l_0. Bezeichnen wir ferner die Dauer des tropischen Monats mit U, die des tropischen Jahres mit T, die Präzessionsperiode (rund 26000 Jahre, nach PTOLEMÄUS 36000 Jahre) mit P, so ist offenbar

$$L - L_0 = \frac{2\pi}{U}(t - t_0), \quad \lambda - \lambda_0 = \frac{2\pi}{T}(t - t_0), \quad l - l_0 = \frac{2\pi}{P}(t - t_0).$$

Subtrahiert man nun die zweite und die dritte Gleichung von der ersten, so erhält man

$$L - \lambda = L_0 - \lambda_0 + 2\pi\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{T}\right)(t - t_0);$$

$$L - l = L_0 - l_0 + 2\pi\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{P}\right)(t - t_0).$$

Sei nun S die Dauer des synodischen und S' die des siderischen Monats, so ist

$$\text{(I; 3)} \qquad \frac{1}{S} = \frac{1}{U} - \frac{1}{T}; \quad \frac{1}{S'} = \frac{1}{U} - \frac{1}{P} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T} - \frac{1}{P}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich U und S' berechnen, wenn S, T und P gegeben sind.

Um die Grundperioden möglichst genau zu bestimmen, suchten die Alten nach längeren Zeitintervallen, in denen diese Perioden möglichst ganzzahlig enthalten sind. Nach Ablauf solcher Zeiträume oder *Zyklen* müssen sich alle Erscheinungen des Mondlaufs, die durch das Zusammenwirken der elementaren periodischen Vorgänge entstehen, genau wiederholen. Das gilt besonders für die mit dem Mondlauf eng zusammenhängenden Finsternisse, die im Altertum besonders eifrig beobachtet wurden. Man kann also auch umgekehrt die Perioden der Mondbewegung ermitteln, wenn es gelingt, in der Folge der beobachteten Sonnen- und Mondfinsternisse genaue Zyklen festzustellen.

Ein solcher Finsterniszyklus, in dem sich alle Finsternisse in der gleichen Reihenfolge, mit den gleichen zeitlichen Abständen und den gleichen charakteristischen Merkmalen wiederholen, war schon den älteren Astronomie treibenden Kulturvölkern (den Chinesen, Chaldäern usw.) bekannt; er wurde von den Griechen als *Saroszyklus* bezeichnet. Der Saros umfaßt $6585^1/_3$ mittlere Sonnentage oder 18 julianische Jahre (zu je $365^1/_4$ Tagen) und $10^5/_6$ Tage. In ihm sind enthalten: 223 synodische, 239 anomalistische und 242 drakonitische Umläufe des Mondes; d.h., zwei durch eine Sarosperiode getrennte Finsternisse finden nicht nur bei der gleichen Konstellation Sonne–Mond statt, sondern auch in der gleichen (bei Finsternissen notwendig kleinen) Distanz des Mondes vom gleichen Knoten und schließlich auch im gleichen Abstand vom Apogäum, d.h. in der gleichen Phase der großen periodischen Ungleichheit der Mondbewegung. Dagegen treten diese beiden Finsternisse nicht genau an der gleichen Stelle der

Ekliptik ein, da der Saroszyklus einen Überschuß von rund 11 Tagen über eine volle Anzahl von Sonnenumläufen aufweist. Infolge der allerdings nur geringen Ungleichförmigkeit der Sonnenbewegung wird die Genauigkeit des Zyklus durch diesen Umstand ein wenig beeinträchtigt.

Die Werte, die man aus dem Saroszyklus für die Grundperioden der Mondbewegung ableitet, sind bemerkenswert genau, wie man an der folgenden Gegenüberstellung dieser Zahlen mit den strengen Werten der modernen Mondtheorie erkennt:

$$\textit{Saroszyklus: } S = 6585^{\mathrm{d}}.33$$

synodischer Monat:	$S: 223 = 29^{\mathrm{d}}.5306$	(genau $29^{\mathrm{d}}.53059$)
anomalistischer M.:	$S: 239 = 27.5537$	(genau 27.55455)
drakonitischer M.:	$S: 242 = 27.2121$	(genau 27.21222)
tropischer M. (nach I; 3)	$= 27.3216$	(genau 27.32158)

Der siderische Monat ist um rund 8 Einheiten der 5. Dezimale länger als der tropische.

Trotz dieser beachtlichen Genauigkeit – die weitaus größte Abweichung findet sich beim anomalistischen Monat mit 1.3 Zeitminuten – war schon HIPPARCH mit diesen Werten nicht zufrieden. Durch sorgfältige Analyse älterer und neuerer Finsternisse wurde er zu einem neuen Zyklus von $126007^{\mathrm{d}}1^{\mathrm{h}}$ geführt, der 4267 synodische Monate zu je $29^{\mathrm{d}}.53059$ und 4573 anomalistische Monate zu je $27^{\mathrm{d}}.55457$ umfaßt. Der synodische Monat (und damit auch der tropische) war jetzt auf die 5. Dezimale genau, während der anomalistische nur noch eine Abweichung von knapp 2 Zeitsekunden gegenüber dem modernen Wert zeigte. Auch war die Forderung, daß der Zyklus eine volle Anzahl von Sonnenjahren enthalten sollte, wesentlich besser als beim Saros erfüllt: An 345 vollen ptolemäischen Jahren fehlten nur etwa 3 Tage (die Angabe von 8 Tagen im Almagest beruht offensichtlich auf einem Rechenfehler). Legen wir den modernen Wert für die Länge des tropischen Jahres zugrunde, so reduziert sich diese Abweichung sogar auf etwa $1^1/_2$ Tage.

Der drakonitische Monat läßt sich durch den hipparchischen Zyklus nicht so genau festlegen, da die beiden durch dieses Zeitintervall getrennten Finsternisse im entgegengesetzten Knoten stattfinden. Wenn wir die Zahl der im Zyklus enthaltenen drakonitischen Umläufe mit $4630^1/_2$ ansetzen, kommen wir zu dem etwas zu großen Wert von $27^{\mathrm{d}}.2124$. Durch eine parallele Untersuchung stellt HIPPARCH aber fest, daß 5458 synodische Monate genau gleich 5923 drakonitischen Monaten sind. Mit Hilfe des schon gesicherten Wertes für die synodische Umlaufszeit erhält er so die Länge des drakonitischen Monats zu $27^{\mathrm{d}}.21222$ in genauer Übereinstimmung mit dem modernen Befund.

Äußerst merkwürdig ist, daß PTOLEMÄUS, der sonst geneigt ist, mangelhaft begründete Ergebnisse des HIPPARCH sogar dann zu übernehmen, wenn sie mit dem eigenen Befund in Widerspruch stehen, sich mit diesen mit großem Scharfsinn und vorbildlicher Gründlichkeit abgeleiteten Resultaten seines großen Vorgängers nicht zufrieden gibt. Nur die synodische und die tropische Umlaufszeit des Mondes hält er für genügend gesichert, während er die übrigen Perioden noch zu verbessern sucht. Zweifellos leitet ihn hierbei die Erkenntnis

der ungeheuren Bedeutung genauer Zahlenwerte für die fundamentalen astronomischen Konstanten, zu einem anderen Teile auch wohl das Bedürfnis, die von ihm zum Zwecke der Verbesserung dieser Konstanten erfundenen neuen Reduktionsmethoden ins rechte Licht zu rücken. Diese Methoden, die wir in den nächsten Abschnitten kennenlernen werden, verdienen dies auch wirklich: Sie entsprechen im Prinzip völlig den modernen Verfahren bei der Trennung und Bestimmung von einander überlagernden Periodizitäten. Die Ergebnisse, die PTOLEMÄUS im Falle der Perioden der Mondbewegung mit ihnen erzielt hat, sind allerdings völlig illusorisch: Die von ihm gefundenen Korrektionen der Perioden des HIPPARCH betragen nicht mehr als 1–2 Einheiten der sechsten Dezimale und sind reine Zufallsergebnisse ohne reale Bedeutung.

5. *Die große Ungleichheit der Mondbewegung. Einführung des Epizykels*

Die erwähnte Methode des PTOLEMÄUS zur Verbesserung der Mondperioden setzt nicht nur die Kenntnis genäherter Werte dieser Konstanten voraus, die ja von HIPPARCH überliefert waren, sondern auch bereits eine formale Theorie der Mondbewegung selbst. Ferner wird, da es sich hier um die Verwertung von Finsternissen handelt, auch die vollständige Theorie der Sonnenbewegung vorausgesetzt. Bei diesen Analysen bevorzugt PTOLEMÄUS mit Recht die *Mondfinsternisse*, deren Eintrittszeiten unabhängig vom Standpunkt des Beobachters sind, während der Verlauf der *Sonnenfinsternisse* wesentlich durch die Parallaxe des Mondes mitbestimmt wird. Das hätte die rechnerische Verwertung der Sonnenfinsternisse nicht unbeträchtlich erschwert, wenn auch die Mondparallaxe den Alten schon recht genau bekannt war. Zur Festlegung der

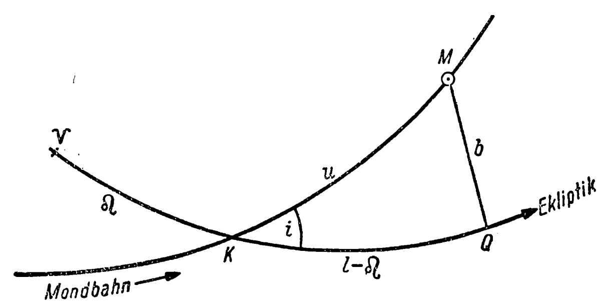


Abb. 3. Mondbahn und Ekliptik.

Mondörter zur Zeit der verwendeten Finsternisse benutzt PTOLEMÄUS die nach der weiter oben beschriebenen Theorie der Sonnenbewegung konstruierten Sonnentafeln: Die Länge des Mondes z.Z. der Mitte einer Mondfinsternis ergibt sich aus der gleichzeitigen Länge der Sonne durch Hinzufügen von 180°.

Zwecks Vereinfachung der mathematischen Überlegungen denkt sich PTOLEMÄUS die Ebene der Mondbahn in die Ekliptik verlegt, d.h., er identifiziert die ekliptikalen Längen des Mondes mit den in der Mondbahn gezählten. Den

Unterschied hält er wegen der geringen Neigung der Mondbahn für unerheblich. In Wirklichkeit kann der dadurch begangene Fehler bis auf rund 7′ anwachsen. Sei (Abb. 3) K der aufsteigende (oder absteigende) Knoten der Mondbahn, $\Upsilon K = \Omega$ seine Länge, $l = \Upsilon Q$ die ekliptikale Länge des Mondes M, i die Bahnneigung, $KM = u$ der Abstand des Mondes vom Knoten (das „Argument der Breite") und $\Omega + u$ die Länge des Mondes in der Bahn, so gilt im rechtwinkligen sphärischen Dreieck KMQ

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \operatorname{tg} u \cos i.$$

Für die Differenz zwischen Länge in der Bahn und ekliptikaler Länge erhält man dann

$$\operatorname{tg}(\Omega + u - l) = \operatorname{tg}[u - (l - \Omega)] = \frac{\operatorname{tg} u\,(1 - \cos i)}{1 + \operatorname{tg}^2 u \cos i}.$$

Zur Feststellung der Extrema differenzieren wir nach u und erhalten nach einfacher Rechnung

$$\frac{d}{du}\operatorname{tg}[u - (l - \Omega)] = \frac{(1 - \cos i)\,(1 - \operatorname{tg}^2 u \cos i)}{\cos^2 u\,(1 + \operatorname{tg}^2 u \cos i)^2}.$$

Die Extrema treten also bei $\operatorname{tg}^2 u = \sec i$ auf, d.h. für $u = \pm 45°\, 3\overset{'}{.}5$ bzw. $u = \pm 134°\, 56\overset{'}{.}5$, wenn wir für i den modernen mittleren Wert $5°\, 9'$ einsetzen. Der Extremwert selbst ergibt sich dann aus

$$\operatorname{tg}[u - (l - \Omega)]_{\text{extr.}} = \pm \sqrt{\sec i}\, \sin^2 \frac{i}{2} \quad \text{zu} \quad [u - (l - \Omega)]_{\text{extr.}} = \pm 0°\, 6\overset{'}{.}9.$$

Auf die nachfolgenden Überlegungen hat die Vernachlässigung dieser Differenz keinen Einfluß, da ja die verwendeten Örter des Mondes alle in unmittelbarer Nähe der Knoten liegen, wo $u - (l - \Omega) = 0$ ist.

Wenn wir also von den mit der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik zusammenhängenden Besonderheiten der Mondbewegung absehen dürfen, bleiben von den bisher genannten Eigenschaften der Mondbahn nur noch die große Ungleichheit in Länge bestehen, die auch als „*Mittelpunktsgleichung*" bekannt ist, außerdem die rechtläufige Bewegung der Apsiden. Eine zweite kleinere Ungleichförmigkeit der Mondbewegung, die „*Evektion*", geht in die Finsternisbeobachtungen ebensowenig ein wie die soeben beschriebene „*Reduktion auf die Ekliptik*". Diese zuerst von HIPPARCH bemerkte und von PTOLEMÄUS gründlich untersuchte Periodizität bewirkt lediglich, wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden soll, eine Schwankung der Konstanten der Mittelpunktsgleichung im Rhythmus eines halben synodischen Monats. Aus den Finsternissen allein, die ja in bezug auf einen solchen Rhythmus stets die gleiche Phase zeigen, ließe sich also eine Trennung der Evektion von der Mittelpunktsgleichung nicht erzielen. Man müßte dazu Beobachtungen der Mondlänge in den Quadraturen (im ersten und letzten Viertel) zu Hilfe nehmen. Auf diese Weise hat PTOLEMÄUS die Evektion abgeleitet.

Bei Beschränkung auf Mondörter während der Finsternisse (oder ganz allgemein in den Syzygien, d.h., bei Voll- und Neumond) kommt PTOLEMÄUS also mit einer provisorischen Mondtheorie aus, die nur eine einzige periodische Ungleichheit zeigt. Diese hätte er wieder, wie in der Theorie der Sonnenbahn, durch Einführung eines exzentrischen Kreises beschreiben können; nur hätte er dann den Mittelpunkt (und damit auch die Apsidenlinie) des Exzenters eine langsame Kreisbewegung um die Erde ausführen lassen müssen, um das Vorrücken der Apsiden darzustellen. Er zieht es aber vor, den exzentrischen Kreis als mathematisches Hilfsmittel für die spätere Vervollständigung der Theorie durch die Evektion aufzusparen und für die provisorische Theorie den *Epizykel* als gleichwertiges Hilfsmittel zu verwenden.

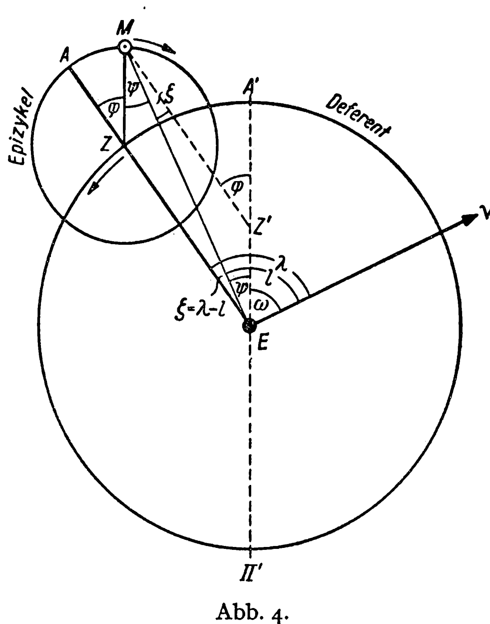


Abb. 4.
Große Ungleichheit der Mondbewegung.
Ersatz des exzentrischen Kreises
durch den Epizykel.

Die einfachste Form der Darstellung der Bahn eines Himmelskörpers durch Einführung des Epizykels ist folgende: Auf einem um die Erde E als Mittelpunkt konstruierten Kreis, dem *Deferenten*, bewegt sich (Abb. 4) ein Punkt Z mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Diesen Punkt, den *Epizykelmittelpunkt*, umkreist wieder, ebenfalls gleichmäßig schnell, der Himmelskörper M auf einem kleineren Kreise, dem *Epizykel*. Umlaufssinn und Winkelgeschwindigkeit beider Bewegungen sowie das Verhältnis der Halbmesser der beiden Kreise können zur Darstellung verschiedener Bewegungen beliebig variiert werden.

Der Ortsvektor EM des Himmelskörpers erscheint als Summe von zwei Vektoren EZ und ZM, deren Länge konstant bleibt. Da diese beiden Vektoren in ihrer Reihenfolge vertauschbar sind (kommutatives Gesetz der Vektorenaddition), so läßt sich die Bewegung von M auch als Kreisbewegung um den Punkt Z' darstellen, der seinerseits auf einem kleineren Kreise um die Erde läuft. Eine spezielle Anwendung dieser Vertauschungsregel ergibt, daß man die Bewegung auf einem exzentrischen Kreis mit festem Mittelpunkt auch als Epizykelbewegung darstellen kann. Ist also Z' der Mittelpunkt eines exzentrischen Kreises mit der festen Apogäumsrichtung $EZ'A'$, so ergibt sich die Bewegung von M auf diesem Kreise ebenfalls, wenn man den Epizykelmittelpunkt Z auf dem Deferenten um E kreisen läßt und den Führungsvektor ZM

des Himmelskörpers im Epizykel stets der konstanten Richtung EZ' parallel bleiben läßt.

Ptolemäus bezeichnet den erdfernsten Punkt A des Epizykels als dessen Apogäum und beschreibt die jeweilige Stellung von M im Epizykel durch den Winkel $AZM = \varphi$. Im Falle der exzentrischen Kreisbewegung ist, wie Abb. 4 unmittelbar erkennen läßt, dieser Winkel ständig gleich der mittleren Anomalie $MZ'A'$; nur wird φ im exzentrischen Kreise vom Apogäum EA' des Exzenters aus im rechtläufigen, im Epizykel dagegen vom Apogäum ZA aus im rückläufigen Sinne gezählt. Es ist ferner klar, daß der Winkel EMZ gleich der wahren Anomalie ψ und der stets spitze Winkel ZEM gleich der Prosthaphäresis ζ ist.

Von diesem Schema unterscheidet sich die provisorische Mondtheorie des Ptolemäus nur dadurch, daß die Apsidenlinie EA' nicht festliegt, sondern sich mit einer Umlaufszeit von 8.85 Jahren in rechtläufigem Sinne dreht; d.h., die Apogäumslänge ω ist nicht konstant, sondern nimmt langsam zu. Im Sinne der Epizykelbewegung bedeutet das, daß der zu EZ' parallele Vektor ZM zu einem vollen Umlauf im Epizykel (von Apogäum zu Apogäum) etwas mehr Zeit benötigt als der Epizykelmittelpunkt zu einem vollen Umlauf im Deferenten (von Frühlingspunkt zu Frühlingspunkt). Die *mittlere Anomalie* φ des Mondes nimmt in einem anomalistischen Monat gleichmäßig um 2π zu. Als *mittlere Länge*, die, ebenfalls gleichförmig, in einem tropischen Monat um 2π wächst, bezeichnen wir den Abstand $\lambda = \omega + \varphi$ des Epizykelapogäums vom Frühlingspunkt. Der Winkel $l = \Upsilon EM$ ist die direkt beobachtbare *wahre Länge*, die Differenz $\psi = l - \omega$ die *wahre Anomalie* des Mondes, während $\zeta = \lambda - l$, wie schon erwähnt, der Prosthaphäresis des exzentrischen Kreises entspricht.

Die Bestimmung der Bahnkonstanten (Exzentrizität, d.h. hier das Verhältnis zwischen den Halbmessern des Epizykels und des Deferenten, und Länge des Apogäums des Epizykels zu einer gegebenen Epoche) ist wieder eine ähnliche Aufgabe wie die in Abschn. 3 gelöste. Ein prinzipieller Unterschied zwischen beiden Problemen besteht nicht; nur lagen im Fall der Sonne die Verhältnisse etwas einfacher: In der Sonnentheorie war die Apsidenlinie (nach der Annahme des Ptolemäus) unbeweglich, ferner waren die Differenzen der drei benutzten wahren Längen der Sonne (zweier Äquinoktien und des dazwischenliegenden Solstitiums) je 90°, was die rechnerische Durchführung der Aufgabe wesentlich erleichterte.

Auch die vorliegende Aufgabe erfordert wieder die Kenntnis dreier Örter – hier der wahren Längen des Mondes während dreier Mondfinsternisse, die zeitlich möglichst dicht aufeinanderfolgen –, ferner der genauen Eintrittszeiten dieser Ereignisse. Die letzteren waren unmittelbar gegeben und wurden von Ptolemäus, sofern es sich um Finsternisse handelte, die nicht in Alexandrien beobachtet worden waren, auf die Ortszeit von Alexandrien reduziert. Diese Zeiten bezogen sich auf die Mitte der Finsternisse, die genügend genau mit der Opposition Mond–Sonne in Länge zusammenfällt. Die wahren Längen des Mondes konnten dann, wie erwähnt, aus den Sonnentafeln entnommen werden.

Seien t_1, t_2, t_3 die drei Finsterniszeiten und l_1, l_2, l_3 die zugehörigen wahren Längen des Mondes, ferner

$$n_t = \frac{360^\circ}{27.32158} = 13^\circ\!.1764; \quad n_a = \frac{360^\circ}{27.55457} = 13^\circ\!.0650$$

die mittlere tägliche tropische und anomalistische Bewegung des Mondes. Da die obigen Zahlen, die PTOLEMÄUS von HIPPARCH übernommen hatte und um deren Verbesserung er sich bemühte, aus Zeitintervallen von mehreren Jahrhunderten abgeleitet worden waren, durften sie für die sehr viel kürzeren Zwischenzeiten zwischen den drei Finsternisterminen als streng richtig angesehen werden. Mit ihnen ergeben sich

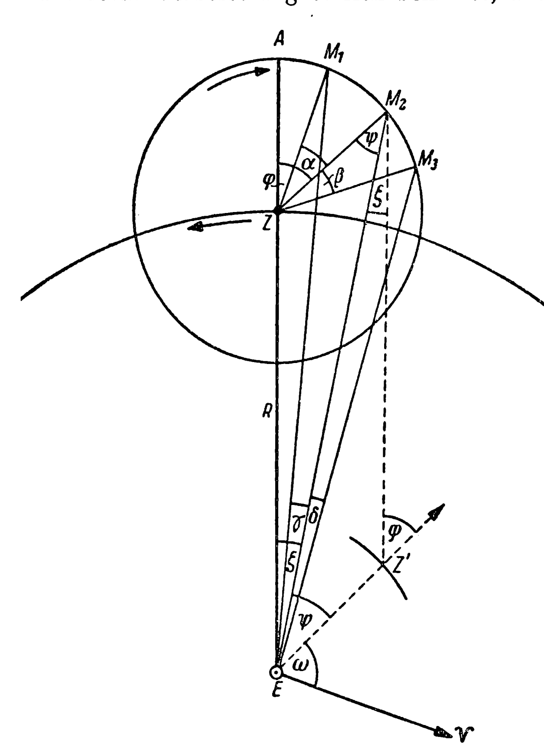


Abb. 5. Bestimmung der Mondbahnelemente aus drei Mondfinsternissen.

1. die Differenzen der mittleren Längen des Mondes in den beiden Intervallen $t_2 - t_1$ und $t_3 - t_2$:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = n_t(t_2 - t_1);$$
$$\lambda_3 - \lambda_2 = n_t(t_3 - t_2);$$

2. die Differenzen der mittleren Anomalien:

$$\alpha = \varphi_2 - \varphi_1 = n_a(t_2 - t_1);$$
$$\beta = \varphi_3 - \varphi_2 = n_a(t_3 - t_2);$$

3. die Überschüsse der mittleren Längendifferenzen über die wahren:

$$\gamma = (\lambda_2 - \lambda_1) - (l_2 - l_1) = \zeta_2 - \zeta_1;$$
$$\delta = (\lambda_3 - \lambda_2) - (l_3 - l_2) = \zeta_3 - \zeta_2,$$

die gleich den Differenzen der Prosthaphäresen sind.

In Abb. 5 sind die drei Stellungen des Mondes (M_1, M_2, M_3) auf dem Epizykel, bezogen auf den beweglichen Leitstrahl EZ des Epizykelmittelpunkts, angedeutet. Die Differenzen α und β der mittleren Anomalien sind offenbar durch die Winkel M_1ZM_2 und M_2ZM_3 gegeben, die Überschüsse γ und δ durch die Winkel M_1EM_2 und M_2EM_3. Die Aufgabe lautet dann, aus den bekannten Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die wahre Anomalie $\psi = \varphi - \zeta$ und die mittlere Anomalie φ des zweiten Mondortes zu finden, womit dann eo ipso auch die der beiden an-

deren Örter bekannt sein werden, ferner das Verhältnis des Epizykelhalbmessers ZA zu dem Deferentenhalbmesser EZ. Setzt man den ersteren gleich eins, so genügt es, die Länge R der Strecke EZ zu finden.

Im Dreieck EZM_2 ist nach dem Sinussatz

$$R \sin \zeta = \sin \psi .$$

Ebenso ist in den Dreiecken EZM_1 und EZM_3

$$\begin{aligned} R \sin (\zeta - \gamma) &= \sin [(\varphi - \alpha) - (\zeta - \gamma)] = \sin (\psi - \alpha + \gamma), \\ R \sin (\zeta + \delta) &= \sin [(\varphi + \beta) - (\zeta + \delta)] = \sin (\psi + \beta - \delta). \end{aligned} \tag{I; 4}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$x = R \cos \zeta; \quad y = R \sin \zeta = \sin \psi; \quad z = \cos \psi,$$

so ergeben die Gleichungen (I; 4) nach Auflösung der Sinusausdrücke

$$\begin{array}{rcl|c|c} & & & \text{(I)} & \text{(II)} \\ y \cos \gamma - x \sin \gamma &=& y \cos (\alpha - \gamma) - z \sin (\alpha - \gamma) & \sin (\beta - \delta) & \sin \delta \\ y \cos \delta + x \sin \delta &=& y \cos (\beta - \delta) + z \sin (\beta - \delta) & \sin (\alpha - \gamma) & \sin \gamma . \end{array}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit den Faktoren (I) und (II) und addiert, so findet man

$$y [\cos \gamma \sin (\beta - \delta) + \cos \delta \sin (\alpha - \gamma)] - x\varDelta = y \sin (\alpha + \beta - \gamma - \delta),$$

$$y \sin (\gamma + \delta) = y [\sin \gamma \cos (\beta - \delta) + \sin \delta \cos (\alpha - \gamma)] + z\varDelta,$$

$$\text{mit} \quad \varDelta = \sin \gamma \sin (\beta - \delta) - \sin \delta \sin (\alpha - \gamma),$$

und daraus sogleich

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \zeta &= \frac{y}{x} = \frac{\varDelta}{\cos \gamma \sin (\beta - \delta) + \cos \delta \sin (\alpha - \gamma) - \sin (\alpha + \beta - \gamma - \delta)}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{y}{z} = \frac{\varDelta}{\sin (\gamma + \delta) - \sin \gamma \cos (\beta - \delta) - \sin \delta \cos (\alpha - \gamma)}. \end{aligned} \tag{I; 5}$$

Die beiden Hauptunbekannten des Problems, φ und R, sind dann durch

$$\varphi = \zeta + \psi; \quad R = \frac{\sin \psi}{\sin \zeta} \tag{I; 6}$$

gegeben, und es ist schließlich auch, für den Termin der zweiten Finsternis,

$$\omega = l - \psi .$$

Die in Abschn. 3 gelöste Aufgabe der Bestimmung der Elemente der Sonnenbahn ist in der obigen als Spezialfall enthalten. Dort ist $n_a = n_t$, da

nach Meinung des PTOLEMÄUS eine Apsidenbewegung nicht stattfindet. Demnach wird $\lambda_2 - \lambda_1 = \alpha$, $\lambda_3 - \lambda_2 = \beta$. Ferner hat man $l_1 = 0$, $l_2 = \frac{\pi}{2}$, $l_3 = \pi$, also $\gamma = \alpha - \frac{\pi}{2}$, $\delta = \beta - \frac{\pi}{2}$ und somit

$$\alpha - \gamma = \beta - \delta = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha + \beta - \gamma - \delta = \pi.$$

Die Lösung (I; 5) lautet demnach im Falle der Sonnenbahnbestimmung nach Abschn. 3:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\sin \gamma - \sin \delta}{\cos \gamma + \cos \delta} = \operatorname{tg} \frac{\gamma - \delta}{2}; \quad \zeta = \frac{\gamma - \delta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \gamma - \sin \delta}{\sin (\gamma + \delta)} = \frac{\sin \frac{\gamma - \delta}{2}}{\sin \frac{\gamma + \delta}{2}} = - \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Da ferner $\omega = l_2 - \psi = \frac{\pi}{2} - \psi$, so ist $\operatorname{tg} \omega = \operatorname{ctg} \psi$, schließlich auch, übereinstimmend mit den Ergebnissen von Abschn. 3,

$$e = \frac{1}{R} = \frac{\sin \zeta}{\sin \psi} = \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sec \omega.$$

Die nun folgenden numerischen Beispiele beziehen sich auf die beiden Bahnbestimmungen, die PTOLEMÄUS aus je drei Mondfinsternisörtern vorgenommen hat. Diese beiden Beobachtungsgruppen liegen zeitlich weit auseinander und eignen sich daher gut zur genauen Bestimmung der Periode des anomalistischen Monats. Die erste Gruppe stammt aus alten babylonischen Finsternisbeobachtungen um 720 v. Chr., die andere ist von PTOLEMÄUS selbst beobachtet worden.

Nachstehende Übersicht gibt Ausgangsdaten und Ergebnisse der leichten Rechnung. Alle Zeiten beziehen sich auf die Mitte der Finsternisse und sind in wahrer Sonnenzeit für Alexandria gegeben; die Zwischenzeiten enthalten bereits die von PTOLEMÄUS berechnete Reduktion auf mittlere Ortszeit, d. h. die Berücksichtigung der Zeitgleichung.

A. *Alte Finsternisse (beobachtet in Babylon):*

1. totale Mondfinsternis,	19.3.721 v. Chr.,	$8^h\ 40^m$ abds.	$l_1 =$	$174°\ 30'$
2. partielle Mondfinsternis,	8.3.720 v. Chr.,	11 10 abds.	$l_2 =$	163 45
3. partielle Mondfinsternis,	1.9.720 v. Chr.,	7 40 abds.	$l_3 =$	333 15

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= 354^{\mathrm{d}}.11 & t_3 - t_2 &= 176^{\mathrm{d}}.84 \\ l_2 - l_1 &= 349^\circ\,15' & l_3 - l_2 &= 169^\circ\,30' \\ \lambda_2 - \lambda_1 &= 345^\circ\,51' & \lambda_3 - \lambda_2 &= 170^\circ\,\ \,8' \\ \alpha &= 306^\circ\,25' & \beta &= 150^\circ\,26' \\ \gamma &= -3^\circ\,24' & \delta &= 0^\circ\,37' \end{aligned}$$

Daraus nach (I; 5, 6)

$$\zeta = 0^\circ\,59'; \quad \psi = 11^\circ\,25'; \quad \varphi = 12^\circ\,24'; \quad R = 11.50$$

in Übereinstimmung mit den von PTOLEMÄUS nach einer sehr umständlichen geometrischen Rechnung gefundenen Werten.

B. *Neuere Finsternisse (beobachtet in Alexandrien):*

1. totale Mondfinsternis, 6. 5. 133 n. Chr., $11^{\mathrm{h}}\,15^{\mathrm{m}}$ abds. $l_1' = 223^\circ\,15$
2. partielle Mondfinsternis, 20. 10. 134 n. Chr., 11 0 abds. $l_2' = 25\ \ 10$
3. partielle Mondfinsternis, 6. 3. 136 n. Chr., 4 0 morg. $l_3' = 164\ \ 5$

$$\begin{aligned} t_2' - t_1' &= 531^{\mathrm{d}}.984 & t_3' - t_2' &= 502^{\mathrm{d}}.229 \\ l_2' - l_1' &= 161^\circ\,55' & l_3' - l_2' &= 138^\circ\,55' \\ \lambda_2' - \lambda_1' &= 169^\circ\,38' & \lambda_3' - \lambda_2' &= 137^\circ\,34' \\ \alpha' &= 110^\circ\,22' & \beta' &= 81^\circ\,37' \\ \gamma' &= 7^\circ\,43' & \delta' &= -1^\circ\,21' \end{aligned}$$

Daraus nach (I; 5, 6)

$$\zeta' = 4^\circ\,21'; \quad \psi' = 60^\circ\,15'; \quad \varphi' = 64^\circ\,36'; \quad R = 11.54.$$

PTOLEMÄUS findet

$$\zeta' = 4^\circ\,20'; \quad \psi' = 60^\circ\,18'; \quad \varphi' = 64^\circ\,38'; \quad R = 11.46.$$

Die Abweichungen liegen im Bereich der Abrundungsfehler der Rechnung und weit innerhalb der durch die Ungenauigkeit der Beobachtungen bedingten Grenzen, die man wohl kaum kleiner als $\pm 10'$ anzunehmen berechtigt ist. Als endgültigen Wert für R nimmt PTOLEMÄUS 11.5 an.

Die beiden mittleren Anomalien φ, φ' liefern die Phasen der auf das jeweilige Apogäum bezogenen mittleren (anomalistischen) Bewegung des Mondes für die Zeiten der zweiten Finsternis jeder Gruppe. Für die Zeiten der vorhergehenden Durchgänge durch das Apogäum erhält man daher

$$T = t_2 - \frac{\varphi}{n_a} = t_2 - 0^{\mathrm{d}}.95; \quad T' = t_2' - \frac{\varphi'}{n_a} = t_2' - 4^{\mathrm{d}}.94.$$

Diese Zeiten sind auch mit einem roh genäherten n_a genügend sicher. Nun beträgt die zwischen den beiden Finsternissen verflossene Zeit $t_2' - t_2 = 311783.97$ mittlere Sonnentage, die Zeit zwischen den beiden Apogäen also

$$T' - T = t_2' - t_2 - 3^{\mathrm{d}}.99 = 311779^{\mathrm{d}}.98.$$

Dividiert man diese Zeit durch die Anzahl 11315 der in ihr zurückgelegten vollen anomalistischen Monate, so erhält man für die Periode der anomalistischen Bewegung den Wert $27^{d}.55457$, der mit dem von HIPPARCH gefundenen genau übereinstimmt und von dem modernen Wert um zwei Einheiten der letzten Dezimalstelle abweicht. Wenn PTOLEMÄUS diese Periode noch auf einige Dezimalstellen mehr angibt (die von ihm gefundene Abweichung wird erst in der sechsten Dezimale merklich), so ist dies ein reines Rechenergebnis ohne reale Bedeutung.

6. *Die Evektion*

PTOLEMÄUS hatte bemerkt, daß die aus der provisorischen Theorie folgenden wahren Längen des Mondes nicht immer mit den beobachteten übereinstimmen. Nur in der Umgebung der Syzygien (Voll- und Neumond) ließen sich, innerhalb der zu erwartenden Genauigkeitsgrenzen, die Abweichungen des wahren vom mittleren Mondlauf durch den Epizykel mit dem Halbmesserverhältnis 1 : 11.5 darstellen. Außerhalb der Syzygien, am fühlbarsten in den Quadraturen (erstes und letztes Viertel), erscheint die Amplitude der periodischen Schwankung der Differenz „wahre minus mittlere Länge" größer, so daß es den Anschein hatte, als sei an diesen Stellen der Mondbahn der Epizykel des Mondes in größere Erdnähe gerückt. Auch HIPPARCH hat diese Erscheinung, die später als *Evektion* bezeichnet wurde, schon bemerkt, aber erst PTOLEMÄUS hat versucht, sie in eine Theorie der Mondbewegung einzubauen. Er erreichte das, indem er den Mittelpunkt des Mondepizykels, wie in der provisorischen Theorie, durch einen von der Erde ausgehenden, sich gleichmäßig drehenden Leitstrahl herumführen ließ, nun aber auf einem exzentrischen Kreis, dessen Mittelpunkt zudem nicht festliegt, sondern sich seinerseits gleichmäßig auf einem Kreis um die Erde bewegt. Diese Bewegung muß mit der des Mondes und der Sonne so abgestimmt sein, daß die beobachtete Erscheinung auftritt, daß also der Epizykelmittelpunkt in den Syzygien im Apogäum, in den Quadraturen im Perigäum des Exzenters steht.

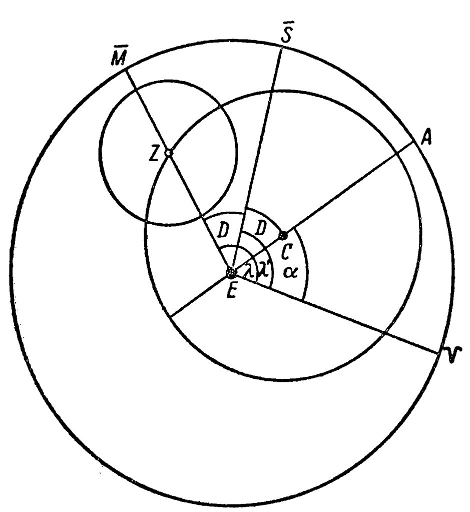


Abb. 6. Die Evektion.

Abb. 6 möge dies veranschaulichen. Wieder sei die Mondbewegung in die Ebene der Ekliptik verlegt. $E♈$ sei die feste Richtung nach dem Frühlingspunkt, $E\bar{S}$ die Richtung nach der die Ekliptik gleichmäßig umkreisenden mitt-

leren Sonne, $EZ\overline{M}$ die nach dem Mittelpunkt des Mondepizykels und dem mittleren Mond $\overline{M}$, der, ebenfalls mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, die Ekliptik in einem tropischen Monat umläuft. Es ist dann $\Upsilon E\overline{M} = \lambda$ die mittlere Länge des Mondes, $\Upsilon E\overline{S} = \lambda'$ die mittlere Länge der Sonne und $\overline{S}E\overline{M} = D$ der Abstand des mittleren Mondes von der mittleren Sonne, also ein Winkel, der in einem synodischen Monat um 2π wächst und z. Z. des mittleren Neumonds null ist. Der Epizykelmittelpunkt Z möge auf einem Exzenter mit dem Mittelpunkt C liegen und durch den Leitstrahl $E\overline{M}$ auf ihm herumgeführt werden. Dabei soll C die Erde mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit umkreisen, und zwar so, daß Z ins Apogäum des Exzenters gelangt, wenn $\overline{M}$ und $\overline{S}$ in Konjunktion oder Opposition stehen, ins Perigäum aber in den Quadraturen. Das ist offensichtlich erfüllt, wenn $\overline{M}$ und das Apogäum A des Exzenters immer genau symmetrisch zur Richtung $E\overline{S}$ liegen. Es muß demnach der Winkel $AE\overline{M} = 2D$ sein, also durch die Richtung nach der mittleren Sonne halbiert werden. Die Länge des Apogäums des Exzenters ist demnach $\alpha = \lambda - 2D$, und A bewegt sich von $\overline{S}$ aus rückläufig.

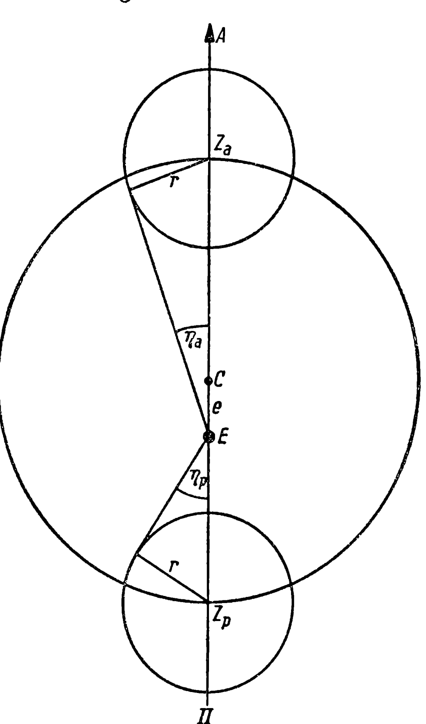


Abb. 7. Schwankung der Mittelpunktsgleichung infolge der Evektion.

Die wichtigsten Konstanten dieser Bewegung sind die Exzentrizität des Exzenters und das Verhältnis der Halbmesser von Epizykel und Exzenter. Ptolemäus leitet diese Größen aus der Beobachtung ab, daß in den Syzygien der Betrag der Differenz zwischen wahrer und mittlerer Länge des Mondes bis auf 5°, in den Quadraturen aber bis auf 7° 40′ anwachsen kann. In Abb. 7 ist der Mondepizykel zweimal gezeichnet, im Apogäum und im Perigäum des Exzenters. Die maximalen Beträge der Elongationen des Mondes vom Epizykelmittelpunkt, also die Amplituden der Mittelpunktsgleichung, sind durch die Winkel $\eta_a = 5°\,0'$ bzw. $\eta_p = 7°\,40'$ gegeben. Setzen wir den Halbmesser des Exzenters gleich eins, so ist $EC = e$ die numerische Exzentrizität des Exzenters. Zwischen ihr und dem Halbmesser r des Epizykels bestehen dann die Beziehungen

$$\frac{r}{1+e} = \sin \eta_a = 0.0872; \quad \frac{r}{1-e} = \sin \eta_p = 0.1334,$$

aus denen leicht

$$r = 0.1055; \quad e = 0.2094$$

folgt. In den Syzygien ist cosec $\eta_a = 11.47$; dieser Wert stimmt innerhalb der Genauigkeitsgrenzen mit dem von R der provisorischen Theorie überein.

Die Bewegung des Epizykels ist damit vollständig beschrieben. Es fehlt jetzt noch eine Angabe darüber, wie die Bewegung des Mondes im Epizykel erfolgen soll, d.h., von welchem Punkt des Epizykels aus die anomalistische Bewegung des Mondes zu zählen ist. Nennen wir diesen Punkt das *wahre Apogäum* des *Epizykels*, so ergeben sich für seine Orientierung tatsächlich verschiedene Möglichkeiten, über die nur weitere Beobachtungen entscheiden können. Es läge nahe zu vermuten, daß das wahre Apogäum entweder durch den Leitstrahl EZ (Abb. 8) von der Erde aus oder durch CZ vom Mittelpunkt des Exzenters aus auf den Epizykel projiziert wird, also entweder in F oder D liegt. Eine Entscheidung darüber gelingt am besten, wenn sich der Epizykel möglichst in der Mitte zwischen dem Apogäum A (Syzygien) und dem Perigäum Π (Quadraturen) des Exzenters befindet, also, wenn die Phasengestalt des Mondes entweder die Sichelform oder die bikonvexe Form zeigt. Bestimmt man in solcher Lage des Epizykels die wahre Länge des Mondes, wenn die mittlere Anomalie gerade null ist, so ist durch den Mondort das wahre Apogäum des Epizykels gegeben. PTOLEMÄUS findet aus einer Reihe von Beobachtungen, daß das wahre Apogäum weder in F noch in D liegt, sondern in dem Punkte G, in den von einem festen Punkt Q der Apsidenlinie des Exzenters aus der Punkt Z auf den Epizykel projiziert wird. Dieser Punkt Q hat vom Exzentermittelpunkt C aus die Entfernung $2e$ in Richtung auf das Perigäum des Exzenters, so daß die Strecke CQ durch den Erdort E halbiert wird.

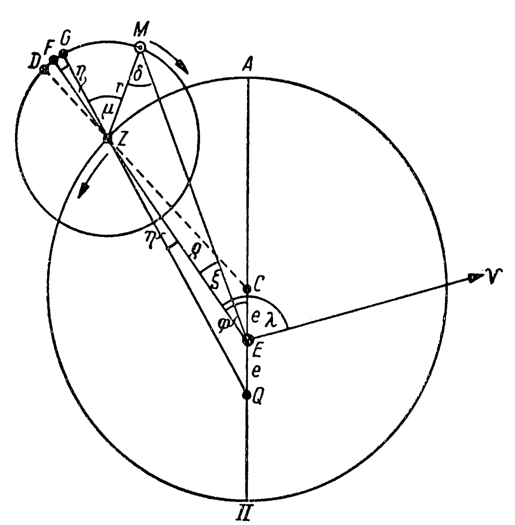


Abb. 8. Drehpunkt der Apsidenlinie des Mondbahnepizykels.

Durch diese Festlegung des Punktes Q, den man auch als den „Drehpunkt der Apsidenlinie des Epizykels" bezeichnen kann, ist nun auch der theoretische Mondort für beliebige Zeiten bekannt. Die der Zeit proportional wachsende mittlere Länge des Mondes

$$\lambda = \lambda_0 + n_t(t - t_0)$$

(λ_0 = mittlere Länge zur Epoche t_0) liefert die Richtung EZ vom Erdmittelpunkt nach dem Mittelpunkt des Epizykels. Die Richtung EA nach dem Apo-

gäum des Exzenters wird erhalten, indem man den ebenfalls mit der Zeit gleichmäßig wachsenden Winkel

$$\varphi = 2n_s(t - t_s) = \varphi_0 + 2n_s(t - t_0)$$

(n_s = mittlere tägliche synodische Bewegung des Mondes, t_s = Zeit der letzten Konjunktion in Länge zwischen der mittleren Sonne und dem mittleren Mond) in rückläufigem Sinne von EZ aus abträgt. Mit der Exzentrizität e lassen sich dann die Punkte C und Q auf dieser Richtung abtragen. C ist der Mittelpunkt des Exzenters, dessen Halbmesser gleich der Einheit gesetzt werde; der Leitstrahl QZ definiert auf dem äußeren Bogen des um Z mit r als Halbmesser beschriebenen Epizykels das wahre Apogäum G. Von ZG aus wird dann, wiederum in rückläufigem Sinn, die mittlere Anomalie

$$\mu = n_a(t - t_a) = \mu_0 + n_a(t - t_0)$$

(t_a = Zeit des letzten wahren Apogäums) auf dem Epizykel abgetragen. Damit ist der Mondort gefunden. Die Differenz zwischen der wahren und der mittleren Länge des Mondes ist der Winkel $ZEM = \zeta$, ihn gilt es aus den unmittelbar gegebenen Größen (e, r, φ, μ), von denen er offenbar allein abhängt, abzuleiten, was folgendermaßen geschieht:

Die Entfernung ϱ des Epizykelmittelpunkts von der Erde ist eine Funktion von φ allein. Im Dreieck ECZ ist nämlich

$$\varrho = e \cos \varphi + \cos \psi; \quad \sin \psi = e \sin \varphi. \tag{I; 7}$$

Auch der Winkel $EZQ = \eta$ hängt nur von φ ab, denn es gilt im Dreieck EZQ

$$\varrho \sin \eta = e \sin (\varphi - \eta) = e (\sin \varphi \cos \eta - \cos \varphi \sin \eta),$$

also

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\frac{e}{\varrho} \sin \varphi}{1 + \frac{e}{\varrho} \cos \varphi}. \tag{I; 8}$$

Die gesuchte Größe ζ (Elongation vom Epizykelmittelpunkt) berechnet man dann leicht aus dem Dreieck ZEM, in dem der Winkel $ZME = \delta = \mu + \eta - \zeta$ ist. Nach dem Sinussatz ergibt sich

$$\varrho \sin \zeta = r \sin \delta = r [\sin (\mu + \eta) \cos \zeta - \cos (\mu + \eta) \sin \zeta],$$

woraus

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\frac{r}{\varrho} \sin (\mu + \eta)}{1 + \frac{r}{\varrho} \cos (\mu + \eta)} \tag{I; 9}$$

folgt. Die wahre Länge des Mondes in der Bahn ist dann

$$L = \lambda - \zeta. \tag{I; 10}$$

7. *Vergleich der Mondtheorie des* Ptolemäus *mit der modernen*

Es ist recht aufschlußreich und trägt viel zum Verständnis dieser auf den ersten Blick recht künstlich anmutenden Konstruktion bei, wenn man ihre Ergebnisse denjenigen der modernen Himmelsmechanik gegenüberstellt. Insbesondere wird es auf diese Weise gelingen zu zeigen, daß die Einführung des Drehpunktes der Epizykelapsiden gerade an der Stelle Q notwendig war, wenn man der besonderen Erscheinungsform der Evektion gerecht werden will.

In der modernen Theorie der Mondbewegung wird die wahre Länge des Mondes durch eine Reihe mit sehr vielen periodischen Gliedern dargestellt. Hier dürfen wir uns auf diejenigen beschränken, deren Amplituden besonders groß sind. Diese Glieder sind daher auch schon lange bekannt und führen meist besondere Bezeichnungen, die sie aus der Menge der übrigen hervorheben. Wenn wir nur diese Glieder berücksichtigen, so lautet die Formel für die wahre Mondlänge

$$
\begin{aligned}
l = \lambda &+ 377'.3 \sin g + 12'.8 \sin 2g + \cdots && \text{(Mittelpunktsgleichung)}\\
&+ 76'.4 \sin(2D - g) && \text{(Evektion)}\\
&- 2'.0 \sin D && \text{(parallaktische Gleichung)}\\
&+ 39'.5 \sin 2D && \text{(Variation)}\\
&+ 11'.2 \sin g' && \text{(jährliche Gleichung)}\\
&- 6'.9 \sin 2(l - \Omega) && \text{(Reduktion auf die Ekliptik)}\\
&+ \cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{I; 11}
$$

Hierbei bedeutet, wie schon in Abschn. 6 (Abb. 6), D das Argument des synodischen Mondumlaufs (das mittlere Mondalter), g die in der modernen Astronomie vom *Perigäum* aus gerechnete mittlere Anomalie des Mondes, g' die der Sonne, λ wie bisher die mittlere Länge, l die wahre Länge des Mondes und Ω die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn. Die *Reduktion auf die Ekliptik* haben wir bereits in Abschn. 5 abgeleitet. Die *Variation* und die *jährliche Gleichung*, die an Amplitudenbetrag gleich hinter den beiden großen schon den Alten bekannten periodischen Ungleichheiten, der *Mittelpunktsgleichung* und der *Evektion*, rangieren, sind von Tycho Brahe entdeckt worden.

Setzen wir anstatt der Länge in der Bahn (L), deren Berechnung in der alten Theorie nach den Formeln (I; 7–10) vor sich ging, die Länge in der Ekliptik, so ist, bis auf zu vernachlässigende Glieder höherer Ordnung,

$$l = \lambda - \zeta - 6'.9 \sin 2(l - \Omega).$$

Da wir das 1. und 3. Glied der rechten Seite auch in der modernen Theorie antreffen, so kommt es nur noch darauf an, die Größe ζ in eine trigonometrische Reihe zu entwickeln und die Amplituden ihrer Glieder mit denen von (I; 11) zu vergleichen. ζ ist eine periodische Funktion der beiden gleichmäßig mit der Zeit fortschreitenden Winkelargumente μ und φ. Diese Argumente kommen nach (I; 9) nur in den beiden Kombinationen

$$\frac{r}{\varrho}\cos(\mu + \eta) \quad \text{und} \quad \frac{r}{\varrho}\sin(\mu + \eta)$$

vor, wobei ϱ und η Funktionen von φ allein sind. Setzt man für den Augenblick

$$\mu + \eta = \gamma; \quad \frac{r}{\varrho} = k,$$

so erscheint (I; 9) in der Form

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{k \sin \gamma}{1 + k \cos \gamma}.$$

Setzt man hierin

$$\sin \gamma = \frac{e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}}{2i}; \quad \cos \gamma = \frac{e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}}{2}; \quad \operatorname{tg} \zeta = \frac{1}{i} \frac{e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}}{e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}},$$

so erhält man, wenn man links mit $e^{i\zeta}$ erweitert,

$$\frac{e^{2i\zeta} - 1}{e^{2i\zeta} + 1} = k \frac{e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}}{2 + k(e^{i\gamma} + e^{-i\gamma})}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$e^{2i\zeta} = \frac{1 + k e^{i\gamma}}{1 - k e^{-i\gamma}}.$$

Durch Logarithmieren ergibt sich dann

$$2i\zeta = \ln(1 + k e^{i\gamma}) - \ln(1 - k e^{-i\gamma}).$$

Aus der Funktionentheorie ist bekannt, daß die Reihe

$$\ln(1 + z) = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 + \cdots$$

konvergiert, wenn die komplexe Zahl z innerhalb des Einheitskreises der komplexen Ebene liegt. Das trifft für $z = k e^{\pm i\gamma}$ zu, da $r = 0.1055$, $\varrho \geqq 1 - e = 0.7906$, mithin

$$|z| = k \leqq 0.1334.$$

Wir dürfen also setzen

$$2i\zeta = k e^{i\gamma} - \frac{1}{2} k^2 e^{2i\gamma} + \frac{1}{3} k^3 e^{3i\gamma} - \cdots$$

$$- k e^{-i\gamma} + \frac{1}{2} k^2 e^{-2i\gamma} - \frac{1}{3} k^3 e^{-3i\gamma} + \cdots$$

oder

$$\zeta = k \sin \gamma - \frac{1}{2} k^2 \sin 2\gamma + \frac{1}{3} k^3 \sin 3\gamma - \cdots. \tag{I; 12}$$

Von dieser Entwicklung darf man unbedenklich alle Glieder von der 3. Ordnung an vernachlässigen. Da $k = r/\varrho$ von der Größenordnung 0.1 ist, wird die Amplitude des Gliedes 3. Ordnung im Mittel etwa $^1/_{3000}$, d.h. im Winkelmaß

rund 1 Bogenminute betragen, also um eine Größenordnung kleiner sein als die mutmaßliche Ausdehnung des Unsicherheitsbereichs der antiken Beobachtungen. Man erhält somit

$$\zeta = \frac{r}{\varrho}\sin(\mu+\eta) - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 \sin 2(\mu+\eta) + \cdots =$$

(I; 13)
$$= \frac{r}{\varrho}(\sin\mu\cos\eta + \cos\mu\sin\eta) -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 [\sin 2\mu\cos 2\eta + \cos 2\mu \sin 2\eta] + \cdots,$$

und es handelt sich jetzt nur noch darum, die Abhängigkeit der Größen ϱ und η von φ zum Ausdruck zu bringen. Ein Vergleich der Formeln (I; 8, 9) zeigt, daß η mit e/ϱ und φ in gleicher Weise zusammenhängt wie ζ mit r/ϱ und $\mu+\eta$. Die Entwicklung von $\eta(\varphi)$ läßt sich daher ebenfalls nach dem Muster (I; 12) durchführen, und man erhält

(I; 14)
$$\eta = \frac{e}{\varrho}\sin\varphi - \frac{1}{2}\left(\frac{e}{\varrho}\right)^2 \sin 2\varphi + \cdots,$$

ferner aus (I; 7)

(I; 15)
$$\varrho = e\cos\varphi + \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{e^2}{4} + e\cos\varphi + \frac{e^2}{4}\cos 2\varphi + \cdots$$

bis zu Gliedern 2. Ordnung in e. Wegen der verhältnismäßig großen Exzentrizität des Exzenters (e ist ja von der Größenordnung 0.2) würde eine auf vier Stellen genaue Entwicklung der von φ abhängigen Terme

$$\frac{r}{\varrho}\cos\eta,\quad \frac{r}{\varrho}\sin\eta,\quad \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2\cos 2\eta,\quad \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 \sin 2\eta,\ \cdots$$

in (I; 13) die Mitnahme ziemlich vieler Glieder erfordern. Um einen ersten Überblick zu gewinnen, genügt es aber, wenn wir diese Entwicklung nur bis zur 2. Ordnung in r und e durchführen. Es wird dann

(I; 16)
$$\zeta = \frac{r}{\varrho}\sin\mu + \frac{r}{\varrho}\eta\cos\mu - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 \sin 2\mu - \cdots,$$

und es ist

$$\frac{1}{\varrho} = 1 - e\cos\varphi + \cdots;\quad \eta = e\sin\varphi + \cdots$$

zu setzen. Man erhält dann

$$\zeta = r(1 - e\cos\varphi)\sin\mu + re\sin\varphi\cos\mu - \frac{r^2}{2}\sin 2\mu + \cdots =$$

(I; 17)
$$= r\sin\mu - \frac{r^2}{2}\sin 2\mu + re\sin(\varphi-\mu) + \cdots.$$

Nun ist φ die doppelte Differenz der mittleren Längen von Mond und Sonne, die wir mit $2D$ bezeichnet hatten. Ferner bedeutet μ die mittlere Anomalie des Mondes vom Apogäum aus, während das in (I; 11) benutzte Argument g dieselbe, aber vom Perigäum aus gezählte Größe bedeutet, so daß also $\mu = g + 180°$ ist. (I; 17) läßt sich daher auch in der Form

$$\zeta = -r \sin g - \frac{r^2}{2} \sin 2g - re \sin (2D - g) - \cdots$$

schreiben, und es ist daher

$$L = \lambda + r \sin g + \frac{r^2}{2} \sin 2g + re \sin (2D - g) + \cdots.$$

Als Hauptglieder der Entwicklung der Mondlänge in der Theorie des Ptolemäus erscheinen daher die Mittelpunktsgleichung und ihre erste Oberschwingung sowie die Evektion. Die genäherten, bis zur 2. Ordnung in e genauen Werte der Amplituden dieser Terme sind dann

$$r = 0.1055 = 362'.7 \quad \text{(moderner Wert } 377'.3\text{)},$$

$$\frac{1}{2} r^2 = 0.00556 = 19'.1 \quad \text{(moderner Wert } 12'.8\text{)},$$

$$re = 0.02209 = 75'.9 \quad \text{(moderner Wert } 76'.5\text{)},$$

geben also die Erscheinung größenordnungsmäßig richtig wieder. Die verhältnismäßig große Diskrepanz zwischen den Amplituden der Mittelpunktsgleichung liegt natürlich zum größten Teil an der Vernachlässigung der höheren Entwicklungsglieder – tatsächlich verbessert sich dieser Wert schon bei Berücksichtigung des nächst höheren, $\sin g$ enthaltenden Gliedes um 3% auf rund 374'.

Bemerkenswert ist, wie schon angedeutet, daß das Evektionsglied gerade durch die besondere Wahl des Apsidendrehpunktes Q in der richtigen Form erhalten wird. Läge nämlich Q nicht in der Entfernung e vom Erdmittelpunkt, sondern in einer anderen Entfernung f, so hätte man, in der gleichen Näherung wie oben,

$$\eta = f \sin \varphi$$

zu setzen. Die Vereinigung der Glieder $rf \sin \varphi \cos \mu$ und $-re \cos \varphi \sin \mu$, die dann in (I; 17) auftreten würden, ergäbe den Ausdruck

$$r \frac{e+f}{2} \sin (\varphi - \mu) - r \frac{e-f}{2} \sin (\varphi + \mu),$$

d.h., außer dem Evektionsglied mit dem Argument $\varphi - \mu$ würde noch ein weiteres Glied mit dem Argument $\varphi + \mu$ bzw. $2D + g$ auftreten, dessen Amplitude nur verschwindet, wenn $f = e$ ist. Nun gibt es in der modernen Mondtheorie tatsächlich einen periodischen Term dieser Art, dessen Amplitude mit 3'.2 aber so klein ist, daß sein Fehlen in der antiken Theorie nicht verwundern darf.

Die Theorie der Evektion ist zweifellos eine der größten Leistungen des Ptolemäus, die um so mehr hervorgehoben werden muß, als der Weg, der zu ihr führte, nicht von gesichertem Standpunkt aus klar vor ihm gelegen hat, sondern durch Irrtümer und vorgefaßte Meinungen verschleiert war. Es darf nicht übersehen werden, daß die Mondtheorie des Ptolemäus, wenn man sie konsequent zu Ende denkt, zu Folgerungen führt, die sich mit den Beobachtungen keineswegs decken. Während die Darstellung der Mondlängen durch die Theorie einigermaßen gelungen ist, erweisen sich alle Schlüsse, die man aus dieser Theorie auf die *Entfernung* des Mondes ziehen könnte, als unverträglich mit den beobachtbaren Tatsachen. Aus Abb. 7 erkennt man, daß – in Einheiten des Exzenterhalbmessers – die maximale Mondentfernung (in den Syzygien, wenn gleichzeitig der Mond im Apogäum steht) $1 + e + r = 1.3149$, die minimale dagegen (in den Quadraturen, wenn gleichzeitig der Mond im Perigäum steht) $1 - e - r = 0.6851$ betragen müßte. Beide Entfernungen verhalten sich demnach wie 1.92 : 1. Der Mond würde also in der größten Erdnähe auch einen fast doppelt so großen scheinbaren Durchmesser zeigen als in der größten Erdferne; ein Umstand, der dem Ptolemäus keineswegs hätte entgehen können, wenn er ihn in Erwägung gezogen hätte, und der ihm gezeigt haben würde, daß seine Theorie keine andere Realität in Anspruch nehmen kann, als die eines Rechenschemas zur Berechnung der Bewegung des Mondes in seiner scheinbaren Bahn.

8. *Allgemeines über die Theorie der Planetenbewegung*

Der Theorie der fünf eigentlichen Planeten hat Ptolemäus die letzten fünf Bücher des „Almagest" gewidmet. Sie ist, wie die des Mondes, im wesentlichen sein eigenes Werk, und zwar trotz mancher Irrtümer, die ihm den Weg zur Vertiefung seiner Erkenntnisse verbauten, sicherlich sein bestes. Denn nirgends ist er, wie hier, jener grundsätzlichen Lösung des Problems der Himmelsbewegungen so nahe gekommen, die fast anderthalb Jahrtausende nach ihm von Kepler gefunden wurde. Damit ist nicht das heliozentrische System gemeint, das (wie schon in Abschn. 1 erwähnt) für den Aufbau eines geometrisch-kinematischen Modells der Planetenbahnen nicht von ausschlaggebender Bedeutung ist, sondern vielmehr der Übergang von den gleichmäßig-kreisförmigen Bewegungen der antiken Astronomie zu den ungleichförmig durchlaufenen Ellipsen der Keplerschen Gesetze. Nicht daß Ptolemäus, der noch grundsätzlich an dem Prinzip der gleichmäßigen Kreisbewegungen festhielt, diesen Übergang bereits gesehen oder auch nur geahnt hätte; aber seine theoretische Geschicklichkeit, die mitunter vom Hauch des Genialen gestreift wird, führte ihn doch bis an jenen Punkt, von dem aus nur ein kleiner Schritt genügt hätte, um ihm den Ausblick auf die richtige Lösung zu eröffnen. Schon der nächste Abschnitt wird das zeigen.

Wie die Mondbahn, so lassen sich auch die Bahnen der Planeten durch zwei Ungleichheiten beschreiben, von denen die eine wieder durch einen exzentrischen Kreis, die andere durch einen Epizykel dargestellt wird. Anders als beim Mond bietet sich die Entscheidung darüber, welche der beiden perio-

dischen Bewegungen durch das eine oder das andere dieser mathematischen Hilfsmittel beschrieben werden soll, durch die Form der scheinbaren Planetenbahnen von selbst dar. Die Planetenbewegung erfolgt im allgemeinen *rechtläufig*, d. h. im gleichen Sinne wie die Bewegung von Sonne und Mond; sie wird aber in periodisch wiederkehrenden zeitlichen Abständen für eine Weile *rückläufig*. Das läßt die Annahme gerechtfertigt erscheinen, daß der Planet sich rechtläufig auf einem Epizykel bewegt, dessen Mittelpunkt ebenfalls rechtläufig auf einem Kreis, dem Deferenten, um die Erde herumgeführt wird. Die Möglichkeit der mathematischen Beschreibung der Planetenbewegung in Länge auf diese Art hatte schon APOLLONIUS fast 400 Jahre vor PTOLEMÄUS gelehrt. PTOLEMÄUS zeigte, daß die scheinbare, d. h. von der Erde aus gesehene, Bewegung des Epizykelmittelpunkts nicht gleichförmig ist, sondern, ähnlich wie die Bahngeschwindigkeit der Sonne, von der Länge abhängt. Diese zweite Ungleichförmigkeit kann dadurch erklärt werden, daß der Deferent ein exzentrischer Kreis ist, sein Mittelpunkt also nicht mit dem Mittelpunkt der Erde zusammenfällt. Diese Hypothese wird dadurch bestätigt, daß die scheinbare Größe des Epizykels schwankt und ein Maximum im Perigäum, ein Minimum im Apogäum des Exzenters annimmt.

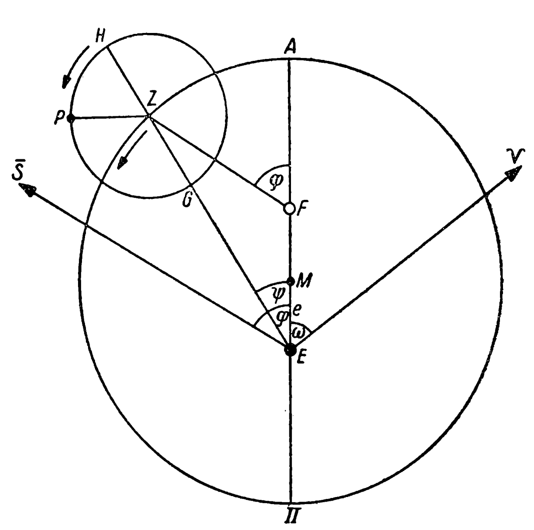


Abb. 9. Bewegung der inneren Planeten.

Die Bewegung des Planeten im Epizykel erfolgt, vom Epizykelmittelpunkt aus gesehen, gleichförmig. Die Bewegung des Epizykelmittelpunktes dagegen erweist sich, den Beobachtungen zufolge, als ungleichförmig, sowohl von der Erde aus gesehen als auch vom Mittelpunkt des Deferenten aus. Sie erscheint aber gleichmäßig, wenn man sie von einem noch zu bestimmenden Punkte der Apsidenlinie des Deferenten, dem *punctum aequans*, aus betrachtet. Das punctum aequans (F in Abb. 9 und 10) kann also als Drehpunkt eines Leitstrahls angesehen werden, der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht und dabei den Epizykelmittelpunkt auf dem Exzenter herumführt. Die Bewegung des Planeten läßt sich daher auf Grundlage dieses Mechanismus durch zwei sich überlagernde gleichförmig-periodische Bewegungen darstellen: Die *mittlere Bewegung in Länge*, die durch die Drehung des Leitstrahls um das punctum aequans erzeugt wird, und die *Bewegung in Anomalie*, die dem Umlauf des Planeten auf dem Epizykel entspricht.

Die Perioden dieser beiden gleichförmigen Kreisbewegungen leitete PTOLE-

MÄUS direkt aus den Daten ab, die ihm aus genügend weit zurückliegenden Beobachtungen zur Verfügung standen. Die Periode der mittleren Bewegung in Länge, also die Umdrehungszeit des Leitstrahls in bezug auf den Frühlingspunkt, ist gleich der mittleren tropischen Umlaufszeit des Planeten durch die Tierkreiszone. PTOLEMÄUS findet hierfür bei *Merkur* und *Venus* genau ein tropisches Jahr, was schon aus der Tatsache folgt, daß diese beiden Planeten sich ständig in der näheren Umgebung der Sonne aufhalten; sie müssen daher auch die gleiche mittlere Geschwindigkeit haben wie diese. Für *Mars* und *Jupiter* errechnet er die Perioden 1^a322^d bzw. 11^a313^d, die mit den modernen Werten bis auf Tagesbruchteile übereinstimmen. Für *Saturn* erhält er 29^a158^d, einen Wert, der gegen den modernen um rund 3^d zu groß ist.

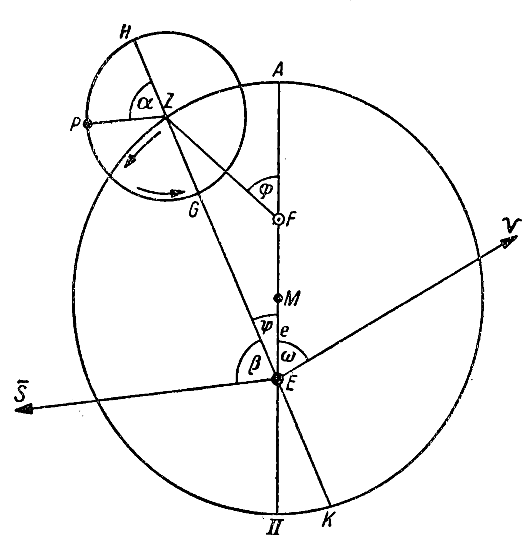


Abb. 10. Bewegung der äußeren Planeten.

Die Periode der Bewegung in Anomalie, also die Umlaufszeit im Epizykel in bezug auf dessen Apogäum, ist offenbar identisch mit dem mittleren Zeitraum, in dem die Erscheinung der Rückläufigkeit wiederkehrt. Daß diese Periode bei allen Planeten aufs engste mit dem Lauf der Sonne gekoppelt ist, war den Alten wohlbekannt, ebenfalls, daß diese Koppelung bei Merkur und Venus eine andere Form hat als bei den drei „äußeren" Planeten. Im Almagest finden wir diese Zusammenhänge durch folgende Sätze festgelegt:

1. Bei den *inneren Planeten* (Merkur und Venus) ist die mittlere Länge des Epizykelmittelpunkts stets gleich der mittleren Länge der Sonne. Das bedeutet also, daß die Leitstrahlen, die die Epizykelmittelpunkte dieser beiden Planeten auf ihren Exzentern herumführen, stets dem Leitstrahl der mittleren Sonne parallel sind (Abb. 9).

2. Bei den *äußeren Planeten* (Mars, Jupiter, Saturn) ist der Leitstrahl, der den Planeten auf dem Epizykel herumführt, dem Leitstrahl der mittleren Sonne stets parallel. Wenn also (Abb. 10) E die Erde, Z den Epizykelmittelpunkt und P den Ort des Planeten bedeutet, und wenn ferner $E\bar{S}$ die Richtung nach der mittleren Sonne angibt, so ist ZP immer parallel $E\bar{S}$ und daher $\alpha = \beta$. Hieraus aber folgt weiter:

a) Der Planet erreicht das Apogäum H des Epizykels, wenn $\alpha = \beta = 0$ ist, der Planet also mit der mittleren Sonne in Konjunktion steht.

b) Der Planet erreicht das Perigäum G des Epizykels, wenn $\alpha = \beta = 180°$ ist; er steht dann zur mittleren Sonne in Opposition und befindet sich gleichzeitig in der Mitte seiner Rückläufigkeitsstrecke.

c) Ist die Umlaufszeit von Z auf dem Exzenter gegeben, so ist damit auch die Umlaufszeit des Planeten auf dem Epizykel bekannt. Diese ist offenbar mit der *synodischen Umlaufszeit* des Planeten, d.h. also mit der mittleren Dauer der Zwischenzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen (oder Oppositionen) des Planeten in bezug auf die Sonne identisch.

Zwischen der synodischen Umlaufszeit S, der tropischen Umlaufszeit U des Planeten und dem tropischen Sonnenjahr T gilt die Beziehung

(I; 18) $$S = \frac{UT}{|U - T|},$$

die der für die entsprechenden Perioden des Mondes gültigen Formel (I; 3) äquivalent ist. Ptolemäus findet für die Perioden in Anomalie, also die synodischen Umlaufszeiten der fünf Planeten folgende Werte, die, von hier nicht wiedergegebenen Tagesbruchteilen abgesehen, mit den modernen übereinstimmen:

Merkur	116^d	Mars	$2^a\ 50^d$
Venus	584^d	Jupiter	$1^a\ 34^d$
		Saturn	$1^a\ 13^d$.

Aus den Perioden folgen die mittleren täglichen Bewegungen in Länge (n_t) und in Anomalie (n_a), die nach Ptolemäus und nach modernen Bestimmungen (Newcomb 1900) die nachfolgenden Zahlenwerte ergeben:

Planet	n_t (Ptolemäus)	n_t (Newcomb)	n_a (Ptolemäus)	n_a (Newcomb)
Merkur	3548″29	3548″33	11184″12	11184″23
Venus	3548.29	3548.33	2219.43	2219.48
Mars	1886″61	1886″66	1661″67	1661″67
Jupiter	299.24	229.27	3249.05	3249.06
Saturn	120.56	120.60	3427.73	3427.73

Bei den mittleren Bewegungen in Länge fällt auf, daß die antiken Werte systematisch um 0″03 bis 0″05 (im Mittel 0″04) unter den modernen liegen. Das rührt davon her, daß Ptolemäus bei der Reduktion der Beobachtungen, die sich über mehrere Jahrhunderte erstreckten, einen falschen Wert der Präzession benutzt und daher den Anfangspunkt der Längenzählung, den Frühlingspunkt, falsch angesetzt hat. Seine Präzession (36″ jährlich) beträgt täglich 0″10, während der richtige Wert (50″ jährlich) 0″14 ergibt, so daß also alle seine mittleren täglichen Bewegungen in Länge um 0″04 zu klein ausfallen. Von diesem systematischen Fehler abgesehen, sind also sämtliche n_t-Werte bis auf eine Hundertstel-Bogensekunde genau. Die n_t für die inneren Planeten entsprechen

natürlich der mittleren täglichen Bewegung der Sonne ($n_\odot$); für die äußeren Planeten besteht die Beziehung

$$n_t + n_a = n_\odot,$$

die aus (I; 18) hervorgeht, wenn man

$$n_t = \frac{2\pi}{U}; \quad n_a = \frac{2\pi}{S}; \quad n_\odot = \frac{2\pi}{T} = 3548''.29 \quad (3548''.33)$$

setzt. Die von PTOLEMÄUS abgeleiteten Perioden sind erstaunlich genau, wenn man bedenkt, daß ein Fehler von 0''.01 täglich in hundert Jahren auf nur etwa 6 Bogenminuten anwächst, einen Betrag, der sicher noch innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der primitiven antiken Beobachtungsmethoden liegt. Nur in den anomalistischen Bewegungen des Planeten Merkur ist der Fehler etwas größer, entsprechend den großen Schwierigkeiten, die bei der Beobachtung dieses sonnennahen Planeten obwalten.

Die Theorie der Planetenbewegung ist von PTOLEMÄUS zunächst, ebenso wie die des Mondes, unter der vereinfachenden Annahme durchgeführt worden, daß die Bahnebenen in der Ekliptik liegen. Zur Erklärung der scheinbaren Bewegung der Planeten in Breite, d.h. der nördlichen und südlichen Abweichungen der Planetenörter von der Ekliptik, nimmt PTOLEMÄUS Neigungen der Ebenen des Exzenters bzw. des Epizykels gegen die Ekliptik an. Den Einfluß dieser Bahnneigungen auf die Bewegungen in Länge hält er durchweg für unmerklich. Wir wissen von der Mondtheorie her, daß dies streng genommen nicht der Fall ist; da die Neigungen der Planetenbahnebenen aber (abgesehen von der des Merkur) kleiner sind als die der Mondbahn, ist die Vernachlässigung der „Reduktion auf die Ekliptik" hier noch weniger fühlbar als dort. Auf die Wiedergabe der Methoden der Neigungsbestimmung, die im letzten Buch des Almagest beschrieben werden, kann hier verzichtet werden, da sie von sekundärem Interesse sind.

9. *Theorie und Bahnbestimmung der Venus*

PTOLEMÄUS beginnt seine Darlegungen über die Bewegung der einzelnen Planeten mit der Theorie des Merkur. Wir wollen, abweichend von dieser Reihenfolge, den Vorrang der Venus geben, deren Bahnform auch für die drei äußeren Planeten als Vorbild gedient hat, während Merkur infolge besonderer Umstände eine abweichende Behandlung erforderte.

Bei der Bahnbestimmung der Venus konnte sich PTOLEMÄUS auf Beobachtungen des Planeten in seinen größten Elongationen von der Sonne stützen. In Abb. 9 sei $A\Pi$ die Apsidenlinie des Exzenters. Auf ihr liegen das Apogäum A, das Perigäum Π, der Exzentermittelpunkt M, die Erde E und an noch genauer zu bestimmender Stelle das punctum aequans F. Zu einer bestimmten Zeit möge der Mittelpunkt des Epizykels den Ort Z einnehmen und damit den geozentrischen Winkelabstand ψ östlich vom Apogäum haben. Die entsprechende

vom punctum aequans aus gesehene Distanz wird durch den Winkel φ dargestellt, der – entsprechend der Definition des punctum aequans – der Zeit proportional wächst. Ist ω die *Länge des Apogäums des Exzenters*, so ist $\omega + \varphi$ die *mittlere Länge des Epizykelmittelpunktes*, die nach Satz 1 des vorigen Ab-

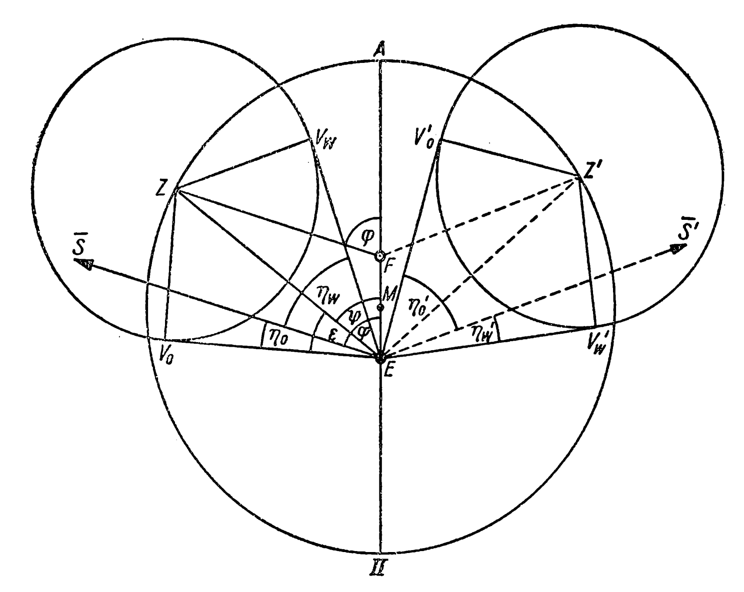


Abb. 11. Bestimmung der Elemente der Venusbahn aus größten Elongationen.

schnitts gleich der mittleren Länge der Sonne ist. Zieht man also durch E eine Parallele zu dem Leitstrahl FZ, so zeigt dieser nach dem Ort der mittleren Sonne $(\overline{S})$ in der Ekliptik.

Die Aufgabe, Lage des Apogäums, Exzentrizität des Exzenters und Halbmesser des Epizykels (ausgedrückt in Einheiten des Exzenterhalbmessers) zu bestimmen, kann gelöst werden, wenn es gelingt, in verschiedenen Positionen des Epizykels seine scheinbare (d.h. von der Erde aus gesehene) Größe zu messen. Ist (Abb. 11) V_0 der Ort des Planeten in einer seiner größten östlichen Elongationen vom Epizykelmittelpunkt, so ist $E V_0$ die von der Erde aus an den Epizykel gelegte Tangente und der Winkel $Z E V_0 = \varepsilon$ der scheinbare Halbmesser des Epizykels. Dieser Winkel ist nicht direkt meßbar. Dagegen ist die Richtung $E\overline{S}$ nach der mittleren Sonne aus der Sonnentheorie bekannt. Dieser Strahl bildet mit $E V_0$ den Winkel η_0 und mit der anderen Tangente $E V_w$ (Venus in der größten westlichen Elongation bei gleicher Position des Epizykels) den Winkel η_w, und es ist dann

$$\eta_0 + \eta_w = 2\varepsilon.$$

Ptolemäus bezeichnet die Winkel η_o und η_w als größte östliche und westliche Elongation des Planeten von der mittleren Sonne und bestimmt sie, indem er, den Lauf des Planeten verfolgend, das Maximum der scheinbaren Längendifferenz zwischen Planet und mittlerer Sonne feststellt. Die Ermittlung der Lage der Apsidenlinie, d.h. die Länge des Apogäums des Exzenters, beruht dann auf folgender Überlegung: Es sei festgestellt worden, daß bei der Stellung $\bar{S}$ der mittleren Sonne der Planet seine größte östliche Elongation mit dem Betrage η_o erreichte und daß bei einer anderen Stellung $\bar{S}'$ der mittleren Sonne der Planet in V'_w eine größte westliche Elongation von gleichem Betrage ($\eta'_w = \eta_o$) zeige. Das ist aus Symmetriegründen nur möglich, wenn die Apsidenlinie $A\Pi$ den Winkel zwischen EV_o und EV'_w halbiert. Ptolemäus findet unter seinen Beobachtungen folgendes Paar derartiger Elongationen:

132 März 7, 7^h	abends:	Länge der Venus	31° 30′
		Länge der mittleren Sonne	344 15
	somit:	gr. östliche Elongation	47 15
140 Juli 30, 4^h 30 früh:		Länge der Venus	78° 30′
		Länge der mittleren Sonne	125 45
	somit:	gr. westliche Elongation	47 15

Die Länge der Apsiden liegt demnach bei $\frac{1}{2}(31{,}^\circ5 + 78{,}^\circ5) = 55°$ bzw. $235°$.

Die Entscheidung darüber, welcher der beiden einander gegenüberliegenden Ekliptikpunkte (55° und 235°) als Apogäum und welcher als Perigäum anzusehen ist, ferner die Berechnung der Exzentrizität e des Exzenters und des Halbmessers r des Epizykels in Einheiten des Exzenterhalbmessers, folgen dann aus der Analyse solcher Elongationen, bei welchen die mittlere Sonne und damit auch der Epizykelmittelpunkt in den Apsiden oder wenigstens in deren unmittelbarer Nähe stehen. Diese Bedingungen erfüllt folgendes Paar von Elongationen:

129 Mai 20, 5^h früh:		Länge der Venus	10° 36′
		Länge der mittleren Sonne	55 24
	somit:	gr. westliche Elongation	44 48
136 Nov. 18	abends:	Länge der Venus	282° 50′
		Länge der mittleren Sonne	235 30
	somit:	gr. östliche Elongation	47 20

Der Epizykelhalbmesser erscheint also in der letzteren Position um 2° 32′ größer als in der ersteren; mithin liegt das Apogäum des Exzenters in 55°, das Perigäum in 235° Länge.

Exzentrizität und Epizykelhalbmesser bestimmen sich dann nach der gleichen Methode wie beim Mond (Abb. 7), wobei

$$\eta_a = 44°\,48'; \quad \eta_p = 47°\,20'$$

zu setzen ist. Die einfache Rechnung ergibt dann

$$r = 0.7196; \quad e = 0.02131.$$

PTOLEMÄUS erhält bei geringerer Rechengenauigkeit die hiermit nahe übereinstimmenden Werte $r = 0.719$ und $e = 0.0208$ bzw., wenn man eine letzte Abrundung vermeidet, die er vor Errechnung des Endresultats noch vorgenommen hat, $e = 0.0211$.

Nachdem diese Konstanten festliegen, kann auch die wichtige Frage nach der Lage des *punctum aequans* auf der Apsidenlinie beantwortet werden, und zwar mit Hilfe von Elongationspaaren, bei welchen der Fahrstrahl des Epizykelmittelpunktes mit der Apsidenlinie einen rechten Winkel bildet. Abb. 12 stellt einen solchen Fall dar, und PTOLEMÄUS beobachtete folgende Elongationen, die ihm entsprechen:

134 Febr. 18, 6^h	früh:	Länge der Venus	281° 55′
		Länge der mittleren Sonne	325 30
	somit:	gr. westliche Elongation	43 35
140 Febr. 18, $5^h 30^m$	abends:	Länge der Venus	13° 50′
		Länge der mittleren Sonne	325 30
	somit:	gr. östliche Elongation	48 20

Der Ort der mittleren Sonne ist beide Male der gleiche und vom Apogäum des Exzenters (55°) um $\varphi = 89° 30'$ nach Westen entfernt. Dieser Winkel gibt gleichzeitig die Richtung des Fahrstrahls FZ in bezug auf die Richtung nach dem Apogäum an. Die geozentrische Länge des Epizykelmittelpunktes ist gleich dem arithmetischen Mittel der beiden beobachteten Planetenlängen, also 327° 52′.5. Der geozentrische Winkelabstand des Epizykelmittelpunktes vom Apogäum nach Westen ist demnach $\psi = 87° 7'.5$.

In Anbetracht der Kleinheit der Exzentrizität begehen wir keinen merklichen Fehler, wenn wir φ auf volle 90° abrunden, dafür aber auch dem Winkel ψ eine Korrektion von 30′ hinzufügen. Wir setzen also

$$\varphi = 90°; \quad \psi = 87° 37'.5.$$

Im Dreieck EMZ ist dann nach dem Sinussatz, wenn wir $MZ = 1$ setzen,

$$\sin \zeta = e \sin \psi.$$

Mit dem früher gefundenen $e = 0.02131$ erhalten wir dann $\zeta = 1° 13'.2$ und somit für den Kathetenwinkel $\chi = \psi + \zeta$ des rechtwinkligen Dreiecks FMZ 88° 50′.7. Der Abstand $FM = f$ des punctum aequans vom Exzentermittelpunkt ist dann

$$f = \cos \chi = 0.02013.$$

Es ist also, weit innerhalb der durch die Unsicherheit der Beobachtungsdaten gewährleisteten Grenzen, $f = e$. PTOLEMÄUS faßt dieses wichtige Ergebnis in den Satz zusammen: *Der Mittelpunkt des exzentrischen Kreises halbiert die Strecke zwischen der Erde und dem punctum aequans.* Dieser Satz gewinnt an

Gewicht dadurch, daß PTOLEMÄUS ihn auch für die drei äußeren Planeten unverändert übernehmen konnte, ohne damit in Widerspruch mit der Erfahrung zu geraten. Nur beim Planeten Merkur gelangte er zu abweichenden Ergebnissen.

Für uns, die wir über die Vorgänge im Planetensystem eine exaktere Vorstellung haben, kann Deutung und Rechtfertigung dieses Satzes nicht zweifelhaft sein: An Stelle des exzentrischen Kreises, auf dem sich der Epizykelmittelpunkt bewegt, tritt in der modernen Theorie eine Ellipse, und zwar im Falle der inneren Planeten die Sonnenbahn (Erdbahn), im Falle der äußeren Planeten die Planetenbahn selbst. Die beiden Punkte E und F, die auf der Apsidenlinie symmetrisch zum Mittelpunkt der Ellipse M liegen, sind die Brennpunkte. Hierzu mögen noch zwei Erläuterungen eingeschaltet werden:

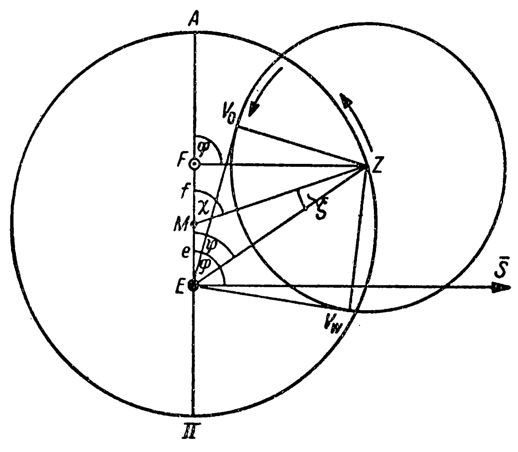


Abb. 12. Bestimmung der Lage des punctum aequans.

1. Ellipsen mit sehr kleinen Exzentrizitäten sind von Kreisen nur schwer zu unterscheiden. Setzen wir die große Halbachse einer Ellipse gleich eins, so ist die kleine Halbachse

$$b = \sqrt{1 - e^2} = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \cdots .$$

Im Falle des Venusbahnexzenters, wo $e \approx 0.02$ ist, würde also die kleine Halbachse von der großen nur um den 5000ten Teil ihres Betrages abweichen. Bei der hier angestrebten geringen Genauigkeit ist also die geometrische Form des Exzenters mit genügender Annäherung die eines Kreises.

2. Wir werden im nächsten Kapitel bei der Untersuchung der Planetenbewegung nach den KEPLERschen Gesetzen bestätigt finden, daß der zweite Brennpunkt der Bahnellipse tatsächlich die Eigenschaften eines punctum aequans besitzt, wenn wir Abweichungen von der 2. und den höheren Ordnungen in der Exzentrizität vernachlässigen. Tatsächlich wird sich zeigen, daß sich der vom zweiten Brennpunkt der KEPLERschen Ellipse aus gezogene Fahrstrahl nahezu gleichförmig dreht, wenn die Exzentrizität klein ist. Dies bestätigt uns, daß PTOLEMÄUS bei der Formulierung seiner Planetentheorien eine überaus glückliche Hand gehabt hat. Vorausgesetzt, daß man auf dem Standpunkt der antiken Astronomie beharrt, die das geozentrische System und die gleichförmige Kreisbewegung der Himmelskörper zum Prinzip erhoben hatte, läßt sich kaum eine Lösung denken, die so tief in das Wesen der Dinge eindringt wie gerade diese.

Es bleibt nun noch übrig, die numerischen Ergebnisse der Analyse der Venusbewegung durch Ptolemäus einer kritischen Prüfung zu unterwerfen, indem man sie mit den modernen Daten vergleicht. Dem Epizykel der Venusbahn entspricht in der modernen Theorie die Bahn des Planeten um die Sonne. Da die Exzentrizität dieser Bahn sehr klein ist (etwa 1/147), so darf man den Epizykel ohne wesentlichen Fehler als Kreis ansehen, in dessen Mittelpunkt die Sonne steht. Der Exzenter wäre dann also mit der Sonnenbahn, der Epizykelmittelpunkt mit dem wahren Ort der Sonne zu identifizieren.

Die Länge des Epizykelhalbmessers (nach Ptolemäus rund 0.72) stimmt mit dem modernen Wert für die große Halbachse der Venusbahn (0.7233 Astronomische Einheiten) ausgezeichnet überein. Weniger gut ist die Übereinstimmung zwischen den Elementen des Exzenters und denen der Sonnenbahn (der Erdbahn im heliozentrischen System). Die Exzentrizität der Erdbahn, heute 0.0167, betrug z.Z. des Ptolemäus 0.0176 und war daher merklich kleiner als die von ihm gemessene Exzentrizität des Venusexzenters. Auch die Länge der Apsiden ist etwas verschieden: Während Ptolemäus für die Länge des Apogäums des Venusexzenters 55° ermittelt, liefert die moderne Theorie für die ihm entsprechende Perihellänge der Erdbahn rund 71°, wenn wir von dem heutigen Wert (102°) mit der säkularen Änderung der Perihellänge (62″ jährlich) um 1800 Jahre zurückgehen. Die von Ptolemäus bestimmte Apogäumslänge der Sonnenbahn liegt mit 65°5 dazwischen.

Alles in allem sind diese Unterschiede verhältnismäßig klein. Besonders kann bei der Bestimmung der Apsidenlage, die bei so kleiner Exzentrizität recht schwierig und ungenau ist, ein Fehler von 16° kaum als ungewöhnlich groß angesehen werden, wenn wir die primitiven Beobachtungsmethoden jener Zeit berücksichtigen. Eher könnte man sich wundern, warum Ptolemäus auf Grund dieser größenordnungsmäßigen Übereinstimmung den naheliegenden Gedanken nicht aufgegriffen hat, daß die Sonne wirklich im Mittelpunkt des Venusepizykels steht und Venus somit als Trabant die Sonne umkreist. Wir dürfen aber nicht übersehen, daß Ptolemäus ja die Sonnentheorie von Hipparch übernommen hat, die – abgesehen von der nahen Übereinstimmung in der Länge der Apsiden – in dieses Bild nicht hineinpaßt. Denn das punctum aequans der Sonnenbahn liegt ja nach dieser Theorie im Exzentermittelpunkt, und es ergeben sich dadurch grundsätzliche Unterschiede zwischen den Mechanismen beider Bahnen. Wäre Ptolemäus auf den Gedanken gekommen, auch die Sonnenbahn auf ihrem Exzenter durch einen Leitstrahl herumzuführen, dessen Drehpunkt im symmetrischen Gegenpunkt der Erde in bezug auf den Exzentermittelpunkt läge, so hätte ihm die Identität der Sonnenbahn mit dem Venusexzenter kaum entgehen können, zumal die von ihm errechnete Exzentrizität der Sonnenbahn (1/24 = 0.0417) genau gleich der doppelten Exzentrizität des Venusexzenters ist, so daß in beiden Bahnen der Abstand der Erde vom punctum aequans denselben Betrag hat. Zu einer derartigen Angleichung der Sonnentheorie an die Theorie der Planeten lag aber wohl für Ptolemäus kein hinreichender Grund vor, da sie keine fühlbare Verbesserung in der Darstellung der Sonnenlängen mit sich gebracht hätte. Lediglich die Schwankung der Sonnenentfernung, die in der von ihm bevorzugten Theorie

um das Doppelte zu groß war, wäre dadurch auf das richtige Maß reduziert worden. Ähnlich wie in der Mondtheorie, hätte eine genaue Messung des scheinbaren Sonnendurchmessers ihn zu einer kritischen Überprüfung seiner Hypothesen veranlassen können. Im Gegensatz zu dort sind allerdings hier diese Schwankungen so geringfügig, daß sie seiner Beobachtungskunst wohl kaum zugänglich gewesen wären.

Ein weiterer Punkt, auf den wir hier noch kurz eingehen müssen, betrifft die Bewegung der Apsiden des Exzenters. Im Falle der Sonnenbahn war diese dem PTOLEMÄUS entgangen, so daß er den Abstand des Sonnenapogäums vom Frühlingspunkt für konstant hielt, obwohl ihm alte Beobachtungen zur Verfügung standen, aus denen er das Vorrücken der Apsiden hätte ableiten können. Bei der Venus fehlten ihm solche Vergleichsmöglichkeiten. Er nahm daher für diesen wie auch für die übrigen Planeten ohne weitere Prüfung jenen Befund an, den ihm die Analyse der Bahnbewegung des Merkur geliefert hatte. Hier fanden sich alte Angaben, die zum Teil 400 Jahre zurückreichten und aus denen er ableitete, daß das Apogäum des Merkurexzenters in bezug auf die Fixsterne ruhe, sich also in bezug auf den Frühlingspunkt mit derjenigen Geschwindigkeit rechtläufig bewege, die durch die Konstante der Präzession gegeben ist. In Wirklichkeit gibt es auch eine Verlagerung der Apsiden in bezug auf das Fixsternsystem, aber diese ist beträchtlich kleiner als die Präzessionsbewegung und bei der Venus fast verschwindend klein. Jedenfalls ist der Ansatz, die Länge des Apogäums der Planetenexzenter ebenso wie die der Fixsterne um die Präzession wachsen zu lassen, bedeutend besser als derjenige, den er in der Sonnentheorie versucht hat.

10. *Theorie und Bahnbestimmung der äußeren Planeten*

Wie schon weiter oben ausgeführt wurde, ist die Theorie der drei äußeren Planeten bei PTOLEMÄUS formal die gleiche wie bei der Venus, abgesehen von der abweichenden Koppelung der Bahnbewegung mit der Bewegung der Sonne. Insbesondere wird das punctum aequans auf der Apsidenlinie des Exzenters genauso definiert wie bei Venus: Auch hier wird die Strecke zwischen diesem ausgezeichneten Punkt und der Erde durch den Mittelpunkt des Exzenters halbiert.

Zur Bestimmung der Bahnelemente läßt sich die bei Venus befolgte Methode nicht anwenden, da die Beobachtung der Planeten in ihren größten Elongationen vom Epizykelmittelpunkt auf Schwierigkeiten stoßen würde. Dafür erweisen sich hier die *Oppositionen zur mittleren Sonne* als bequem und genau beobachtbare Stellungen, die sich gut zur Ableitung der Exzenterkonstanten eignen. Da nämlich (siehe Abschn. 8, Satz 2b) der Planet während der Opposition zur mittleren Sonne stets den erdnächsten Punkt des Epizykels durchläuft, ist in diesem Zeitpunkt die Richtung von der Erde nach dem Planeten gleichzeitig auch die nach dem Epizykelmittelpunkt. Durch Messung der Planetenlängen bei verschiedenen Oppositionen gewinnt man also sichere Längen des Epizykelmittelpunktes, mit deren Hilfe man Apogäumslänge und Exzentrizität des Exzenters ableiten kann.

PTOLEMÄUS zeigt, daß diese Aufgabe lösbar ist, wenn drei beliebige Oppositionsörter nach Länge und Zeit gegeben sind. Dieses Bahnbestimmungsproblem entspricht im wesentlichen dem, das wir im Zusammenhang mit der Mondtheorie gelöst haben. Auch dort waren drei Oppositionsörter (Mondfinsternisse!) nötig, um diese beiden Bestimmungsstücke des Exzenters zu berechnen. Der hier vorliegende Fall ist aber in einem entscheidenden Punkt schwieriger. In der provisorischen Mondtheorie wurde angenommen, daß das punctum aequans im Mittelpunkt des Exzenters liege, der Epizykelmittelpunkt also mit gleichförmiger Geschwindigkeit den Exzenter umlaufe. Hier dagegen bewegt sich dieser Punkt ungleichförmig schnell, da der Drehpunkt des Leitstrahls, der ihn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf dem Exzenter herumführt, außerhalb des Exzentermittelpunktes liegt. Die hierdurch bedingte Komplikation bringt es mit sich, daß man eine strenge Lösung des Problems nicht direkt angeben kann. Die Art und Weise, in der PTOLEMÄUS diese neu auftretende Schwierigkeit durch eine Näherungs- und Hypothesenrechnung umgeht, würde einem modernen Mathematiker alle Ehre gemacht haben. Sein Verfahren kann als das älteste Vorbild der Bahnbestimmungsmethoden unserer Zeit (siehe Kapitel VIII und IX) angesehen werden, die ebenfalls auf dem Wege sukzessiver Näherungen zum Ziele führen.

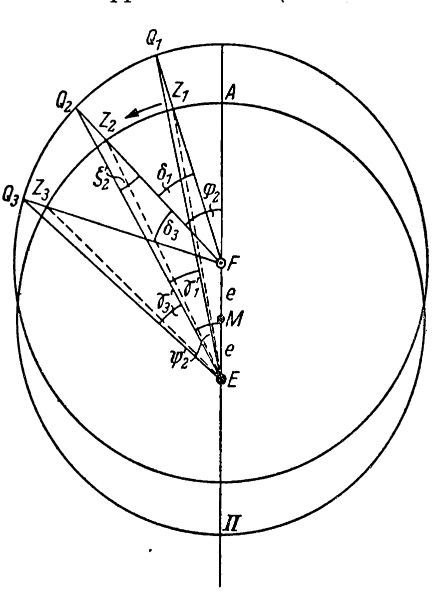


Abb. 13. Bahnbestimmung eines äußeren Planeten aus drei Oppositionen.

Es sei (Abb. 10) G der Oppositionsort eines der äußeren Planeten und EK die gleichzeitige (EG entgegengesetzte) Richtung nach der mittleren Sonne. Die beobachtete Länge l von G, gleich der Länge $\omega + \psi$ des Epizykelmittelpunktes Z, ist dann gleich der um 180° vermehrten oder verminderten Länge der mittleren Sonne. Die geozentrisch gesehene Apogäumsdistanz von Z ist durch den Winkel ψ gegeben, die vom punctum aequans aus gesehene aber durch den mit der Zeit proportional wachsenden Winkel φ. Sind drei Oppositionsörter G_i bzw. Z_i ($i = 1, 2, 3$) vorgelegt und bezeichnen wir auch bei den übrigen Größen die Zugehörigkeit zu diesen Örtern mit den gleichen Indizes, so sind bekannt:

1. die Differenzen

$$\gamma_1 = \psi_2 - \psi_1 = l_2 - l_1; \quad \gamma_3 = \psi_3 - \psi_2 = l_3 - l_2$$

aus den beobachteten Planetenlängen;

2. die Differenzen

$$\delta_1 = \varphi_2 - \varphi_1 = n_t(t_2 - t_1); \quad \delta_3 = \varphi_3 - \varphi_2 = n_t(t_3 - t_2),$$

die den Zwischenzeiten proportional sind, wobei n_t, die mittlere tropische Bewegung des Planeten in der Zeiteinheit, auf Grund der Tabelle S. 45 als bekannt vorausgesetzt werden darf.

In Abb. 13 sei nun $A\Pi$ die Apsidenlinie, auf der die Punkte E und F mit dem noch unbekannten Abstand e beiderseits des Exzentermittelpunktes M aufgetragen sind. Um F als Mittelpunkt sei ein Hilfskreis geschlagen, dessen Halbmesser, ebenso wie der des Exzenters, gleich der Längeneinheit sei. Die Leitstrahlen FZ_i, die vom punctum aequans zu den auf dem Exzenter liegenden Epizykelmittelpunkten Z_i führen und miteinander die bekannten Winkel δ_1 und δ_3 bilden, treffen den Hilfskreis in den Punkten Q_i. Wären diese Punkte von der Erde E aus anvisierbar, somit die von den drei Richtungen EQ_i gebildeten Winkel γ_1' und γ_3' durch Beobachtung bekannt, so wäre die Aufgabe der Bahnbestimmung, wie ein Vergleich mit Abb. 5 lehrt, auf die der Bestimmung der provisorischen Mondbahn zurückgeführt. Das gleiche Formelsystem, das dort aus den gegebenen Winkeln α, β, γ, δ die unbekannten Winkel ζ, ψ und $\varphi = \zeta + \psi$ sowie die Strecke R zu berechnen gestattete, könnte hier benutzt werden, um aus δ_1, δ_3, γ_1, γ_3 die Winkel ψ_2', ζ_2' und $\varphi_2 = \psi_2' + \zeta_2'$ sowie die (R entsprechende) Strecke $EF = 2e$ zu bestimmen. Gemäß den Formeln (I; 5, 6) in Abschnitt 5 wäre dann

(I; 19)

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\psi_2' &= \frac{\sin\gamma_1'\sin(\delta_3-\gamma_3') - \sin\gamma_3'\sin(\delta_1-\gamma_1')}{\cos\gamma_1'\sin(\delta_3-\gamma_3') + \cos\gamma_3'\sin(\delta_1-\gamma_1') - \sin(\delta_1+\delta_3-\gamma_1'-\gamma_3')} \\ \operatorname{tg}\zeta_2' &= \frac{\sin\gamma_1'\sin(\delta_2-\gamma_3') - \sin\gamma_3'\sin(\delta_1-\gamma_1')}{\sin(\gamma_1'+\gamma_3') - \sin\gamma_1'\cos(\delta_3-\gamma_3') - \sin\gamma_3'\cos(\delta_1-\gamma_1')} \end{aligned}\right.$$

(I; 20)
$$\varphi_2 = \psi_2' + \zeta_2'; \quad 2e = \frac{\sin\zeta_2'}{\sin\psi_2'}.$$

Nun sind die beiden Winkel γ_1' und γ_3' nicht bekannt, wohl aber die von den Richtungen EZ_i gebildeten Winkel γ_1 und γ_3. Sofern die Exzentrizität e klein von der 1. Ordnung ist, kann man aber die Differenzen $\gamma_1' - \gamma_1$ und $\gamma_3' - \gamma_3$ als klein von der 2. Ordnung ansehen. Man erhält daher eine brauchbare Näherungslösung, wenn man in den Formeln (I; 19, 20) in erster Hypothese $\gamma_1' = \gamma_1$ und $\gamma_3' = \gamma_3$ setzt.

Mit den auf diese Weise erhaltenen Näherungen für ψ_2', ζ_2', φ_2, e wird man dann imstande sein, die an γ_1 und γ_3 noch anzubringenden Verbesserungen $\gamma_1' - \gamma_1$ bzw. $\gamma_3' - \gamma_3$ zu errechnen. Man erhält so neue Ausgangswerte für eine abermalige Durchrechnung der Formeln (I; 19, 20) und somit verbesserte Werte ψ_2', ζ_2', φ_2, e. Dieses Verfahren ist so oft zu wiederholen, bis sich die Ergebnisse nicht mehr ändern und daher als die endgültige Lösung des Problems angesehen werden dürfen.

Das Verfahren zur Berechnung der Korrekturen $\gamma_1' - \gamma_1$ und $\gamma_3' - \gamma_3$ lehrt Abb. 14, in der wieder die beiden Kreise und die Apsidenlinie $A\,\Pi$ mit den Punkten E, M und F gezeichnet sind. Ferner sind für eine beliebige der drei Oppositionen die (nun ohne Index bezeichneten) Punkte Z und Q sowie die Winkel ψ, ψ', φ eingetragen. Als weitere Hilfswinkel dienen $ZMF = \chi$ und $QEZ = \psi' - \psi = \varepsilon$. Die Strecken FQ und MZ haben die Länge eins. Dann ist nach dem Sinussatz

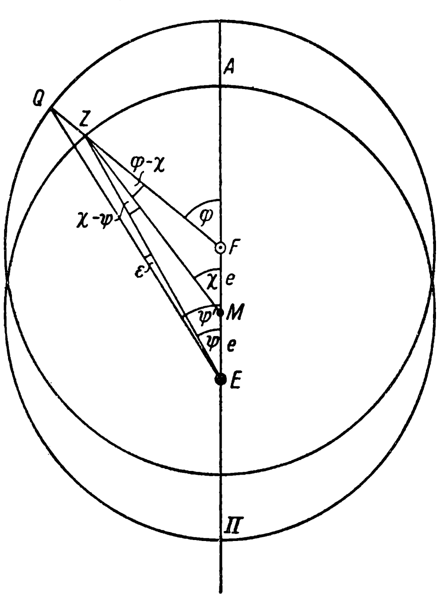


Abb. 14. Bahnbestimmung eines äußeren Planeten (Hypothesenrechnung).

$$\text{(I;21)} \quad \sin(\varphi - \chi) = e \sin \varphi,$$

$$\sin(\chi - \psi) = \sin(\chi - \psi' + \varepsilon)$$
$$\text{(I; 22)} \qquad = e \sin(\psi' - \varepsilon).$$

Nimmt man φ und ψ' sowie e auf Grund der bereits durchgeführten Hypothesenrechnung als gegeben an, so berechnet man χ aus (I; 21). Um ε zu finden, löst man in (I; 22) die Sinusausdrücke auf:

$$\sin(\chi - \psi') \cos \varepsilon + \cos(\chi - \psi') \sin \varepsilon$$
$$= e(\sin \psi' \cos \varepsilon - \cos \psi' \sin \varepsilon)$$

und dividiert durch $\cos \varepsilon$. Das ergibt

$$\text{(I; 23)} \qquad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{e \sin \psi' - \sin(\chi - \psi')}{e \cos \psi' + \cos(\chi - \psi')}.$$

Hat man die Rechnung nach (I; 21, 23) für alle drei Örter ausgeführt (was möglich ist, da mit $\varphi = \varphi_2$, $\psi' = \psi_2'$ auch φ_1, φ_3; ψ_1', ψ_3' bekannt sind), und unterscheidet man wieder, wie früher, die Ergebnisse durch Indices, so folgt aus

$$\psi_1' - \psi_1 = \varepsilon_1, \quad \psi_2' - \psi_2 = \varepsilon_2, \quad \psi_3' - \psi_3 = \varepsilon_3$$

durch Subtrahieren

$$\text{(I; 24)} \qquad \begin{cases} \gamma_1' - \gamma_1 = (\psi_2' - \psi_1') - (\psi_2 - \psi_1) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ \gamma_3' - \gamma_3 = (\psi_3' - \psi_2') - (\psi_3 - \psi_2) = \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \end{cases}$$

Damit sind die gesuchten Korrektionen gefunden, und das Verbesserungsverfahren kann den oben beschriebenen weiteren Verlauf nehmen.

Als Anwendungsbeispiel möge die Bestimmung der Exzenterelemente des Planeten Mars dienen, wie sie Ptolemäus durchgeführt hat. Als Ausgangsdaten benutzte er folgende von ihm selbst beobachtete Oppositionen der Planeten:

130 Dez. 15, 1^h nachts: Länge des Mars 81° 0′
135 Febr. 21, 9^h abends: Länge des Mars 148° 50′
139 Mai 27, 10^h abends: Länge des Mars 242° 34′

Die Längen der mittleren Sonne für diese Zeiten stimmten mit den um 180° vermehrten bzw. verminderten Längen des Planeten bis auf Abweichungen von höchstens 2′ überein.

Aus diesen Daten folgen die Zwischenzeiten und die Differenzen der wahren Längen des Mars:

$$t_2 - t_1 = 1529^d\, 20^h, \quad \gamma_1 = l_2 - l_1 = 67°\, 50',$$
$$t_3 - t_2 = 1556^d\, 1^h, \quad \gamma_3 = l_3 - l_2 = 93°\, 44',$$

während die Differenzen der mittleren Längen, berechnet mit $n_t = 1886.''615$, die Werte

$$\delta_1 = n_t(t_2 - t_1) = 81°\, 44', \quad \delta_3 = n_t(t_3 - t_2) = 95°\, 28'$$

ergeben. Die Hypothesenrechnung gestaltet sich dann folgendermaßen:

		I. Hypothese	II. Hypothese	III. Hypothese
	γ_1'	67° 50′	68° 55′	68° 44′
	γ_3'	93 44	92 21	92 38
nach (I; 19, 20)	ψ_2'	37° 43.′3	32° 54.′8	33° 57.′7
	ζ_2'	7 38.4	6 9.3	6 26.0
	φ_2	45 22	39 4	40 24
	e	0.10866	0.09867	0.10028
	$\psi_1' = \psi_2' - \gamma_1'$	− 30° 7′	− 36° 0′	− 34° 46′
	ψ_2'	37 43	32 55	33 58
	$\psi_3' = \psi_2' + \gamma_3'$	131 27	125 16	126 36
	$\varphi_1 = \varphi_2 - \delta_1$	− 36° 22′	− 42 40	− 41° 20′
	φ_2	45 22	39 4	40 24
	$\varphi_3 = \varphi_2 + \delta_3$	140 50	134 32	135 52
nach (I; 21–24)	ε_1	− 0° 32′	− 0° 27′	− 0° 28′
	ε_2	+ 0 33	+ 0 27	+ 0 28
	ε_3	− 0 50	− 0 39	− 0 41
	$\gamma_1' - \gamma_1$	+ 1 5	+ 0 54	+ 0 56
	$\gamma_3' - \gamma_3$	− 1 23	− 1 6	− 1 9

Nachdem sich die Korrektionen nach der 3. Iteration nicht mehr wesentlich geändert haben, erhält man mit den endgültigen Werten

$$\gamma_1' = 68°\, 46', \quad \gamma_3' = 92°\, 35'$$

nach einer abschließenden Rechnung

$$\psi_2' = 33°\, 46.'6, \quad \varphi_2 = \psi_2' + \zeta_2' = 40°\, 9.'6,$$
$$\zeta_2' = 6°\, 23.'0, \quad e = 0.09997,$$

was mit den von PTOLEMÄUS angegebenen Endwerten

$$\varphi_2 = 40^\circ\, 11', \quad e = \frac{1}{10}$$

bestens übereinstimmt.

Die Länge des Apogäums selbst ergibt sich zu

$$\omega = l_2 - (\psi_2' - \varepsilon_2) = 115^\circ\, 31' \text{ (nach PTOLEMÄUS } \omega = 115^\circ\, 30').$$

Zur Bestimmung des Epizykelhalbmessers ist noch eine weitere Beobachtung des Planeten außerhalb der Opposition erforderlich. Es sei (Abb. 15) P die Stellung des Planeten auf dem Epizykel zur Zeit t und der Winkel $JZP = \vartheta$ seine mittlere Anomalie, die nach der Theorie vom mittleren Apogäum J des Epizykels aus im rechtläufigen Sinne gezählt wird. Die scheinbare Anomalie, die durch den vom scheinbaren Apogäum aus gezählten Winkel HZP definiert ist, hat dann den Betrag $\vartheta + \zeta$. Es werde nun angenommen, daß die Zeit t_0 der letzten Opposition des Planeten zur mittleren Sonne gegeben sei, ebenso die zugehörige Distanz φ_0 des Epizykelmittelpunktes vom Apogäum des Exzenters. Da nun während der Opposition der Planet im erdnächsten Punkt des Epizykels steht, so ist für t_0 der scheinbare Abstand ψ_0 vom Apogäum des Exzenters für den Planeten und den Epizykelmittelpunkt derselbe und hat, wenn l_0 die Oppositionslänge des Planeten und ω die Länge des Apogäums des Exzenters ist, den Wert $\psi_0 = l_0 - \omega$. Ferner ist für diesen Zeitpunkt die mittlere Anomalie des Planeten im Epizykel $\vartheta_0 = 180^\circ - \zeta_0$, wo $\zeta_0 = \varphi_0 - \psi_0$.

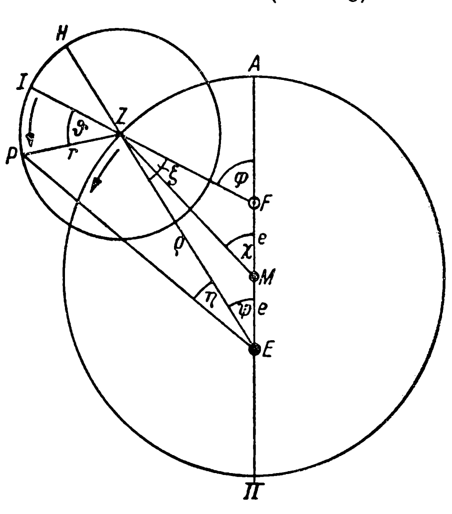


Abb. 15.
Bestimmung des Epizykelhalbmessers eines äußeren Planeten.

Für den Zeitpunkt t der Beobachtung lassen sich dann die mit der Zeit linear fortschreitenden Winkel φ und ϑ nach den Formeln

$$(\text{I}; 25) \qquad \varphi = \varphi_0 + n_t(t - t_0); \quad \vartheta = \vartheta_0 + n_a(t - t_0)$$

berechnen. Aus φ ergeben sich ψ und ζ nach dem aus den Dreiecken EMZ und FMZ folgenden Formelsystem

$$(\text{I}; 26) \qquad \begin{gathered} \sin(\varphi - \chi) = e \sin\varphi, \quad \sin(\chi - \psi) = e \sin\psi, \\ \text{hieraus: } \chi \text{ und } \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\chi}{e + \cos\chi}, \quad \zeta = \varphi - \psi. \end{gathered}$$

Für die Elongation η des Planeten vom Epizykelmittelpunkt erhält man, wenn l die zur Zeit t gemessene Planetenlänge ist,

$$\eta = l - (\omega + \psi). \tag{I; 27}$$

Schließlich ergibt sich aus dem Dreieck EZP nach dem Sinussatz

$$r = \frac{\varrho \sin \eta}{\sin(\vartheta + \zeta - \eta)}, \tag{I; 28}$$

wobei der geozentrische Abstand ϱ des Epizykelmittelpunktes aus dem Dreieck EMZ nach dem Cosinussatz berechnet werden kann, der

$$\varrho^2 = 1 + 2e\cos\chi + e^2 \tag{I; 29}$$

liefert.

Es leuchtet ein, daß die Bestimmung von r um so genauer wird, je weniger sich der Winkel $ZPE = \vartheta + \zeta - \eta$ von 90° bzw. 270° unterscheidet, d.h. je näher der Planet einer seiner größten Elongationen vom Epizykelmittelpunkt steht. PTOLEMÄUS hat diese Regel bei der Bestimmung des Halbmessers des Marsepizykels nicht beachtet und eine Beobachtung gewählt, die nur wenige Tage auf eine Opposition des Planeten folgte, und zwar auf die letzte der drei Oppositionen, die er zur Bestimmung der Exzenterkonstanten benutzt hatte. Für diese Opposition galt

$$t_0 = 139 \text{ Mai } 27,\ 10^{\text{h}} \text{ abends};\quad l_0 = 234^\circ\, 34';\quad \psi_0 = l_0 - \omega = 127^\circ\, 4'.$$

Ferner war aus der Bahnbestimmung des Exzenters bekannt, wenn wir die endgültigen Werte des PTOLEMÄUS zugrunde legen,

$$\varphi_0 = \varphi_3 = \varphi_2 + \delta_3 = 135^\circ\, 39'$$

und somit

$$\zeta_0 = \varphi_0 - \psi_0 = 8^\circ\, 35';\quad \vartheta_0 = 180^\circ - \zeta_0 = 171^\circ\, 25'.$$

Die zusätzliche Beobachtung ergab dann folgende Daten:

$$t = 139 \text{ Mai } 30,\ 9^{\text{h}} \text{ abends};\quad l = 241^\circ\, 36';\quad t - t_0 = 2^{\text{d}}\, 23^{\text{h}} = 2\overset{\text{d}}{.}9583,$$

und mit $n_t = 1866''\!.6$ und $n_a = 1661''\!.7$ nach (I; 25)

$$\varphi = 137^\circ\, 12',\quad \vartheta = 172^\circ\, 47'.$$

Nach Durchrechnung der Formeln (I; 26 bis 29) findet man sodann mit $e = 0.1$

$$\begin{aligned} \chi &= 133^\circ\, 18', & \eta &= -2^\circ\, 44', \\ \psi &= 128^\circ\, 50', & \varrho &= 0.9342, \\ \zeta &= 8^\circ\, 22', & r &= 0.6578. \end{aligned}$$

Ptolemäus erhält $r = 0.6583$, was in Anbetracht der unzweckmäßigen Wahl des Beobachtungstermins befriedigend mit unserem Ergebnis übereinstimmt.

Nach dem gleichen Verfahren hat Ptolemäus auch die Elemente der Bahnen von Jupiter und Saturn bestimmt. Wir stellen in der folgenden Tabelle für die drei äußeren Planeten die Bahnelemente nach Ptolemäus den ihnen adäquaten Elementen der modernen Theorie gegenüber:

A. *nach* Ptolemäus

Planet	Länge des Apogäums des Exzenters (ω)	Exzentrizität	Epizykel-halbmesser r	$\frac{1}{r}$
Mars	115° 30′	0.1000	0.6583	1.519
Jupiter	161 0	0.0458	0.1917	5.217
Saturn	233 0	0.0569	0.1083	9.231

B. *moderne Werte*

Planet	Länge des Aphels		Exzentrizität		Große Halbachse der Bahn
	für 1950	für 135	1950	135	
Mars	155°.1	121°.7	0.0934	0.0917	1.524
Jupiter	193.5	164.2	0.0484	0.0455	5.203
Saturn	272.1	236.5	0.0557	0.0620	9.539

Die Apogäumslängen stimmen mit den wegen Präzession und Apsidenbewegung auf die Epoche 135 n. Chr. umgerechneten Newcombschen Werten für die Aphellängen der Planetenbahnen bis auf einen geringen systematischen Unterschied von durchschnittlich 4° überein. Die Exzentrizitäten sind größenordnungsmäßig gut bestimmt, die des Jupiter ist sogar ganz genau. Die Epizykelhalbmesser entsprechen in der modernen Theorie dem Halbmesser der Erdbahn, ausgedrückt in Einheiten des Planetenbahnhalbmessers. Die in astronomischen Einheiten ausgedrückte große Halbachse der Planetenbahnen findet sich also in der antiken Theorie als Reziproke des Epizykelhalbmessers wieder. Auch hier ist die Übereinstimmung befriedigend.

11. *Theorie der Bewegung des Merkur*

Während es Ptolemäus gelungen war, im Falle der Venus und der drei äußeren Planeten Bewegungstheorien nach gemeinsamem Muster zu schaffen, die den tatsächlichen Bewegungen innerhalb der Grenzen der damaligen Beobachtungsgenauigkeit gerecht wurden, stieß er bei der Bearbeitung des Planeten Merkur auf Schwierigkeiten besonderer Art, die eine Anwendung des bei den

übrigen Planeten benutzten Schemas unmöglich machten. Er hat versucht, diese Schwierigkeiten zu meistern, indem er – ähnlich wie in der Mondtheorie – eine Bewegung des Exzenters einführte. Während diese Maßnahme aber dort mit der Darstellung der Evektion zu einem klaren Erfolge führte, entstand hier ein Mechanismus, den man nur als eine Fehlkonstruktion bezeichnen kann. Wir dürfen uns damit begnügen, diese Theorie kurz zu skizzieren und mit einigen Erläuterungen zu versehen.

Der eigentliche Grund, weshalb der theoretische Ansatz, der bei den anderen Planeten zum Ziele führte, bei Merkur versagen mußte, ist folgender: Ptolemäus hat immer an dem Grundsatz festgehalten, daß der auf dem Exzenter herumgeführte fingierte Punkt Z der Mittelpunkt des Epizykels sei. Sowohl bei Venus als auch bei den äußeren Planeten konnte er diesen Satz anwenden, ohne in merkliche Widersprüche mit der Erfahrung zu geraten. Der Venusepizykel entspricht ja der sehr schwach exzentrischen Venusbahn um die Sonne, während die Epizykel der äußeren Planeten durch die ebenfalls recht schwach exzentrische Erdbahn dargestellt werden. Nur die Bahn des Merkur ist mit $e \approx 0.2$ so stark exzentrisch, daß ihre Beschreibung durch den zentrischen Epizykel nicht mehr möglich war.

Dazu kam als weiterer erschwerender Umstand die Schwierigkeit der Beobachtung dieses sonnennahen, nur in der hellen Dämmerung sichtbaren Planeten, dessen Positionen durch Anschluß an helle Fixsterne zu bestimmen eine für die damalige Beobachtungskunst schwierige und nur selten und ungenau zu erfüllende Aufgabe gewesen sein muß. Wenn man versucht, die Beobachtungsergebnisse, die Ptolemäus im neunten Buch des Almagest wiedergibt, an Hand der modernen Theorie zu prüfen, so stößt man in der Tat auf Widersprüche, die nur auf grobe Beobachtungsfehler (wenn nicht gar auf – der inneren Übereinstimmung zuliebe – gefälschte Daten) zurückgeführt werden können.

Maßgebend für die Begründung der Theorie ist wieder der scheinbare Durchmesser des Epizykels, d.h. also die Längendifferenz zwischen den Positionen des Planeten in der östlichen und der westlichen größten Elongation, während die Sonne eine bestimmte mittlere Länge hat. Wenn man die Länge des Epizykelmittelpunkts und den scheinbaren Epizykeldurchmesser als Funktion der mittleren Länge der Sonne aufträgt, gewinnt man die Grundlagen, die zur Aufstellung einer Bewegungstheorie des Planeten nötig sind. Der Befund des Ptolemäus auf Grund von Untersuchungen dieser Art ist in folgenden Sätzen enthalten:

1. Die Apsidenlinie des festen exzentrischen Kreises, die eine Symmetrielinie für alle Bewegungen des Planeten darstellt und die mit den Fixsternen die Präzessionsbewegung mitmacht (sich also, wenn wir die Präzessionskonstante der antiken Astronomen zugrunde legen, in bezug auf den Frühlingspunkt um 1° in 100 Jahren in rechtläufigem Sinne bewegt), zeigt in die Richtungen 10° bzw. 190° Länge.

2. Wenn die mittlere Sonne eine Länge von 190° hat, erscheint der Epizykel unter einem Durchmesser von 38° 6′. Dies ist das absolute Minimum, so daß also das Apogäum des Exzenters in 190° Länge liegt. Bei einer Länge der mitt-

leren Sonne von 10°, also im gegenüberliegenden Punkte der Ekliptik, beträgt die scheinbare Größe des Epizykels 46° 30′. Das ist aber nicht das absolute Maximum, sondern in den Längen 70° und 310°, d.h. also um 120° östlich und westlich vom Apogäum, erreicht der scheinbare Durchmesser des Epizykels den absolut größten Wert mit 47° 45′. Es gibt also zwei zur Apsidenlinie symmetrisch liegende Perigäen.

Ptolemäus gelingt es, durch eine sinnvolle Konstruktion die Theorie der Merkurbewegung so zu gestalten, daß diese merkwürdige Erscheinung durch sie dargestellt wird. Es lohnt sich aber kaum, diese Theorie hier im einzelnen wiederzugeben, da die Beobachtungen selbst, auf denen sie aufgebaut ist, mit den uns heute bekannten tatsächlichen Verhältnissen im Widerspruch stehen. Der einzige Zahlenwert der ptolemäischen Theorie, der mit den modernen verträglich ist, betrifft den Halbmesser des Epizykels, den Ptolemäus mit 0.375 angibt, und der von dem modernen (0.387) nur geringfügig abweicht. Auch die Annahme einer Symmetrie der geozentrischen Bewegung des Planeten in bezug auf eine Apsidenlinie ist wenigstens nahezu erfüllt: Zur Zeit des Ptolemäus betrug die Länge des Perihels der Merkurbahn rund 50°, die des Perihels der Erdbahn rund 70°; der Unterschied ist gering, wenn wir berücksichtigen, daß das Perihel der Erdbahn wegen der kleinen Exzentrizität nur schwach ausgeprägt ist. Das größte Gewicht liegt also auf der Apsidenlage der Merkurbahn, die wegen der starken Exzentrizität dieser Bahn entsprechend scharf definiert sein müßte. Es ist also völlig unverständlich, wenn im Almagest die Länge des Apogäums mit 10° um 40° zu klein angegeben wird. Es fällt dabei auf, daß Ptolemäus zum Vergleich alte Beobachtungsdaten aus dem Jahre 262 v.Chr. heranzieht, aus denen er die Länge des Apogäums zu 6° bestimmt – sein um 4° größerer Wert ist genau derjenige, den er erhalten würde, wenn er die Verlagerung der Apsidenlinie wegen der Präzession (4° in 400 Jahren) berücksichtigen würde, unter der Voraussetzung, daß die alten Beobachtungen fehlerfrei waren. Man kann sich hier kaum des Verdachtes erwehren, daß Ptolemäus (wie auch an anderer Stelle) seine eigenen Ergebnisse denen seiner Vorfahren angeglichen hat, vielleicht, weil er seiner eigenen Beobachtungskunst allzu kritisch gegenüberstand.

Auch die Beobachtung von zwei Perigäen beiderseits der Apsidenlinie ist sicher falsch. Man könnte eine derartige Erscheinung nur auf folgende Weise erklären: daß beim Betrachten der stark elliptischen Merkurbahn von verschiedenen Seiten bald ihre große, bald ihre kleine Achse im rechten Winkel zur Visierlinie steht. Das würde dazu führen, daß der Winkel zwischen den beiden von der Erde an die Bahnellipse des Planeten gelegten Tangenten zwei verschiedene periodische Schwankungen ausführt: eine Schwankung von einjähriger Periode, die davon herrührt, daß der Mittelpunkt der Bahnellipse im Laufe eines Jahres einmal in Erdnähe, einmal in Erdferne gelangt, und eine Schwankung von halbjähriger Periode, deren Maxima eintreten, wenn sich die Erde in Richtung der kleinen Achse der Merkurbahn befindet, und deren Minima stattfinden, wenn sie die große Achse kreuzt. Wenn man aber diese Verhältnisse an Hand der bekannten Daten über die Bahnelemente von Erde und Merkur durchrechnet, so findet man, daß die halbjährige Schwan-

kung sehr viel kleiner ist als die große einjährige[1]) und daß sie nicht imstande ist, die beiden von PTOLEMÄUS vermuteten Maxima der Längendifferenz zwischen den Elongationen zu erklären. Es ist zwar richtig, daß zur Zeit des PTOLEMÄUS der scheinbare Epizykeldurchmesser in 70° Länge merklich größer gewesen ist als in 10° Länge, und auch die angegebenen Zahlen stimmen größenordnungsmäßig einigermaßen. Von einem zweiten Maximum bei 310° kann aber keine Rede sein. Auch der scheinbare Epizykeldurchmesser im Apogäum, den PTOLEMÄUS mit 38° 6′ angibt, ist sicher falsch – in Wirklichkeit liegt das Minimum etwa bei 42°. Es kann sich also hier nur um grobe Fehler handeln.

Wir haben am Schluß des Abschn. 9 die Frage aufgeworfen, warum PTOLEMÄUS den naheliegenden Gedanken nicht aufgegriffen hat, daß die Venus die Sonne umkreise und daß daher der Mittelpunkt des Epizykels dieses Planeten gleichzeitig der wahre Ort der Sonne sei. Wir können unseren Überlegungen zu diesem Punkte noch hinzufügen, daß er dann konsequenterweise auch für Merkur das gleiche hätte annehmen müssen. Apogäum und Exzentrizität des Exzenters der Venusbahn hätte er, wie wir an jener Stelle bemerkt haben, bei einer geringfügigen Abänderung seiner Theorie der Sonnenbahn mit dieser in Übereinstimmung bringen können. Bei der Bahn des Merkur, wie sie ihm erschien, wäre das ganz unmöglich gewesen. Vielleicht ist diese unglückliche Fehlkonstruktion die eigentliche Ursache dafür, daß PTOLEMÄUS hier den Zugang zu den großen Zusammenhängen im Planetensystem verfehlen mußte, an deren Pforte er bei anderer Gelegenheit schon gestanden hat, ohne es zu wissen. Denn nur demjenigen hätte dieser Zugang zu höheren Einsichten offen gestanden, der das gemeinsame Bindeglied zwischen den einzelnen, nur scheinbar voneinander unabhängigen Erscheinungen erkannte. Dem PTOLEMÄUS blieb er verborgen, weil sein Weltbild *ein* widerspenstiges Glied in der Kette der Zusammenhänge enthielt, das sich den Regeln nicht fügen wollte, von denen die übrigen beherrscht wurden.

12. *Von* PTOLEMÄUS *zu* KEPLER

Der größte Mangel der antiken Planetentheorien war ihre Uneinheitlichkeit. Selbst wenn wir Sonne und Mond außer acht lassen, waren für die fünf eigentlichen Planeten nicht weniger als drei verschiedene Bewegungstheorien erforderlich, eine für Merkur, eine für Venus und eine für die drei äußeren Planeten. Dennoch war jenes gemeinsame Bindeglied zwischen diesen verschiedenen Bahntypen, von dem weiter oben die Rede war, schon in den einzelnen Theorien vorhanden, wenn auch unter fehlerhaftem Beiwerk versteckt. Dieses gemeinsame Element war die merkwürdige Koppelung der Planeten-

---

[1]) Die Amplitude der Jahresperiode ist ungefähr der Exzentrizität $\left(\sim \frac{1}{5}\right)$, die der halbjährigen dem Achsenverhältnis $\left(\sim \frac{1}{50}\right)$ der Bahnellipse proportional.

bewegung an die Bahn der Sonne. Es tritt auch in der geozentrischen Fassung der Planetentheorien zutage, wenn wir von den sekundären Erscheinungen – den durch die Exzentrizität des Exzenters bedingten Ungleichheiten der Bewegung in Länge – abstrahieren. Es bleiben dann nur noch die mittleren Bewegungen auf dem Exzenter und auf dem Epizykel übrig, und die Bindung der Planetenbewegungen an die der Sonne äußert sich dann in den folgenden beiden Regeln:

1. Bei den inneren Planeten entspricht die mittlere Bewegung des Epizykelmittelpunktes auf dem Deferenten nach Periode und Phase genau der mittleren Bewegung der Sonne.

2. Bei den *äußeren* Planeten entspricht die Bewegung des Planeten auf dem Epizykel nach Periode und Phase genau der mittleren Bewegung der Sonne.

Diese beiden Regeln lassen sich, auch wenn man den geozentrischen Standpunkt nicht verläßt, in eine einzige und für alle Planeten gültige vereinigen. Man braucht nur folgende Änderungen vorzunehmen, die weder mit den antiken Bewegungsprinzipien noch mit der Erfahrung in Widerspruch stehen:

a) Man darf offenbar, ohne daß die Bahn des Planeten sich ändert, die beiden Vektoren (Erde–Epizykelmittelpunkt und Epizykelmittelpunkt–Planet), aus denen sich der „Ortsvektor" des Planeten (Erde–Planet) zusammensetzt, in ihrer Reihenfolge vertauschen, gemäß dem kommutativen Gesetz der Vektorenaddition. Nimmt man diese Vertauschung bei den äußeren Planeten vor, so entspricht bei sämtlichen Planeten die mittlere Bewegung des Epizykelmittelpunktes auf dem Deferenten nach Periode und Phase der mittleren Bewegung der Sonne.

b) Beobachtbar ist unmittelbar nur die Richtung, in der, vom Beobachtungsort aus gesehen, die Planeten stehen, d.h., wenn wir die Neigung der Kreise gegen die Ekliptik vernachlässigen, ihre ekliptikale Länge, nicht dagegen ihre Entfernung. Wir dürfen daher die Halbmesser der Bahnkreise, ohne mit den Beobachtungen in Widerspruch zu geraten, in beliebigen Längeneinheiten messen, und es ist zur Darstellung der scheinbaren Bewegungen nicht notwendig, die gewählte Längeneinheit mit irdischen zu vergleichen; d.h., es ist ausreichend, die *Verhältnisse* zwischen den vorkommenden Strecken, z.B. zwischen dem Halbmesser des Epizykels und dem des Deferenten einer Planetenbahn zu kennen. Setzen wir nun, nach der unter (a) beschriebenen Vertauschung, sämtliche Deferentenhalbmesser gleich dem Halbmesser der Sonnenbahn, der als Längeneinheit dienen möge: so gelangen wir zu folgendem allgemeinen Gesetz: *Die Planeten bewegen sich in verschiedenen Kreisen um die Sonne, die sich ihrerseits auf einem Kreise mit dem Halbmesser eins um die Erde bewegt.*

Dies ist der Grundgedanke einer Theorie des Planetensystems, die der letzte prominente Anhänger des geozentrischen Prinzips, der Däne Tycho Brahe (1546–1601) noch ein halbes Jahrhundert nach dem Tode des Nikolaus Kopernikus (1473–1543) aufgestellt hat. Kopernikus hingegen hatte die andere noch mögliche Folgerung aus den obengenannten Regeln gezogen: *Die Sonne als Mittelpunkt des Weltalls steht fest. Um sie kreisen die Planeten, unter ihnen auch die Erde, deren Bahn (Halbmesser 1) zwischen denen des Mars (Halbmesser 1.52) und der Venus (Halbmesser 0.72) eingeschlossen ist.*

Von diesen beiden an sich gleichwertigen Entwürfen hatte der letztere vor

dem anderen den Vorteil größerer Einheitlichkeit voraus. Warum TYCHO, obwohl er das kopernikanische System genau kannte, es doch für nötig hielt, einen Schritt rückwärts zu gehen und zugunsten des antiken geozentrischen Prinzips ein Kompromiß zu schließen, steht auf einem anderen Blatt. Der Hauptgrund mag das Fehlen einer meßbaren jährlichen Parallaxe der Fixsterne gewesen sein. Die Güte der Beobachtungen TYCHOS, der noch ohne Fernrohr arbeitete, war zu seiner Zeit unübertroffen: Die von ihm gemessenen Gestirnsörter waren auf 1–2 Bogenminuten genau. Eine jährliche Parallaxe von 1′ hätte auf eine Fixsternentfernung von rund 3500 Sonnenabständen (Astronomischen Einheiten) geführt. Das ist etwa $^1/_{20}$ Lichtjahr. Mit einer so hohen unteren Schranke für die Abstände der Fixsterne zu rechnen, mag den Astronomen zu TYCHOS Zeiten noch schwer gefallen sein.

Eine endgültige Lösung dieses himmelsmechanischen Hauptproblems brachte weder das heliozentrische Schema des KOPERNIKUS noch der Kompromißvorschlag des TYCHO BRAHE, da beide Hypothesen noch das antike Prinzip der gleichförmigen Kreisbewegung enthielten. Beide Forscher mußten also, um die Ungleichförmigkeiten der Planetenbewegung darzustellen, doch wieder zu den Hilfsmitteln der Alten, den exzentrischen Kreisen und den Epizykeln, Zuflucht nehmen. Nur die größte, primäre Ungleichheit, die den Wechsel zwischen Recht- und Rückläufigkeit der scheinbaren Planetenbewegung hervorruft, brauchte nun nicht mehr erklärt zu werden, da sie (bei KOPERNIKUS) als parallaktischer Effekt der Erdbewegung bzw. (bei BRAHE) als Mitführungseffekt der Sonnenbewegung gedeutet wurde. Die kleineren Ungleichheiten blieben aber bestehen und wurden sogar vermehrt, da die glänzende Beobachtungskunst TYCHOS zu den schon bekannten noch weitere periodische Schwankungen der Planetenörter enthüllte, die neue Anforderungen an den Theoretiker stellte. Das gleiche gilt in besonderem Maße für die Theorie des Mondes, die ja durch die obigen Überlegungen gar nicht berührt wird.

TYCHO BRAHES Nachfolger an der kaiserlichen Sternwarte zu Prag, an der dieser bedeutende Astronom während der letzten Jahre seines Lebens wirkte, war JOHANN KEPLER (1571–1630), der das Glück hatte, das in mehr als zwanzig Jahren gesammelte Beobachtungsmaterial seines Vorgängers auswerten zu dürfen. Nach langen, vergeblichen Versuchen, die Bahn des Planeten Mars durch Kreisbewegungen darzustellen, kam er auf den glücklichen Gedanken, auch dieses letzte Prinzip der antiken Astronomie fallen zu lassen, nachdem er schon das geozentrische System zugunsten des kopernikanischen aufgegeben hatte, und die wirkliche Form der Planetenbahnen sowie das Geschwindigkeitsgesetz ohne Vorurteil allein aus den Beobachtungsdaten abzuleiten. Die Frucht dieser Bemühungen, die ersten beiden seiner berühmten drei Gesetze der Planetenbewegung, hat er in seiner 1609 in Prag erschienenen Schrift „Astronomia nova seu physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martis ex observationibus G. V. TYCHONIS BRAHE“ niedergelegt. Das dritte Gesetz, das eine Abhängigkeit zwischen den Umlaufszeiten der Planeten und ihren mittleren Entfernungen von der Sonne ausdrückt, ist als das wertvollste Ergebnis seiner späteren, im übrigen mit vielen mystischen Spekulationen angefüllten Arbeit „Harmonices mundi libri V“ (Linz 1619) zu verzeichnen.

Diese drei Gesetze haben den folgenden Wortlaut:

I. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen um die Sonne. Die Sonne befindet sich in einem gemeinsamen Brennpunkt dieser Ellipsen.

II. Der von der Sonne zum Planeten führende Leitstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Flächensatz).

III. Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Bahnhalbachsen.

Die hier gewählte Numerierung der Keplerschen Gesetze, die wir in der Folge mit „Kepler I–III“ bezeichnen wollen, ist nicht die historische, denn Kepler hat als ersten den Flächensatz gefunden. Alle drei Gesetze stellen nach unseren heutigen Kenntnissen nur Näherungen an die wirklichen Bewegungsverhältnisse dar. Sie gelten streng nur dann, wenn man die Massen der Planeten gegen die des Zentralkörpers, der Sonne, vernachlässigen kann – eine Voraussetzung, die im Planetensystem mit großer Annäherung, aber keineswegs exakt erfüllt ist.

KAPITEL II

DIE KEPLERSCHEN GESETZE UND DIE GRAVITATION

13. *Die Bahnbewegung in der KEPLERschen Ellipse*

Durch die ersten beiden KEPLERschen Gesetze wird die Bewegung eines Planeten um die Sonne vollständig beschrieben, wenn wir die am Schluß des vorigen Abschnitts genannten Vorbehalte machen. Wir werden dabei vorerst die Himmelskörper stets als punktförmige Gebilde ansehen. In Wirklichkeit sind sie endlich ausgedehnte Kugeln oder kugelähnliche Rotationskörper. Wir meinen dann immer ihre Mittelpunkte, wenn wir ihre Örter im Raum (oder ihre Bahnen als ebene oder räumliche Kurven) beschreiben. Die Frage, ob dieser Standpunkt berechtigt ist, wird später (Abschn. 27 und 28) beantwortet werden. In diesem Sinn wird also nach KEPLER I der gemeinsame Brennpunkt der Planetenbahnellipsen durch den Mittelpunkt der Sonne belegt, und es sind die Mittelpunkte der Planeten – oder auch gewisse mit besonderen Eigenschaften ausgestattete fingierte Punkte (Schwerpunkte) innerhalb der von den Planeten mit ihrem Satellitengefolge gebildeten Systeme –, die auf Ellipsen um die Sonne laufen.

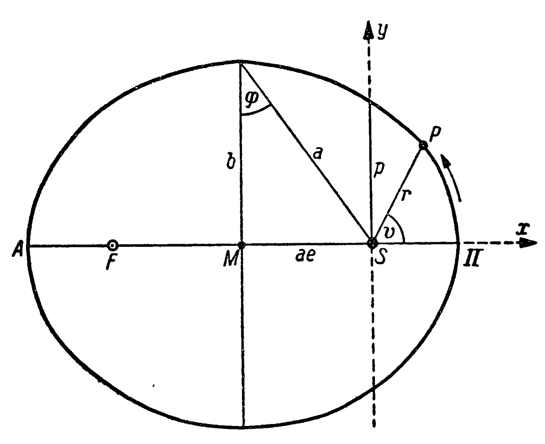


Abb. 16. Bahnellipse eines Planeten.

Solange wir uns mit der Bewegung eines einzelnen Planeten um die Sonne befassen, haben wir ein ebenes Problem vor uns. Wir wählen dann zweckmäßig die Bahnebene als Koordinatenebene, den einen Brennpunkt der Bahnellipse, in dem die Sonne steht, als Koordinatenursprung und die Richtung von der Sonne nach dem Perihel Π der Bahnellipse (Abb. 16) als Hauptkoordinatenrichtung. Ist P der Ort des Planeten zu einer bestimmten Zeit t, und sind seine Polarkoordinaten r (Radiusvektor) und v (wahre Anomalie), so lautet die Gleichung der Bahnkurve

$$(II;1)\qquad \boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos v} \quad (\text{KEPLER I})}\,.$$

Form und Größe der Bahn sind dann durch die beiden Konstanten p (Parameter) und e (numerische Exzentrizität) bestimmt. Sind a und b die große und

die kleine Halbachse der Ellipse, so bestehen zwischen p, e einerseits und a, b andererseits die aus der Geometrie der Ellipse bekannten Beziehungen

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}, \tag{II; 2}$$
$$p = \frac{b^2}{a}, \qquad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

in denen a, b und p als Längen geometrischer Strecken (p ist die positive Ordinate im Brennpunkt) stets positiv sind, während für die reine Zahl e die Ungleichung $0 \leqq e < 1$ gilt. Der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt der Ellipse ist gleich ae und heißt „lineare Exzentrizität". Für $e = 0$ wird $a = b = p$: Die Ellipse geht dann in den *Kreis* $r = a$ über. Strebt e gegen 1, so nähert sich die Bahnform dem Grenzfall der *Parabel*.

An Stelle von e wird häufig der „Exzentrizitätswinkel" φ benutzt, jener Winkel, unter dem von den Endpunkten der kleinen Achse aus die lineare Exzentrizität erscheint. Es ist dann

$$e = \sin\varphi, \quad \sqrt{1 - e^2} = \cos\varphi, \tag{II; 3}$$

und die Gleichungen (II; 2) lassen sich in der Form

$$p = a\cos^2\varphi, \quad b = a\cos\varphi = p\sec\varphi \tag{II; 4}$$

schreiben.

Während das erste KEPLERsche Gesetz die Form der Bahn festlegt, regelt das zweite, der sogenannte *Flächensatz*, die Geschwindigkeit des Planeten in den verschiedenen Phasen seines Umlaufs. Mit Hilfe des Flächensatzes gelingt es, den Ort (r, v) des Planeten als Funktion der Zeit zu bestimmen. Das läßt sich auch ohne Rechnung leicht einsehen: Man denke sich die von der Bahn umschlossene Ellipsenfläche durch N verschiedene Leitstrahlen in N flächengleiche Sektoren zerlegt, deren Spitzen im Brennpunkt S zusammenlaufen. Durch diese Leitstrahlen werden N Bahnpunkte und zwischen ihnen N Bögen der Ellipse bestimmt, die nach Aussage des Flächensatzes in gleichen Zeiten, d.h. also in je U/N Zeiteinheiten durchlaufen werden, wenn U die Umlaufszeit bedeutet. Wählt man die ganze Zahl N beliebig groß, so ist damit die Aufgabe, den Planetenort für gleichabständige, beliebig dicht aufeinanderfolgende Zeitpunkte anzugeben, auf eine geometrische Teilungsaufgabe zurückgeführt.

In Abb. 17 sei SPP' ein solcher Ellipsensektor, dessen Inhalt dem N-ten Teil des gesamten Flächeninhalts der Ellipse gleich sei, also $ab\pi/N$ betrage. Wächst N über alle Grenzen, rücken also die Endpunkte des Ellipsenbogens PP' immer dichter zusammen, so darf

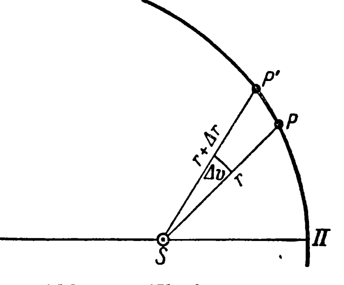


Abb. 17. Flächensatz.

der Bogen PP' der Sehne gleichgesetzt werden, der Inhalt des Sektors also dem des Dreiecks SPP'. Ist r die Länge des Leitstrahls (Radiusvektors) SP und $r' = r + \Delta r$ die des benachbarten Leitstrahls SP', $\Delta v = v' - v$ der sehr kleine Winkel PSP', so ist der Inhalt des Dreiecks SPP'

$$\frac{1}{2} r(r + \Delta r) \sin \Delta v \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta v,$$

wenn wir uns auf Glieder 1. Ordnung in Δr und Δv beschränken. Nach dem Flächensatz ist der Inhalt dieser kleinen Fläche dem Zeitintervall Δt, in dem der Planet von P nach P' gelangt, proportional. Wir können also setzen

$$r^2 \Delta v \approx c \Delta t,$$

wo c einen konstanten Proportionalitätsfaktor bedeutet. Nach vollzogenem Grenzübergang erhalten wir dann streng

$$r^2 \frac{dv}{dt} = c \quad \text{(KEPLER II)} \tag{II; 5}$$

als mathematischen Ausdruck für den Flächensatz.

Führen wir rechtwinklige Koordinaten

$$x = r \cos v, \quad y = r \sin v; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} v = \frac{y}{x}$$

ein, so ist, wenn wir die letzte dieser Gleichungen nach der Zeit differenzieren und Ableitungen nach der Zeit durch Punkte kennzeichnen,

$$\frac{\dot v}{\cos^2 v} = \frac{x\dot y - y\dot x}{x^2}.$$

Setzen wir hierin wieder $\cos v = \frac{x}{r}$ und berücksichtigen (II; 5), so ergibt sich der Flächensatz in rechtwinkligen Koordinaten:

$$x\dot y - y\dot x = c. \tag{II; 6}$$

Über den Zusammenhang zwischen der „Flächengeschwindigkeitskonstante" (kurz: Flächenkonstante) c und den Bestimmungsstücken der Ellipse läßt sich vorläufig folgendes aussagen: Ist U die Umlaufszeit des Planeten, so ist nach dem obigen Teilungsprinzip

$$\Delta t = \frac{U}{N}.$$

Andererseits ist der Flächeninhalt des in dieser Zeit vom Radiusvektor des Planeten überstrichenen Sektors

$$\Delta f = \frac{ab\pi}{N} = \frac{1}{2} c \Delta t = \frac{1}{2} c \frac{U}{N}.$$

Daraus ergibt sich

$$c = \frac{2\pi}{U} ab = nab, \tag{II; 7}$$

wenn wir mit $n = 2\pi/U$ die mittlere Bewegung des Planeten in der Zeiteinheit bezeichnen, d.h. den in Bogenmaß ausgedrückten Winkel, um den sich in der Zeiteinheit ein Leitstrahl drehen würde, der in der Zeit U eine gleichförmige Drehung um $2\pi = 360°$ ausführt. Benutzen wir die Beziehungen (II; 3, 4), so können wir statt (II; 7) auch schreiben

$$c = n\sqrt{p a^3} = n a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{n a p}{\sqrt{1 - e^2}}. \tag{II; 8}$$

Der Flächensatz bildet die Grundlage für eine analytische Behandlung der KEPLERschen Bewegung. Drückt man r durch (II; 1) aus, so erhält man

$$\frac{dv}{(1 + e\cos v)^2} = \frac{c}{p^2} dt = n\left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dt$$

als Differentialgleichung für die wahre Anomalie als Funktion der Zeit. Ihr Integral

$$\frac{1}{n}\left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^v \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2} = t - t_0 \tag{II; 9}$$

liefert die Zeit t, zu der sich der Planet in der wahren Anomalie v befindet. Die Integrationskonstante t_0 gibt den Zeitpunkt an, an dem der Planet im Perihel $v = 0$ steht („Periheldurchgangszeit" oder kürzer „Perihelzeit").

14. *Die KEPLERsche Gleichung*

Zu den rein geometrischen Überlegungen, die wir ohne Zuhilfenahme physikalischer Interpretationen durchführen können, gehört auch die Ausführung der in (II; 9) angedeuteten Integration. Diese gelingt leicht, wenn man anstatt der wahren Anomalie eine andere Variable E einführt. Da der Radiusvektor r während der elliptischen Bewegung des Planeten zwischen dem Minimum $a(1 - e)$ im Perihel und im Maximum $a(1 + e)$ im Aphel der Bahn periodisch schwankt, und da, wie aus KEPLER I und II unmittelbar eingesehen werden kann, die Bewegung symmetrisch zu den Apsiden erfolgt, so liegt es nahe, die neue Variable so zu definieren, daß

$$r = a(1 - e\cos E). \tag{II; 10}$$

Im Perihel ($E = 0$) und im Aphel ($E = \pi$) stimmt E mit v überein. Für $E = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$ wird $r = a$; der Planet befindet sich dann in einem der beiden Endpunkte der kleinen Achse.

Aus (II; 1 und 10) folgt

$$r e \cos v = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e \cos E),$$

also

$$r \cos v = a(\cos E - e), \tag{II; 11}$$

ferner aus (II; 10, 11)

$$(r \sin v)^2 = r^2 - (r \cos v)^2 = a^2(1 - e^2) \sin^2 E,$$

also

$$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \tag{II; 12}$$

wobei der Quadratwurzel das positive Zeichen zukommt, wenn man festsetzt, daß E im gleichen Sinne wie v mit der Zeit wachsen soll. Durch Subtraktion und Addition erhält man aus (II; 10, 11)

$$\begin{aligned} r(1 - \cos v) &= a(1 + e)(1 - e \cos E), \\ r(1 + \cos v) &= a(1 - e)(1 + e \cos E) \end{aligned} \tag{II; 13}$$

und, wenn man die erste dieser Gleichungen durch die zweite dividiert und die Identität

$$\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

auf beide Seiten anwendet, die zur Umwandlung von v in E und umgekehrt verwendbare Formel

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \tag{II; 14}$$

oder, wenn nach (II; 3)

$$e = \sin \varphi; \quad \frac{1 + e}{1 - e} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{E}{2} &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{v}{2}. \end{aligned} \tag{II; 15}$$

Differenziert man (II; 10) und (II; 1) in bezug auf die variablen Größen, so erhält man

$$dr = ae \sin E \, dE,$$

$$dr = \frac{pe \sin v}{(1 + e \cos v)^2} dv = r^2 \frac{e}{p} \sin v \, dv$$

oder, wenn man in der zweiten Beziehung $r^2 \, dv = c dt = \frac{nap \, dt}{\sqrt{1 - e^2}}$ nach (II; 5, 8) setzt,

$$dr = \frac{nae}{\sqrt{1 - e^2}} \sin v \, dt.$$

Vergleicht man beide Ausdrücke miteinander, so folgt

$$\sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{\sin v} dE = n \, dt$$

oder, wegen (II; 12 und 10),

(II; 16) $$\frac{r}{a} dE = (1 - e \cos E) \, dE = n \, dt.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt

(II; 17) $$\boxed{E - e \sin E = n(t - t_0)}\,.$$

Das ist die *KEPLERsche Gleichung*, die man umständlicher auch aus (II; 9) ableiten kann, wenn man v durch E mittels der Substitution (II; 14) ausdrückt.

Die transzendente KEPLERsche Gleichung, deren Lösung im Kapitel IV (Abschn. 35) behandelt werden soll, gibt die Hilfsvariable E, die *„exzentrische Anomalie"*, als Funktion der seit dem Zeitpunkt t_0 des letzten Periheldurchgangs verflossenen Zeit bzw. des Winkels

(II; 18) $$M = n(t - t_0) = \frac{2\pi}{U}(t - t_0),$$

den man auch als die *„mittlere Anomalie"* des Planeten bezeichnet, da er während eines Umlaufs gleichförmig von 0 bis 2π zunimmt. Ist E durch Auflösung der KEPLERschen Gleichung gefunden, so kann man die zu einem beliebigen Zeitpunkt t gehörigen rechtwinkligen Koordinaten des Planeten, $x = r \cos v$ und $y = r \sin v$, aus (II; 11, 12) oder die Polarkoordinaten r und v aus (II; 10, 14) bestimmen.

KEPLER hat die Gleichung (II; 17) auf geometrischem Wege gefunden. Konstruiert man (Abb. 18) um die Ellipse den Hauptkreis, d.h. den Kreis um den Ellipsenmittelpunkt M mit a als Halbmesser, der die Ellipse in den Endpunkten der großen Achse berührt, und verlängert man die Ordinate PQ des Planetenorts P bis zum Schnitt K mit dem Hauptkreis, so ist der Winkel $KM\Pi$

gleich der exzentrischen Anomalie E. Man liest nämlich die Gültigkeit der Formeln (II; 11, 12) direkt aus der Figur ab – die letztere, wenn man bedenkt, daß wegen des Affinitätsgesetzes der Ellipse die Proportion

$$KQ : PQ = a : b = 1 : \sqrt{1 - e^2}$$

besteht.

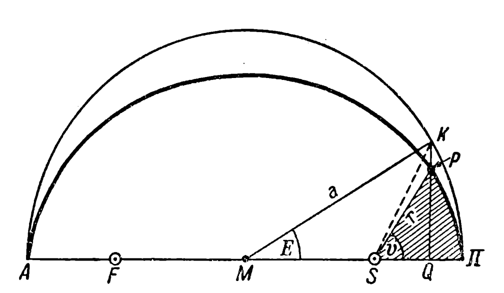


Abb. 18. Exzentrische Anomalie. Ableitung der KEPLERschen Gleichung.

Nun ist der Flächeninhalt des Kreissektors $(\Pi M K)$

(II; 19)
$$(\Pi M K) = \frac{E}{2\pi} \cdot a^2 \pi = \frac{a^2}{2} E = \text{Dreieck } KMS + \text{Kreisausschnitt } (\Pi S K).$$

Der Inhalt des Kreisausschnitts $(\Pi S K)$ ist, wiederum auf Grund des Affinitätsgesetzes, gleich dem mit $\frac{a}{b}$ multiplizierten Inhalt des Ellipsensektors $(\Pi S P)$. Dieser ist aber wegen KEPLER II

$$(\Pi S P) = \frac{M}{2\pi} \cdot ab\pi = \frac{ab}{2} M, \quad \text{so daß} \quad (\Pi S K) = \frac{a}{b} (\Pi S P) = \frac{a^2}{2} M.$$

Da nun der Inhalt des Dreiecks KMS

$$\frac{1}{2} MS \cdot KQ = \frac{1}{2} ae \cdot a \sin E = \frac{a^2}{2} e \sin E,$$

so ergibt die Beziehung (II; 19)

$$\frac{a^2}{2} E = \frac{a^2}{2} (M + e \sin E) \quad \text{oder} \quad E - e \sin E = M.$$

15. *Die antifokale Anomalie und das punctum aequans*

Betrachten wir die Bewegung des Planeten P von dem zweiten Brennpunkt F der Bahnellipse (dem „leeren Brennpunkt" oder „*Antifocus*") aus, so sind (Abb. 19) seine Polarkoordinaten

$$s = 2a - r \quad \text{(antifokale Distanz)},$$
$$w \quad \text{(antifokale Anomalie)}.$$

Im Kapitel I haben wir gesehen, daß in der antiken Planetentheorie die Bewegung des Epizykelmittelpunkts vom *punctum aequans* aus mit konstanter Winkelgeschwindigkeit vor sich ging. Die Kreisbahn des Epizykelmittelpunkts (Deferent) entspricht in der modernen Theorie bei den inneren Planeten der Sonnenbahn (Erdbahn), bei den äußeren der Planetenbahn selbst. Die festen Punkte E (Erde) und F (punctum aequans) entsprechen also den beiden Brennpunkten einer KEPLERschen Bahnellipse, deren Gestalt wegen der kleinen Exzentrizität nur wenig von der Kreisform abweicht. Wenn also das Ergebnis der Analyse des PTOLEMÄUS richtig ist, so darf man erwarten, daß der Antifokus der elliptischen Bahn die Eigenschaften eines punctum aequans wenigstens annähernd aufweist. Der Beweis für die Berechtigung dieser Annahme läßt sich leicht erbringen.

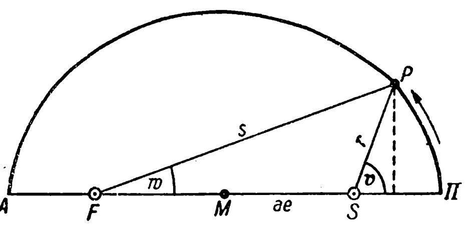


Abb. 19. Wahre und antifokale Anomalie.

Für die Polarkoordinaten s, w gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} s &= 2a - r = a(1 + e\cos E), \\ s\cos w &= 2ae + r\cos v = a(\cos E + e), \qquad \text{(II; 20)} \\ s\sin w &= r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\sin E, \end{aligned}$$

die aus den Gleichungen (II; 10–12) folgen und ihnen entsprechen. Alle Beziehungen zwischen r, v und E gehen also in die zwischen s, w und E über, wenn man e mit $-e$ vertauscht. Wegen (II; 13) gilt daher auch

$$\text{(II; 21)} \quad \operatorname{tg}\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}\frac{v}{2}$$

und

$$\text{(II; 22)} \qquad \operatorname{tg}\frac{v}{2}\operatorname{tg}\frac{w}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{E}{2}.$$

Differenziert man (II; 21) nach v und w, so ergibt sich

$$\frac{dw}{\cos^2\frac{w}{2}} = \frac{1-e}{1+e}\frac{dv}{\cos^2\frac{v}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{w}{2}}{\operatorname{tg}\frac{v}{2}} \cdot \frac{dv}{\cos^2\frac{v}{2}} \quad \text{oder} \quad \frac{dw}{\sin w} = \frac{dv}{\sin v},$$

d.h., wenn man die dritte Gleichung (II; 20) und den Flächensatz berücksichtigt,

$$\text{(II; 23)} \qquad s\frac{dw}{dt} = r\frac{dv}{dt} \quad \text{oder} \quad rs\frac{dw}{dt} = c.$$

Drückt man nun r und s nach (II; 10,20) durch die exzentrische Anomalie aus, so erhält man

$$\frac{dw}{dt} = \frac{c}{a^2(1 - e^2\cos^2 E)} = \frac{c}{a^2}(1 + e^2\cos^2 E + e^4\cos^4 E + \cdots).$$

während nach KEPLER II

$$\frac{dv}{dt} = \frac{c}{a^2(1 - e\cos E)^2} = \frac{c}{a^2}(1 + 2e\cos E + 3e^2\cos^2 E + \cdots).$$

Hierbei ist $\frac{c}{a^2} = n\sqrt{1 - e^2}$ nach (II; 8). Die zeitliche Änderung der antifokalen Anomalie weicht also nur um Glieder 2. Ordnung in der Exzentrizität von einer Konstanten ab, während die der wahren Anomalie auch Glieder 1. Ordnung enthält. Wegen der Kleinheit der Bahnexzentrizität aller alten Planeten (mit Ausnahme des Merkur) ist es daher verständlich, wenn die Astronomen der alten Schule die antifokale Winkelgeschwindigkeit dw/dt streng für konstant ansahen.

16. *Zentralbewegung und Gravitationskraft*

KEPLER hat seine Gesetze der Planetenbewegung auf empirischem Wege abgeleitet – ihre Einordnung in ein physikalisches Weltbild war zu seiner Zeit noch nicht möglich, doch wurden die Vorbedingungen dazu von seinem Zeitgenossen GALILEO GALILEI (1564–1642), dem Begründer einer neuen, auf Beobachtung, Experiment und exakter Messung fußenden Mechanik, geschaffen. Die Bestrebungen GALILEIS fanden gegen Ende des 17. Jhs. ihre Fortsetzung und Vollendung durch ISAAC NEWTON (1643–1727), der in seiner berühmten, 1687 erschienenen Schrift „Philosophiae naturalis principia mathematica" die mathematischen Grundlagen der modernen Himmelsmechanik entwickelt hat.

Während KEPLER sich noch damit begnügen mußte, einen Bewegungsvorgang wie den Lauf der Planeten um die Sonne beschreibend darzustellen, suchte NEWTON ihn durch Zurückführung auf das Wirken von *Kräften* verständlich zu machen. Dazu war natürlich nötig, den bis dahin verschwommenen Begriff der Kraft als mathematisch-physikalische Größe exakt zu definieren und damit der Messung und der Rechnung zugänglich zu machen.

In der NEWTONschen Mechanik sind die Begriffe *Kraft*, *Trägheit* und *Bewegungsgröße (Impuls)* eng miteinander verknüpft. Unter Bewegungsgröße versteht man das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit eines bewegten Körpers, wobei die Geschwindigkeit als *Vektor* aufzufassen ist. Das *Gesetz der Trägheit*, das in seinem Wesen bereits von GALILEI klar erkannt, von NEWTON aber streng formuliert wurde, besagt, daß die Bewegungsgröße eines Körpers unveränderlich, d.h., als Funktion der Zeit betrachtet, eine Konstante ist, solange keine Kräfte auf ihn wirken. In dieser Formulierung ist die Definition der *Kraft* enthalten. Jede zeitliche Veränderung der Bewegungsgröße wird

durch eine auf den bewegten (oder ruhenden) Körper wirkende Kraft verursacht. Damit ist das Maß der Kraft durch die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße, mit anderen Worten als deren Differentialquotienten nach der Zeit gegeben.

Der Ort P eines Körpers, den wir auch jetzt als punktförmig ansehen wollen, sei durch den Vektor $\mathfrak{p}$ symbolisiert, der vom Anfangspunkt eines Koordinatensystems nach P führt. Bewegt sich der Körper auf einer Kurve, so wird dieser „*Ortsvektor*“ eine Funktion der Zeit

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(t). \tag{II; 24}$$

Ebenso wie die Bahnkurve, die durch sie mathematisch dargestellt wird, ist diese Funktion notwendig *stetig* (natura non facit saltus). Darüber hinaus sind die Bewegungen, mit denen wir es zu tun haben, stets so geartet, daß die Funktion (II; 24) beliebig oft nach der Zeit differenzierbar ist. Die erste Ableitung nach der Zeit

$$\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{p}} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt}$$

liefert den Vektor der *Geschwindigkeit.* Der obigen Definition zufolge wird dann die auf den Massenpunkt P wirkende Kraft durch den Vektor

$$\mathfrak{k} = \frac{d}{dt}(m\mathfrak{v})$$

nach Größe und Richtung gemessen, wobei m die in P vereinigte *Masse* bedeutet. Im Rahmen der Probleme, mit denen wir es vorerst zu tun haben, dürfen wir die Masse m als unveränderlich betrachten. Es wird dann

$$\mathfrak{k} = m\dot{\mathfrak{v}} = m\ddot{\mathfrak{p}} = m\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2},$$

d.h., die Kraft ist proportional der Masse und der Beschleunigung des bewegten Körpers.

Um die Eigenschaften einer Kraft kennenzulernen, die Bewegungen nach den KEPLERschen Gesetzen hervorruft, dürfen wir uns auf ein zweidimensionales Koordinatensystem beschränken, da eine derartige Bewegung ja in einer Ebene vor sich geht. Es sei also P (Abb. 20) der Ort des Planeten zu irgendeiner Zeit t, seine Polarkoordinaten seien r und φ. Der Ortsvektor des Planeten ist dann

$$\mathfrak{p} = r\mathfrak{r}, \tag{II; 25}$$

wenn $\mathfrak{r}$ den Einheitsvektor in der Richtung vom Koordinatenursprung S nach P bedeutet. Geschwindigkeit und Beschleunigung von P ergeben sich dann durch zweimaliges Differenzieren von (II; 25) nach der Zeit:

$$\dot{\mathfrak{p}} = \dot{r}\mathfrak{r} + r\dot{\mathfrak{r}}, \tag{II; 26}$$

$$\ddot{\mathfrak{p}} = \ddot{r}\mathfrak{r} + 2\dot{r}\dot{\mathfrak{r}} + r\ddot{\mathfrak{r}}. \tag{II; 27}$$

Sind ferner die Achsenrichtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems durch die konstanten Einheitsvektoren $\mathfrak{i}\,(\varphi = 0°)$ und $\mathfrak{j}\,(\varphi = 90°)$ gegeben, so lassen sich der *radiale* Einheitsvektor $\mathfrak{r}\,(\varphi)$ und der auf ihm senkrecht stehende *zirkulare* Einheitsvektor $\mathfrak{m} = \mathfrak{r}\,(\varphi + 90°)$ in der Form

$$\mathfrak{r} = \quad \mathfrak{i}\cos\varphi + \mathfrak{j}\sin\varphi, \tag{II; 28}$$

$$\mathfrak{m} = -\,\mathfrak{i}\sin\varphi + \mathfrak{j}\cos\varphi \tag{II; 29}$$

darstellen. Differenziert man (II; 28) zweimal nach der Zeit, so ergibt sich

$$\dot{\mathfrak{r}} = (-\,\mathfrak{i}\sin\varphi + \mathfrak{j}\cos\varphi)\,\dot\varphi = \dot\varphi\,\mathfrak{m},$$

$$\ddot{\mathfrak{r}} = (-\,\mathfrak{i}\sin\varphi + \mathfrak{j}\cos\varphi)\,\ddot\varphi - (\mathfrak{i}\cos\varphi + \mathfrak{j}\sin\varphi)\,\dot\varphi^2 = \ddot\varphi\,\mathfrak{m} - \dot\varphi^2\mathfrak{r}.$$

Setzt man dies in (II; 26, 27) ein, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{p}} &= \dot r\,\mathfrak{r} + r\dot\varphi\,\mathfrak{m}, \\ \ddot{\mathfrak{p}} &= (\ddot r - r\dot\varphi^2)\,\mathfrak{r} + (2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)\,\mathfrak{m}. \end{aligned} \tag{II; 30}$$

Diese beiden Gleichungen bedeuten eine Zerlegung des Geschwindigkeits- und des Beschleunigungsvektors in zwei Komponenten, eine in Richtung des Ortsvektors zeigende *radiale* und eine im positiven Sinne um 90° gegen diese Richtung gedrehte *zirkulare* Komponente.

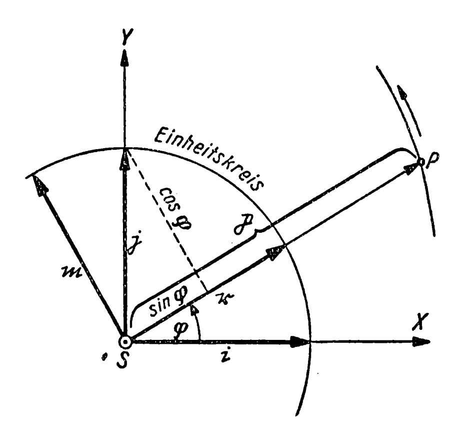


Abb. 20. Ebene Bewegung eines Punktes.

Erfolgt die Bewegung, über die bislang nichts vorausgesetzt wurde, nach den KEPLERschen Gesetzen, so gestatten die mathematischen Ausdrücke (II; 1, 5), diese Komponenten durch die gegebenen Bahnkonstanten auszudrücken. Nehmen wir an, daß die Sonne im Koordinatenanfang stehe und die Hauptkoordi-

natenrichtung die nach dem Perihel einer Planetenbahn sei, so ist φ mit der wahren Anomalie v identisch. Die Formeln (II; 1, 5) liefern dann

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{II; 31}$$

$$\dot{v} = \frac{c}{r^2}. \tag{II; 32}$$

Durch Differenzieren von (II; 31) erhält man

$$\dot{r} = \frac{p\, e \sin v}{(1 + e\cos v)^2} \cdot \dot{v} = \left(\frac{p}{1 + e\cos v}\right)^2 \cdot \frac{e}{p} \sin v \cdot \dot{v}$$

oder, nach Einsetzen von (II; 31, 32),

$$\dot{r} = c\,\frac{e}{p} \sin v. \tag{II; 33}$$

Nochmaliges Differenzieren von (II; 32, 33) ergibt

$$\begin{aligned} \ddot{v} &= -\,2c\,\frac{\dot{r}}{r^3} = -\,2\,\frac{c^2}{r^3} \cdot \frac{e}{p} \sin v, \\ \ddot{r} &= c\,\frac{e}{p} \cos v \cdot \dot{v} = \frac{c^2}{r^2} \cdot \frac{e}{p} \cos v. \end{aligned} \tag{II; 34}$$

Setzt man die so erhaltenen speziellen Werte für die Ableitungen von r und $\varphi = v$ in (II; 30) ein, so folgt für die Größe der beiden Komponenten des Beschleunigungsvektors

(II; 35) *radiale Komponente:* $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{e\cos\varphi}{p} - \frac{1}{r}\right) = -\,\frac{c^2}{p\,r^2}$,

(II; 36) *zirkulare Komponente:* $2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$.

Damit folgt für den Beschleunigungsvektor nach (II; 30) der Ausdruck

$$\ddot{\mathfrak{p}} = -\,\frac{c^2}{p\,r^2}\,\mathfrak{r} \tag{II; 37}$$

bzw. für die auf den bewegten Massenpunkt wirkende Kraft

$$\mathfrak{k} = -\,\frac{m c^2}{p\,r^2}\,\mathfrak{r}. \tag{II; 38}$$

Da der Faktor mc^2/pr^2 eine wesentlich positive Größe ist, besagt (II; 38), daß die auf einen nach den Keplerschen Gesetzen um die Sonne laufenden Planeten wirkende Kraft stets die Richtung $-\,\mathfrak{r}$ hat, d.h. vom Planeten zur Sonne ge-

richtet ist. Außerdem gilt der Satz: *Der Betrag der Kraft ist der Masse des Planeten proportional und dem Quadrat seines Abstandes von der Sonne umgekehrt proportional.* NEWTON bezeichnete diese Kraft als *Gravitation* und deutete sie als eine allgemeine Anziehung, die von der Sonne auf alle Massen ausgeübt wird, die sich in ihrer Umgebung befinden.

Die Formel (II; 36) sagt aus, daß die zirkulare Komponente der Kraft verschwindet, daß also die radiale Komponente allein wirksam ist. Kräfte mit dieser Eigenschaft haben stets die Richtung des Radiusvektors oder die entgegengesetzte, je nachdem die radiale Komponente eine positive oder negative Maßzahl besitzt. Kräfte dieser Art heißen allgemein *Zentralkräfte,* da sie als von einem Zentrum ausgehend angesehen werden können. Die durch sie bedingten Bewegungen werden dementsprechend *Zentralbewegungen* genannt. Die radiale Komponente, über die (II; 36) nichts aussagt, kann immer noch eine beliebige Funktion der Zeit und der Koordinaten r, φ sein. Ist insbesondere der Zahlenfaktor der radialen Komponente negativ, wie bei der KEPLERschen Bewegung, so nennt man die Zentralkraft *attraktiv,* im anderen Falle *repulsiv.* In der KEPLERschen Bewegung ist die Kraft von der Zeit und der Richtung φ unabhängig, also eine Funktion des Abstandes r allein; sie bildet also ein *stationäres Kraftfeld,* das zum Kraftzentrum *radialsymmetrisch* angeordnet ist.

Für das Zustandekommen einer Zentralbewegung ist die Gültigkeit des Flächensatzes eine *hinreichende* Bedingung, denn aus

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}; \quad \ddot{\varphi} = -\frac{2c\dot{r}}{r^3}$$

folgt unmittelbar (II; 36). Diese Bedingung ist aber auch *notwendig,* d.h., der Flächensatz gilt für alle Zentralbewegungen. Schreibt man nämlich die Differentialgleichung (II; 36) in der Form

$$2\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = 0,$$

so folgt durch Integration

$$2 \log r + \log \dot{\varphi} = \log c,$$

wo $\log c$ eine Integrationskonstante bedeutet. Diese Gleichung ist aber mit dem Flächensatz $r^2\dot{\varphi} = c$ gleichbedeutend.

Sei nun $R = R(r, \varphi)$ der Betrag einer Zentralkraft, so läßt sich aus den beiden Bedingungen

$$R = m\,|\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2|, \quad r^2\dot{\varphi} = c$$

eine Differentialgleichung herleiten, der die Bahnkurve $r = r(\varphi)$ genügen muß. Führt man statt r die neue Variable $u = \frac{1}{r}$ ein, und kennzeichnet man Ablei-

tungen nach φ durch Striche, Ableitungen nach der Zeit, wie immer, durch Punkte, so ergibt sich durch zweimaliges Differenzieren nach φ:

$$u' = \frac{\dot{u}}{\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{r}}{r^2\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{r}}{c},$$

$$u'' = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\ddot{r}}{\dot{\varphi}} = -\frac{r^2\ddot{r}}{c^2} = -\frac{\ddot{r}}{c^2u^2}.$$

Es ist also

$$\ddot{r} = -c^2u^2u''; \quad r\dot{\varphi}^2 = c^2u^3$$

und somit

$$R = mc^2u^2(u'' + u)$$

oder, wenn wieder u durch r ersetzt wird,

$$R = m\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]. \tag{II; 39}$$

Für das NEWTONsche Gravitationsgesetz ist speziell

$$R = \frac{mc^2}{pr^2} = m\frac{c^2}{r^2}(u'' + u) \quad \text{oder} \quad u'' + u = \frac{1}{p}.$$

Diese Differentialgleichung 2. Ordnung hat die allgemeine Lösung

$$u = \frac{1}{p} + A\cos(\varphi - \varphi_0)$$

oder

$$r = \frac{p}{1 + Ap\cos(\varphi - \varphi_0)},$$

d.h. also, die Bahn ist ein Kegelschnitt. Das Kraftzentrum (Koordinatenanfang) befindet sich in einem der Brennpunkte. Die Integrationskonstanten A und φ_0 haben folgende Bedeutung: Es ist $A = \frac{e}{p}$, und φ_0 ist der Richtungswinkel nach dem Perizentrum.

17. *Das dritte KEPLERsche Gesetz und die allgemeine Gravitation*

Die Formel (II; 37) für die Beschleunigung, die einem Planeten durch die Gravitationskraft der Sonne erteilt wird,

$$\ddot{\mathfrak{p}} = -\frac{c^2}{p}\cdot\frac{\mathfrak{r}}{r^2},$$

besagt zunächst nur, daß *für einen und denselben Planeten*, für dessen Bahnbewegung die Konstanten c und p bestimmte Zahlenwerte annehmen, der Betrag dieses Vektors nur von der Entfernung r des Planeten von der Sonne abhängt, und zwar dem Quadrat dieser Größe umgekehrt proportional ist. Nehmen wir nun mit NEWTON an, daß diese Gesetzmäßigkeit auf das Bestehen einer der Sonne innewohnenden und von ihr ausgeübten Kraft zurückzuführen ist, so folgt daraus, daß die Beschleunigungen, die irgendwelche beliebige Massenpunkte durch diese Kraft erleiden, der gleichen Gesetzmäßigkeit unterworfen sein müssen. In dem Ausdruck für dieses Beschleunigungsgesetz dürfen also nicht mehr diejenigen Größen vorkommen, die von der Gestalt einer bestimmten Bahn abhängen, auf der sich ein bestimmter Körper bewegt. Die einem beliebigen Planeten, der sich in der Entfernung r von der Sonne befindet, erteilte Beschleunigung wird also durch die Formel

$$\ddot{\mathfrak{p}} = -C^2 \frac{\mathfrak{r}}{r^2} \tag{II; 40}$$

dargestellt werden müssen, in der C^2 eine positive Konstante bedeutet, die für das System Sonne–Planet maßgebend ist und nur von den individuellen Eigenschaften (den Massen) dieser beiden Himmelskörper abhängen darf, nicht aber von den Elementen der von ihnen beschriebenen Bahnen. Der Vergleich beider Ausdrücke zieht nach sich, daß

$$C^2 = \frac{c^2}{p}; \quad c = C\sqrt{p}\,, \tag{II; 41}$$

d.h. also, daß die Flächenkonstante einer Planetenbahn der Quadratwurzel aus dem Bahnparameter proportional ist.

NEWTON hat ferner gezeigt, daß die Anziehungskraft, die von der Erde auf den sie umkreisenden Mond ausgeübt wird, ihrem Wesen und ihrer Größe nach mit der *Schwerkraft* identisch ist, die den freien Fall der Körper auf der Erdoberfläche verursacht. Aus den schon von GALILEI empirisch abgeleiteten Fallgesetzen war bekannt, daß die Beschleunigung der Körper durch die Schwerkraft von deren Masse unabhängig ist. Es lag also nahe anzunehmen, daß die Größe C wohl von der Masse des anziehenden, nicht aber von der des angezogenen Körpers abhängt und daher für ein und dasselbe System, etwa das Planetensystem der Sonne oder das Satellitensystem eines Planeten, konstant ist. Um diesen Sachverhalt zu prüfen, führen wir in (II; 41) für die Flächenkonstante c den Ausdruck (II; 8) ein und erhalten

$$c^2 = n^2 a^3 p; \quad C^2 = n^2 a^3. \tag{II; 42}$$

Ist also C eine für das ganze Planetensystem gültige Konstante, so wird für verschiedene Planeten P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ mit den mittleren Bewegungen $n_i = 2\pi/U_i$ und den großen Bahnhalbachsen a_i das Verhältnis

$$\frac{a_i^3}{U_i^2} = \frac{C^2}{4\pi^2} \tag{II; 43}$$

konstant sein. Das ist aber nichts anderes als der mathematische Ausdruck für das *dritte KEPLERsche Gesetz*, das von KEPLER empirisch gefunden wurde und daher wenigstens mit großer Annäherung im Planetensystem erfüllt sein muß.

Um einen Überblick zu gewinnen, mit welcher Genauigkeit dieses Gesetz tatsächlich gilt, stellen wir in der folgenden Tabelle die großen Bahnhalbachsen (in astronomischen Einheiten), die siderischen Umlaufszeiten (in mittleren Tagen) und die nach (II; 43) berechneten Werte C^2 zusammen, und zwar links für die vier sonnennächsten Planeten, rechts für die vier großen Jupitermonde in der Bewegung um ihren Zentralkörper.

Planet	a	U	$10^4\, C^2$	Trabant	a	U	$10^7\, C^2$
Merkur	0.38710	87.969	2.9591	I	0.002819	1.7691	2.826
Venus	0.72333	224.70	2.9591	II	0.004486	3.5512	2.826
Erde	1.00000	365.26	2.9591	III	0.007155	7.1546	2.825
Mars	1.52369	686.98	2.9591	IV	0.012585	16.6890	2.825

Innerhalb der hier benutzten Stellenzahl erweist sich die Größe C^2 also für jedes der beiden Systeme tatsächlich als konstant, während sie für verschiedene Systeme beträchtlich verschieden ausfällt. Für das Jupitersystem ist C^2 rund 1047 mal so klein wie für das Sonnensystem. Noch andere Werte würden wir erhalten, wenn wir die gleiche Rechnung für die Trabantensysteme anderer Planeten durchführten. Es wird daher zweckmäßig sein,

$$C^2 = M k^2 \tag{II; 44}$$

zu setzen, wobei nun k^2 eine *universelle Konstante* und M einen Faktor bedeutet, der für jedes System verschieden ist und offensichtlich ein Maß für die vom Zentralkörper ausgehende attraktive Kraft ist, und die man daher als Maßzahl für die gravitierende *Masse* des Zentralkörpers einführen kann. Wählt man, wie es in der Astronomie üblich ist, als Masseneinheit die Sonnenmasse, so beträgt dieser Festsetzung zufolge die Masse des Jupiter 1/1047.

Definiert man nun, wie oben, die vom Zentralkörper auf den Begleiter ausgeübte Kraft als das Produkt aus Masse und Beschleunigung des letzteren, so wird nach (II; 40)

$$\mathfrak{k} = -C^2 \frac{m}{r^2} \mathfrak{r}$$

oder, wenn man (II; 44) substituiert,

$$\boxed{\mathfrak{k} = -k^2 \frac{M m}{r^2} \mathfrak{r}} \tag{II; 45}$$

der allgemeine Ausdruck für die Gravitationskraft. *Diese Kraft ist demnach dem Produkt der beiden beteiligten Massen direkt und dem Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional!*

In dieser endgültigen Gestalt, die sich auch in allen ihren Konsequenzen als mit der Erfahrung verträglich erwiesen hat, gibt das NEWTONsche *Gravitationsgesetz* zu folgenden grundsätzlichen Überlegungen Anlaß: Nachdem festgestellt worden ist, daß die einem Körper innewohnende Attraktionskraft der Masse dieses Körpers proportional ist, wird es nur folgerichtig sein, wenn man die Eigenschaft, Anziehungskräfte auf andere Körper auszuüben, *jeder* Masse zubilligt. Wenn also die Sonne auf irgendeinen Planeten eine Kraft von der Form (II; 45) ausübt, so wird auch umgekehrt der Planet auf die Sonne eine solche Kraft ausüben. Da nun aber (II; 45) in bezug auf die beiden beteiligten Massen symmetrisch ist, werden diese beiden Kräfte dem Betrage nach gleich groß sein. Ihre Richtung ist aber entgegengesetzt, da die eine vom Planeten zur Sonne (in der Richtung $-\mathfrak{r}$), die andere aber von der Sonne zum Planeten (in der Richtung $\mathfrak{r}$) wirkt. Im mechanischen System Sonne–Planet gibt es daher die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte

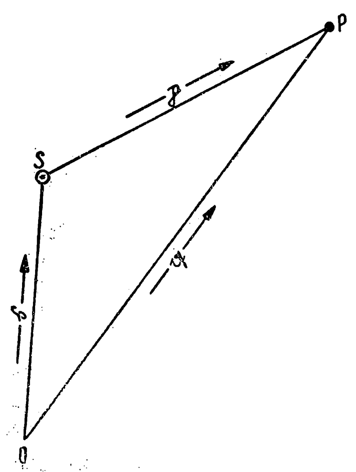


Abb. 21. Zweikörperproblem: Ortsvektoren.

$$\text{(II; 46)} \quad \mathfrak{k} = -k^2 \frac{Mm}{r^2}\mathfrak{r}; \quad \mathfrak{k}' = +k^2 \frac{Mm}{r^2}\mathfrak{r}.$$

Das entspricht einem allgemeinen Grundsatz der NEWTONschen Mechanik: In einem geschlossenen System, auf das keine äußeren Kräfte wirken, ist die Summe aller (inneren) Kräfte null, d.h., jede auftretende Kraft (actio) wird durch eine gleich große Gegenkraft (reactio) kompensiert: *Actio et reactio sunt aequales.*

Diese endgültige Fassung des Gravitationsgesetzes zwingt uns, die obigen Überlegungen, die zum dritten KEPLERschen Gesetz geführt haben, etwas zu modifizieren. Sei (Abb. 21) von einem ruhenden (d.h. von Kräften nicht beeinflußten) Anfangspunkt O des Raumes aus $\mathfrak{s}$ der Ortsvektor der Sonne (S), $\mathfrak{q}$ der Ortsvektor des Planeten (P) und $\mathfrak{p}$ der von der Sonne zum Planeten führende Vektor, so ist nach dem Gesetz der Vektorenaddition

$$\mathfrak{s} + \mathfrak{p} = \mathfrak{q}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{q} - \mathfrak{s}.$$

Die Beschleunigung des Planeten in bezug auf die Sonne ist demnach

$$\ddot{\mathfrak{p}} = \ddot{\mathfrak{q}} - \ddot{\mathfrak{s}}.$$

Gemäß (II; 46) sind die auf Planet bzw. Sonne wirkenden Kräfte

$$m\ddot{\mathfrak{q}} = -k^2 \frac{Mm}{r^2}\mathfrak{r} \quad \text{bzw.} \quad M\ddot{\mathfrak{s}} = +k^2 \frac{Mm}{r^2}\mathfrak{r},$$

woraus für die Beschleunigungen

$$\ddot{\mathfrak{q}} = -k^2 \frac{M}{r^2} \mathfrak{r} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\mathfrak{s}} = +k^2 \frac{m}{r^2} \mathfrak{r} \tag{II; 47}$$

folgt. Die Relativbeschleunigung des Planeten zur Sonne ist also

$$\ddot{\mathfrak{p}} = -k^2 \frac{M+m}{r^2} \mathfrak{r}. \tag{II; 48}$$

Vergleicht man (II; 48) mit (II; 37), so findet man für die Flächenkonstante der Planetenbahn den neuen Ausdruck

$$c = k\sqrt{p}\,\sqrt{M+m}. \tag{II; 49}$$

Setzt man dies mit (II; 8) gleich und bedenkt, daß $n = 2\pi/U$, so ergibt sich das dritte KEPLERsche Gesetz in der genaueren Form

$$\boxed{\frac{a^3}{U^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}(M+m) \quad (\text{KEPLER III})}. \tag{II; 50}$$

Das Verhältnis zwischen den Kuben der großen Halbachsen der Bahnen und den Quadraten der Umlaufszeiten ist also innerhalb eines Systems nicht, wie die ursprüngliche Fassung (II; 43) dieses Gesetzes vermuten ließ, eine für das ganze System gültige Konstante. Wird, wie oben, die Sonnenmasse $M = 1$ gesetzt, so hat der Ausdruck auf der rechten Seite von (II; 50) infolge des Faktors $1 + m$ für jeden Planeten einen individuellen Wert. Diese Unterschiede fallen aber im Planetensystem nicht sehr ins Gewicht, da die Massen aller Planeten gegen die Sonnenmasse sehr klein sind. Von den vier Planeten der obigen Tabelle besitzt die größte Masse die Erde mit $m = 1/329000$ (einschließlich Mond). Dieser Betrag ist so geringfügig, daß der Faktor $1 + m$ bei fünfstelliger Rechnung nicht merklich von der Einheit abweicht. Würde man aber die Tabelle durch die Daten des Jupiter vervollständigen, dessen Masse von der Größenordnung 10^{-3}, also bei gleicher Rechengenauigkeit nicht mehr zu vernachlässigen ist, so würde man finden:

$$a = 5.2028, \quad U = 4332.6, \quad C^2 = 2.9617 \cdot 10^{-4}$$

und in Übereinstimmung mit (II; 50)

$$C^2 = k^2 M\left(1 + \frac{m}{M}\right) = 2.9591\left(1 + \frac{1}{1047}\right) \cdot 10^{-4}. \tag{II; 51}$$

Die Diskrepanz zwischen den Formeln (II; 44) und (II; 51) beruht darauf, daß in der ersteren die der Sonne vom Planeten erteilte Beschleunigung außer acht gelassen wurde. Nur wenn diese verschwindend klein ist, gehen beide Formeln ineinander über.

Aus (II; 8) und (II; 49) leitet man für die mittlere Bewegung eines Planeten in der Zeiteinheit den neuen Ausdruck

$$n = k\sqrt{M + m}\, a^{-\frac{3}{2}} \tag{II; 52}$$

ab.

18. *Gravitationskonstante und Sonnenparallaxe*

Den numerischen Wert der Gravitationskonstante k leitet man am besten aus den Elementen der Erdbahn ab, wobei zur Bestimmung der Erdmasse die Bahnbewegung des Mondes um die Erde herangezogen werden kann. Setzen wir Masse, große Bahnhalbachse und Umlaufszeit der Erde gleich m, a, U, die entsprechenden Daten für den Mond gleich m_1, a_1, U_1, so gilt für die Bewegung des Systems Erde–Mond um die Sonne gemäß (II; 50)

$$\frac{a^3}{U^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}(1 + m + m_1) \tag{II; 53}$$

und für die Bewegung des Mondes um die Erde entsprechend

$$\frac{a_1^3}{U_1^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}(m + m_1).$$

Eliminiert man aus beiden Gleichungen die Massensumme $m + m_1$, so ergibt sich

$$k^2 = 4\pi^2\left(\frac{a^3}{U^2} - \frac{a_1^3}{U_1^2}\right)$$

oder

$$k = \frac{2\pi}{U} a^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{U}{U_1}\right)^2 \left(\frac{a_1}{a}\right)^3}.$$

Drückt man nun die großen Halbachsen in astronomischen Einheiten ($a = 1$) und die siderischen Umlaufszeiten in mittleren Sonnentagen aus, so wird

$$k = \frac{2\pi}{U}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{U}{U_1}\right)^2 a_1^3 - \cdots\right]$$

mit $a_1 = 1 : 389.3$; $U = 365.25636$; $U_1 = 27.32166$.

Das Hauptglied $2\pi/U$ liefert

$$k = 0.1720210, \quad \log k = 8.2355814 - 10. \tag{II; 54}$$

Das 1. Korrektionsglied in der Klammer beträgt $1.52 \cdot 10^{-6}$ und würde den oben angegebenen Wert von k nur um 2–3 Einheiten der 8. Dezimalstelle ändern. Bei siebenstelliger Rechnung, die für fast alle Anwendungen der theoretischen Formeln, mit denen wir es hier zu tun haben werden, völlig ausreicht, kommt man also mit dem Wert (II; 54) aus.

C. F. GAUSS hat in seiner „Theoria motus corporum coelestium" (1809) die Gravitationskonstante nach (II; 53) mit $a = 1$ und

$$U = 365^{\mathrm{d}}.2563835; \quad m + m_1 = 1 : 354710$$

zu

$$k = 0.01720209895$$

berechnet. Dieser Zahlenwert ist als „GAUSSsche Konstante" seither in allen himmelsmechanischen Rechnungen benutzt worden, obwohl inzwischen für U und $m + m_1$ genauere Werte bekannt geworden sind. Heute gelten die von NEWCOMB (um 1900) abgeleiteten Zahlenwerte

$$U = 365^{\mathrm{d}}.25636042; \quad m + m_1 = 1 : 329390 \tag{II; 55}$$

als die besten. Mit ihnen würde sich k geringfügig, aber doch für genaue Rechnung merklich ändern. Um nun zu vermeiden, daß die zahlreichen mit dem obigen Zahlenwert der GAUSSschen Konstante durchgeführten Rechnungen ihre Gültigkeit verlieren, ist man übereingekommen, statt für k mit der fortschreitenden Verbesserung unserer Kenntnis der astronomischen Konstanten ständig neue Werte einzuführen, die Gleichsetzung der astronomischen Längeneinheit mit der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne aufzugeben. Berechnet man unter Beibehaltung der GAUSSschen Konstanten die Größe a aus (II; 53) und den Daten (II; 55), so findet man

$$\log a = 0.000000013, \tag{II; 56}$$

d. h. also für die große Halbachse der Erdbahn einen Wert, der etwas größer als die astronomische Längeneinheit ist.

Um die „Astronomische Einheit" (A.E.) in irdischem Längenmaß ausdrücken zu können, ist es notwendig, die mittlere tägliche Parallaxe der Sonne ($\pi_\odot$) durch Messung so genau wie möglich zu bestimmen. Sie hängt mit a und dem Äquatorhalbmesser der Erde ϱ_0 durch die Gleichung

$$\sin \pi_\odot = \frac{\varrho_0}{a R}$$

zusammen, wo R die, ebenso wie ϱ_0, in km ausgedrückte Länge der A.E. und a die durch (II; 56) definierte Zahl bedeutet.

Die genaue Bestimmung der Sonnenparallaxe ist eine der schwierigsten Aufgaben der messenden Astronomie; ihre fundamentale Bedeutung leuchtet ein, da auf ihrer exakten Lösung letzten Endes die Möglichkeit beruht, alle Abstandsmessungen im Universum auf jenes einheitliche Maßsystem zurückzuführen, das in der gesamten Physik benutzt wird. Die Beschreibung der Methoden der Bestimmung der Sonnenparallaxe gehört in den Bereich der *Sphärischen Astronomie*. Hier soll nur dasjenige Verfahren kurz skizziert werden, das sich in der modernen Astronomie als das genaueste bewährt hat: Die Bestimmung dieser fundamentalen Konstanten durch Beobachtung von Planetoiden, die der Erde besonders nahe kommen, wie z. B. die kleinen Planeten *Eros* und *Amor*.

Durch genaue Messung der täglichen Parallaxe dieser Körper in ihrer größten Erdnähe (die bei Eros 0.16 A.E., bei Amor noch etwas weniger betragen kann) gelingt es, in dem zu einer bestimmten Zeit von Erde, Sonne und Planetoid gebildeten Dreieck, dessen Seitenverhältnisse aus der Himmelsmechanik bekannt sind, die eine Seite, nämlich den Abstand Erde–Planetoid, auch in irdischem Maß auszudrücken. Dadurch werden dann die anderen beiden Seiten des Dreiecks, also auch der Abstand Erde–Sonne, ebenfalls in km ausdrückbar.

Die besonderen Schwierigkeiten, die sich bei der Anwendung dieses Verfahrens ergeben, können an dieser Stelle nur gestreift werden. Zunächst ist klar, daß die einfachen Formeln von der Art (II; 50) für den Zusammenhang zwischen den Umlaufszeiten und den großen Bahnhalbachsen der Planeten streng nur für den Fall gültig sind, daß keiner der Planeten in seiner Bewegung um die Sonne durch die übrigen gestört wird. In Wirklichkeit dürfen diese störenden Kräfte nicht außer acht gelassen werden. Um sie berücksichtigen zu können, ist aber eine genaue Kenntnis der Bahnelemente und der Massen der störenden Planeten, einschließlich derjenigen des Systems Erde–Mond, erforderlich. Es ist klar, daß die Bewegung des Planetoiden, die zur Ermittlung der Sonnenparallaxe dienen soll, während der Opposition lange genug verfolgt werden muß und daß nach Möglichkeit auch mehrere aufeinanderfolgende Oppositionen beobachtet werden sollten, damit nicht nur die Elemente seiner eigenen Bewegung so genau wie möglich abgeleitet werden können, sondern auch genügend Material vorhanden ist, um die Massen der störenden Planeten, wenn nötig, zu korrigieren.

Die durch die Theorien der Himmelsmechanik gegebenen Zusammenhänge (über die an dieser Stelle noch nichts ausgeführt werden kann) führen für jede Beobachtung des scheinbaren Planetenorts auf Gleichungen, die neben den Verbesserungen der Bahnelemente des Planeten und der Sonnenparallaxe noch eine Anzahl weiterer Unbekannter enthalten, unter denen die Korrektionen der angenommenen Werte für die Massen der störenden Planeten die wichtigsten sind.

Eine weitere Schwierigkeit bietet die in Geschwindigkeit und Beschleunigung der Planetenörter enthaltene Zeiteinheit, als die normalerweise der mittlere Sonnentag oder der Sterntag gilt. Dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß diese aus der Rotationszeit des Erdkörpers abgeleitete Einheit unveränderlich ist. Untersuchungen, die erst in den letzten Jahrzehnten zu greifbaren Ergebnissen geführt haben, zeigen jedoch, daß die Rotationsdauer der Erde nicht konstant ist, sondern sehr langsam und unter Schwankungen zunimmt. So geringfügig diese Veränderlichkeit unserer naturgegebenen Zeiteinheit auch sein mag (sie ist, obwohl man sie schon lange vermutet hat, erst durch moderne Zeitmessungsgeräte, die Quarzuhren, meßbar geworden), so spielt sie doch bei den äußerst subtilen Untersuchungen dieser Art eine bedeutsame Rolle. So haben die jüngsten Arbeiten über die Neubestimmung der Sonnenparallaxe und der Planetenmassen aus den Beobachtungen der Erosoppositionen von 1931 und 1938 gezeigt, daß man eine von diesen Unregelmäßigkeiten der Erddrehung befreite Zeitskala (NEWTONsche Zeit, Inertialzeit) benutzen muß, wenn es gelingen soll, gewisse systematische Abweichungen zwischen Beobachtung und Theorie zum Verschwinden zu bringen.

Der numerische Wert der Gravitationskonstanten hängt von der Wahl der Längen-, Zeit- und Masseneinheit ab. Formel (II; 50) zeigt, daß sie die Dimension

$$\left[l^{\frac{3}{2}}\, t^{-1} m^{-\frac{1}{2}}\right]$$

besitzt. Drückt man den Faktor 2π statt im Bogenmaß in Bogensekunden aus, so ergibt sich statt (II; 54)

$$k = 3548''.1876.$$

In der Folge werden wir oft von der Möglichkeit Gebrauch machen, durch passende Wahl der Einheiten dafür zu sorgen, daß $k = 1$ wird und somit als lästiger Faktor in den Formeln der Himmelsmechanik verschwindet. Man erreicht das beispielsweise, wenn man als Zeiteinheit

$$\text{(II; 57)} \qquad \frac{1}{k} = 58.13244 \text{ mittlere Tage}$$

einführt, d.h. an Stelle der gewöhnlichen, in mittleren Tagen ausgedrückten Zeit t die neue Variable

$$\tau = kt$$

benutzt. Wir werden dieses Zeitmaß in den folgenden Kapiteln fast ausschließlich gebrauchen, zumal bei den Bewegungsproblemen der Planetoiden und der Kometen unseres Sonnensystems auch die Massen dieser kleinen Körper gegen die Sonnenmasse unbedenklich vernachlässigt werden können und somit auch der sonst mit k immer verbundene Faktor $\sqrt{1 + m}$ gleich eins gesetzt werden darf.

KAPITEL III

ANALYSIS DER ZWEIKÖRPERBEWEGUNG

19. *Die Differentialgleichungen der Zweikörperbewegung und ihre Lösungen*

Es ist bisher gezeigt worden, wie das NEWTONsche Gravitationsgesetz nach und nach aus den KEPLERschen Regeln gewonnen wurde. Zur völligen Klärung der Zusammenhänge wird es aber auch notwendig sein, die Umkehrung zu behandeln, d.h. zu zeigen, wie die KEPLERschen Regeln deduktiv aus der Formulierung des Gravitationsgesetzes folgen. Eine Lösung dieses Problems – die einfachste, die es wahrscheinlich gibt – haben wir bereits in Abschn. 16 kennengelernt, als wir zeigten, wie sich die Gleichung der Bahn als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (II; 39) der ebenen Zentralbewegung ergab, wenn wir der Zentralkraft die Form des NEWTONschen Attraktionsgesetzes gaben.

Die Gleichungen (II; 47) stellen zwei vektorielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Bewegung der beiden beteiligten Körper in einem „Inertialsystem" dar, d.h. in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung und dessen Achsenrichtungen unbeeinflußt von Kräften, also nur der „Trägheit" (inertia) unterworfen sind. Bedenken wir noch, daß (vgl. Abb. 21 und II; 25)

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q} - \mathfrak{s} = r\mathfrak{r},$$

so können wir (II; 47) auch in der Form

$$\text{(III; 1)} \qquad \begin{aligned} \ddot{\mathfrak{q}} &= -k^2 \frac{M}{r^3}(\mathfrak{q} - \mathfrak{s}), \\ \ddot{\mathfrak{s}} &= +k^2 \frac{m}{r^3}(\mathfrak{q} - \mathfrak{s}) \end{aligned}$$

schreiben. Wir erinnern uns, daß $\mathfrak{q}$, m Ortsvektor und Masse des Planeten, $\mathfrak{s}$, M Ortsvektor und Masse der Sonne bedeuten. Geben wir den Ortsvektoren $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{s}$ die rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1, z_1 (Planet) und x_0, y_0, z_0 (Sonne), so ist (III; 1) einem System von sechs skalaren Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\text{(III; 2)} \qquad \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -k^2 \frac{M}{r^3}(x_1 - x_0), & \ddot{x}_0 &= -k^2 \frac{m}{r^3}(x_0 - x_1), \\ \ddot{y}_1 &= -k^2 \frac{M}{r^3}(y_1 - y_0), & \ddot{y}_0 &= -k^2 \frac{m}{r^3}(y_0 - y_1), \\ \ddot{z}_1 &= -k^2 \frac{M}{r^3}(z_1 - z_0), & \ddot{z}_0 &= -k^2 \frac{m}{r^3}(z_0 - z_1) \end{aligned}$$

äquivalent, dessen Lösung zwölf Integrale erfordert.

Die Lösung dieses Problems der *ungestörten Zweikörperbewegung* gelingt sehr einfach, wenn man die vektorielle Form (III; 1) der Differentialgleichungen beibehält. Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit m, die zweite mit M, so erhält man

$$m\ddot{\mathfrak{q}} + M\ddot{\mathfrak{s}} = 0 \tag{III; 3}$$

als mathematischen Ausdruck für die Gültigkeit des Prinzips von der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung (dem Verschwinden der Resultante aller inneren Kräfte).

Zweimalige Integration von (III; 3) ergibt

$$m\mathfrak{q} + M\mathfrak{s} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'t, \tag{III; 4}$$

wobei $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ zwei konstante Vektoren sind. Setzt man

$$\mathfrak{a}' = (m + M)\,\mathfrak{a}; \quad \mathfrak{b}' = (m + M)\,\mathfrak{b},$$

so erhält (III; 4) die Gestalt

$$\boxed{\mathfrak{S} = \frac{m\mathfrak{q} + M\mathfrak{s}}{m + M} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}t \quad \text{(Schwerpunktssatz)}}\,. \tag{III; 5}$$

$\mathfrak{S}$ ist der Ortsvektor des *Schwerpunkts* der beiden Massen M und m. Dieser Punkt liegt auf der Verbindungsstrecke der beiden Himmelskörper und teilt sie im Verhältnis der Massen so, daß er der größeren Masse am nächsten liegt. Aus (III; 5) folgt nämlich

$$\mathfrak{q} - \mathfrak{S} = \frac{M}{m + M}(\mathfrak{q} - \mathfrak{s}); \quad \mathfrak{s} - \mathfrak{S} = -\frac{m}{m + M}(\mathfrak{q} - \mathfrak{s}). \tag{III; 6}$$

Der Schwerpunktssatz sagt aus, daß der Schwerpunkt der beiden Massen, die sich wechselseitig nach dem NEWTONschen Gesetz anziehen, linear (d.h. geradlinig und gleichförmig) im Raume fortschreitet. Die Bewegung des Schwerpunkts ist daher nach dem Trägheitsgesetz *kräftefrei*; er teilt diese Eigenschaft mit dem Anfangspunkt des Koordinatensystems, von dem wir vorausgesetzt hatten, daß es ein Inertialsystem sei. Auch der Koordinatenanfang darf also, ohne daß sich an dieser Eigenschaft, unbeschleunigt zu sein, etwas ändert, irgendeine geradlinig-gleichförmige Bewegung ausführen, statt zu ruhen, denn ein solches Zugeständnis würde ja lediglich bewirken, daß die Integrationskonstanten des Schwerpunktssatzes, die ihrer Natur nach willkürlich sind, sich entsprechend ändern. Es ist somit erlaubt, dem Koordinatenanfang die gleiche kräftefreie Bewegung wie dem Schwerpunkt zuzuschreiben und ihn dann durch eine einfache Parallelverschiebung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt selbst zu verlegen.

Man gelangt so zu zwei neuen Differentialgleichungen für die Bewegung der beiden Massen in bezug auf ihren Schwerpunkt. Subtrahiert man von den Gleichungen (III; 1)

$$\ddot{\mathfrak{S}} = 0$$

und eliminiert auf den rechten Seiten $\mathfrak{s}$ bzw. $\mathfrak{q}$ durch (III; 5):

$$\mathfrak{s} = \frac{M+m}{M}\mathfrak{S} - \frac{m}{M}\mathfrak{q} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{q} = \frac{M+m}{m}\mathfrak{S} - \frac{M}{m}\mathfrak{s},$$

so erhält man leicht

$$\text{(III; 7)} \qquad \begin{aligned} \ddot{\mathfrak{q}} - \ddot{\mathfrak{S}} &= -k^2\frac{M+m}{r^3}(\mathfrak{q} - \mathfrak{S}), \\ \ddot{\mathfrak{s}} - \ddot{\mathfrak{S}} &= -k^2\frac{M+m}{r^3}(\mathfrak{s} - \mathfrak{S}), \end{aligned}$$

also für die beiden auf den Schwerpunkt als Koordinatenanfang bezogenen Ortsvektoren $\mathfrak{q} - \mathfrak{S}$ (Planet) und $\mathfrak{s} - \mathfrak{S}$ (Sonne) je eine Differentialgleichung von derselben Form, der gleichen übrigens, die man für den Vektor Sonne–Planet $(\mathfrak{q} - \mathfrak{s})$ erhält, wenn man die zweite der Gleichungen (III; 1 oder 7) von der ersten subtrahiert:

$$\text{(III; 8)} \qquad \ddot{\mathfrak{q}} - \ddot{\mathfrak{s}} = -k^2\frac{M+m}{r^3}(\mathfrak{q} - \mathfrak{s}).$$

Die drei Gleichungen (III; 7, 8) unterscheiden sich in einem allerdings sehr wesentlichen Punkt voneinander: Nur in (III; 8), also für die Bewegung des Planeten um die Sonne, stimmt die Größe r im Nenner der rechten Seite der Differentialgleichung mit dem Betrag der betreffenden Vektorfunktion überein, denn es ist ja $r = |\mathfrak{q} - \mathfrak{s}|$. Man kann aber auch die beiden Gleichungen (III; 7) auf eine Form bringen, für die dasselbe gilt. Sei q der Betrag des Vektors $\mathfrak{q} - \mathfrak{S}$, also der Abstand Schwerpunkt–Planet, und s der Betrag von $\mathfrak{s} - \mathfrak{S}$, also der Abstand Sonne–Schwerpunkt, so gilt offenbar

$$q + s = r; \quad \frac{q}{s} = \frac{M}{m},$$

also

$$r = q\frac{M+m}{M} = s\frac{M+m}{m}.$$

Setzt man dies in (III; 7) ein, so ergibt sich

$$\text{(III; 9)} \qquad \begin{aligned} \ddot{\mathfrak{q}} - \ddot{\mathfrak{S}} &= -\frac{k^2}{q^3}\frac{M^3}{(M+m)^2}(\mathfrak{q} - \mathfrak{S}), \\ \ddot{\mathfrak{s}} - \ddot{\mathfrak{S}} &= -\frac{k^2}{s^3}\frac{m^3}{(M+m)^2}(\mathfrak{s} - \mathfrak{S}). \end{aligned}$$

Alle drei Gleichungen besitzen also die gemeinsame Form

$$\text{(III; 10)} \qquad \ddot{\mathfrak{p}}_i = -\frac{\varkappa_i^2}{|\mathfrak{p}_i|^3}\mathfrak{p}_i,$$

wobei der konstante Faktor $\varkappa_i^2$ in den drei Fällen verschiedenen Funktionen der beiden Massen gleich ist. Es ist nämlich

$$(\text{III}; 11) \begin{cases} 1.\ \text{für } \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q} - \mathfrak{S} \quad (\text{Schwerpunkt–Planet}) \quad \varkappa_1^2 = k^2 \dfrac{M^3}{(M+m)^2}, \\ 2.\ \text{für } \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{s} - \mathfrak{S} \quad (\text{Schwerpunkt–Sonne}) \quad \varkappa_2^2 = k^2 \dfrac{m^3}{(M+m)^2}, \\ 3.\ \text{für } \mathfrak{p} = \mathfrak{q} - \mathfrak{s} \quad (\text{Sonne–Planet}) \quad \varkappa^2 = k^2 (M+m). \end{cases}$$

In allen drei Fällen wird die Bahnbewegung von der gleichen Form sein, nämlich derjenigen, die durch die Lösung der Differentialgleichung (III; 10) gegeben ist. Nach (III; 6) ist nämlich

$$\mathfrak{p}_1 = \frac{M}{M+m}\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p}_2 = -\frac{m}{M+m}\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2,$$

d.h., die drei Vektoren sind jederzeit gleich- bzw. entgegengesetzt gerichtet, während ihre Beträge in konstanten Verhältnissen zueinander stehen. Die drei Bahnen sind daher ähnlich: Jede von ihnen läßt sich aus jeder der beiden anderen durch eine affine Transformation (durch eine isotrope, d.h. nach allen Richtungen gleichmäßige, Dehnung) herstellen.

Es genügt also, wenn wir uns in der Folge mit der Gleichung (III; 10) beschäftigen, der wir die allgemeine Form

$$(\text{III}; 12) \qquad \boxed{\ddot{\mathfrak{p}} = -\frac{\varkappa^2}{r^3}\mathfrak{p} \quad (r = |\mathfrak{p}|)}$$

geben. Dabei werden wir von den drei Fällen (III; 11) durchweg den dritten bevorzugen, der die Bewegung in bezug auf den Zentralkörper als Koordinatenanfang betrifft. Nur in besonderen Fällen, z.B. bei der Bahnbewegung von Doppelsternen, würden auch die beiden anderen zur Geltung kommen.

(III; 12) ist eine vektorielle Differentialgleichung 2. Ordnung, die drei skalaren Differentialgleichungen derselben Art für die drei Koordinaten von $\mathfrak{p}$ äquivalent ist. Sie besitzt infolgedessen sechs Integrale; ihre Lösungen sind durch sechs willkürliche Integrationskonstanten (Bahnelemente) bestimmt. Multipliziert man (III; 12) vektoriell mit $\mathfrak{p}$, so ergibt sich

$$[\mathfrak{p}\ddot{\mathfrak{p}}] = -\frac{\varkappa^2}{r^3}[\mathfrak{p}\mathfrak{p}] = 0,$$

da ja das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst verschwindet. Diese Gleichung läßt sich sofort integrieren: Es ist

$$(\text{III}; 13) \qquad \boxed{[\mathfrak{p}\dot{\mathfrak{p}}] = \mathfrak{g} \quad (\text{Flächensatz})},$$

wobei $\mathfrak{g}$ einen konstanten Vektor darstellt, der in Gestalt seiner Koordinaten drei der gesuchten sechs Integrationskonstanten in sich vereinigt. Das Integral (III; 13) ist mit dem uns bereits bekannten Flächenintegral identisch. Aus der Definition des Vektorprodukts folgt, daß $\mathfrak{g}$ ein auf der durch $\mathfrak{p}$ und $\dot{\mathfrak{p}}$ bestimmten Ebene normaler Vektor ist. Das bedeutet aber, daß die Bahnbewegung des Himmelskörpers in einer festen Ebene vor sich geht, die auch den Koordinatenanfang (Zentralkörper bzw. Schwerpunkt) enthält. Man darf also auf $\mathfrak{p}$ und seine Ableitungen nach der Zeit die für jede ebene Bewegung gültigen Formeln (II; 25, 30) anwenden und findet dann

(III; 14) $$\mathfrak{g} = r\dot{r}\,[\mathfrak{r}\mathfrak{r}] + r^2\dot{\varphi}\,[\mathfrak{r}\mathfrak{m}] = r^2\dot{\varphi}\,\mathfrak{n} = c\,\mathfrak{n},$$

da $[\mathfrak{r}\mathfrak{r}] = 0$ und da $[\mathfrak{r}\mathfrak{m}] = \mathfrak{n}$ ein auf der Bahnebene senkrecht stehender Einheitsvektor ist. Der Betrag des Vektors $\mathfrak{g}$, den man deshalb auch als den *Vektor der Flächengeschwindigkeit (Drehimpulsvektor)* bezeichnen kann, ist also gleich der Flächenkonstanten.

Ein weiteres Vektorintegral erhält man, wenn man (III; 13) mit (III; 12) vektoriell multipliziert. Es ergibt sich zunächst

$$[\ddot{\mathfrak{p}}\mathfrak{g}] = -\frac{\varkappa^2}{r^3}\,[\mathfrak{p}\,[\mathfrak{p}\,\dot{\mathfrak{p}}]] = -\frac{\varkappa^2}{r^3}\,\{(\mathfrak{p}\,\dot{\mathfrak{p}})\,\mathfrak{p} - (\mathfrak{p}\,\mathfrak{p})\,\dot{\mathfrak{p}}\},$$

wenn man einen Satz der Vektoralgebra über die vektorielle Multiplikation eines Vektors mit einem Vektorprodukt anwendet. Da nun aber

$$(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}) = r^2$$

und, wie man durch Differenzieren dieser Identität beweist,

(III; 15) $$(\mathfrak{p}\,\dot{\mathfrak{p}}) = r\dot{r},$$

so kann man auch schreiben:

$$[\ddot{\mathfrak{p}}\mathfrak{g}] = \varkappa^2\,\frac{r\dot{\mathfrak{p}} - \dot{r}\mathfrak{p}}{r^2} = \varkappa^2\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{p}}{r}\right).$$

Diese Gleichung ist integrabel und ergibt

(III; 16) $$\boxed{[\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{g}] = \frac{\varkappa^2}{r}\,\mathfrak{p} + \mathfrak{f} \quad \text{(Laplacesches Integral)}}\,.$$

Das ist das *Laplacesche Integral* mit der neuen vektoriellen Integrationskonstanten $\mathfrak{f}$, die wiederum drei skalaren Konstanten äquivalent ist. Diese sind allerdings von den Flächenkonstanten nicht unabhängig. Schreibt man (III; 16) in der Form

$$\mathfrak{f} = [\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{g}] - \frac{\varkappa^2}{r}\,\mathfrak{p},$$

so bemerkt man, daß $\mathfrak{f}$ in der Bahnebene liegt, da sowohl $[\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{g}]$ als auch $\mathfrak{p}$ der Bahnebene angehören. Es gilt also die Beziehung

$$(\mathfrak{f}\mathfrak{g}) = 0,$$

da $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ aufeinander senkrecht stehen. Zwischen den Koordinaten c_1, c_2, c_3 von $\mathfrak{g}$ und den Koordinaten d_1, d_2, d_3 von $\mathfrak{f}$ besteht demnach die identische Beziehung

$$c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = 0, \tag{III; 17}$$

so daß also nur fünf der sechs Konstanten c_i und d_i voneinander unabhängig sind, während die sechste aus (III; 17) folgt. Mit anderen Worten: Während $\mathfrak{g}$ ein willkürlich im Raum gegebener Vektor ist, bleibt $\mathfrak{f}$ auf die durch $\mathfrak{g}$ bestimmte Ebene beschränkt und ist daher als ebener Vektor aufzufassen, zu dessen Festlegung zwei Koordinaten notwendig und hinreichend sind, etwa sein Betrag d und seine von irgendeiner festen Anfangsrichtung in der Bahnebene gezählte Richtung φ_0.

Multipliziert man schließlich (III; 16) skalar mit $\mathfrak{p}$, so erhält man

$$(\mathfrak{p}[\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{g}]) = \frac{\varkappa^2}{r}(\mathfrak{p}\mathfrak{p}) + (\mathfrak{p}\mathfrak{f}).$$

Da nach dem Satz von der zyklischen Vertauschbarkeit der Faktoren gemischter Produkte

$$(\mathfrak{p}[\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{g}]) = (\mathfrak{g}[\mathfrak{p}\dot{\mathfrak{p}}]) = (\mathfrak{g}\mathfrak{g}) = c^2$$

und ferner $(\mathfrak{p}\mathfrak{p}) = r^2$ ist, so folgt hieraus unmittelbar, wenn wir mit $\varphi - \varphi_0$ den von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{f}$ gebildeten Winkel bezeichnen,

$$c^2 = \varkappa^2 r + r d \cos(\varphi - \varphi_0)$$

oder

$$r = \frac{\dfrac{c^2}{\varkappa^2}}{1 + \dfrac{d}{\varkappa^2}\cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}, \tag{III; 18}$$

d.h. die Gleichung der Bahn, die sich als ein Kegelschnitt erweist, dessen einer Brennpunkt im Koordinatenursprung liegt. Die Exzentrizität $e = d/\varkappa^2$ kann jeden beliebigen Wert zwischen 0 und ∞ annehmen, während negative Werte ausgeschlossen sind, da d als Betrag eines Vektors wesentlich positiv ist. Über das erste KEPLERsche Gesetz hinaus, das nur von *Ellipsen* ($0 \leqq e < 1$) spricht, sind demnach auch *Parabeln* ($e = 1$) und *Hyperbeln* ($e > 1$) als Bahnformen zulässig. Tatsächlich kommen alle diese Bewegungsarten unter den Himmelskörpern vor. Elliptisch sind die Bahnen der Planeten und ihrer Trabanten, der periodischen Kometen und der Doppelsterne, parabolisch viele Kometenbahnen, während alle drei Bahnformen bei den Meteoren beobachtet werden. Gelegentlich sind auch hyperbolische Kometenbahnen berechnet worden, doch waren deren Exzentrizitäten stets nur geringfügig größer als eins.

Von den sechs Integralen der Differentialgleichung (III; 12) fehlt jetzt nur noch eines. Wir erhalten es aus dem Flächensatz

$$r^2\,d\varphi = c\,dt,$$

indem wir r mittels (III; 18) durch φ ausdrücken und integrieren:

$$p^2\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^2} = c\int\limits_{t_0}^{t}dt = c(t-t_0). \tag{III; 19}$$

Die neue Integrationskonstante t_0 ist der Zeitpunkt, für den $\varphi = \varphi_0$ wird, also gemäß (III; 18) der Radiusvektor r sein Minimum erreicht (Periheldurchgangszeit). Wie schon gezeigt wurde, führt die Auswertung des Integrals auf der linken Seite von (III; 19) im Falle der Ellipse auf die *KEPLERsche Gleichung*. In den anderen Fällen ergeben sich ähnliche Beziehungen (siehe Abschn. 22).

Der LAPLACEsche Vektor $\mathfrak{f}$ hat, wie oben bemerkt, in der Bahnebene die Richtung $\varphi = \varphi_0$, zeigt also nach dem Perihel der Bahn; sein Betrag $d = \varkappa^2 e$ ist der Exzentrizität des Kegelschnitts proportional. Für $e = 0$ (Kreisbahn) verschwindet f, übereinstimmend mit der Tatsache, daß kreisförmige Bahnen ein Perizentrum nicht besitzen, da alle ihre Punkte vom Attraktionszentrum gleich weit entfernt sind.

Ist die Bahnebene einmal festgelegt, so sind für die Definition der Bahn nach Form, Größe und Lage drei Konstanten notwendig und hinreichend, etwa φ_0, e und p. Jede der Variablen, durch die der Ort des Himmelskörpers in der Bahn bestimmt wird, muß also einer Differentialgleichung 3. Ordnung genügen, die sie als Funktion der Zeit bestimmt. So findet man aus (II; 32–34)

$$\dot r = c\frac{e}{p}\sin v;\quad \dot v = \frac{c}{r^2};$$

$$\ddot r = \frac{c^2}{r^2}\frac{e}{p}\cos v = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)$$

und durch nochmaliges Differenzieren nach der Zeit

$$\dddot r = -2\frac{c^2}{r^3}\dot r\frac{e}{p}\cos v - \frac{c^2}{r^2}\dot v\frac{e}{p}\sin v =$$

$$= -2\frac{\dot r\ddot r}{r} - c^2\frac{\dot r}{r^4}.$$

Andererseits folgt aus der Formel für $\ddot r$

$$\frac{c^2}{r^3} = \ddot r + \frac{c^2}{r^2 p} = \ddot r + \frac{\varkappa^2}{r^2},$$

wenn man $c = \varkappa \sqrt{p}$ setzt. Benutzt man diese Beziehung zur Elimination von c, so erhält man schließlich

$$\dddot{r} + 3\frac{\dot{r}\ddot{r}}{r} + \varkappa^2 \frac{\dot{r}}{r^3} = 0 \qquad \text{(III; 20)}$$

als Differentialgleichung 3. Ordnung für den Radiusvektor, in deren Koeffizienten die Bahnkonstanten nicht mehr vorkommen. Wir werden später auf diese bemerkenswerte Gleichung noch zurückkommen.

20. *Der Energiesatz und die Geschwindigkeitsbeziehung*

Im vorigen Abschnitt haben wir die Integration des Problems der Zweikörperbewegung nach dem NEWTONschen Gesetz vollständig durchgeführt. Die zwölf Integrale wurden dabei durch vier „Sätze" geliefert: Den *Schwerpunktssatz* mit sechs unabhängigen Integrationskonstanten (den Koordinaten des Ortes und der Geschwindigkeit des Schwerpunktes in einem beliebigen Inertialsystem), den *Flächensatz* mit drei Konstanten (den Koordinaten des Flächengeschwindigkeitsvektors bzw. der Flächenkonstante c und den Richtungskonstanten der Bahnnormale), das *LAPLACEsche Integral* mit zwei Konstanten (den Koordinaten des LAPLACEschen Vektors in der Bahnebene bzw. der Exzentrizität der Bahn und dem Richtungswinkel nach dem Perizentrum) und schließlich die *KEPLERsche Gleichung* in ihrer allgemeinsten Form (III; 19) mit einer Konstanten (der Perihelzeit).

Wenn wir darüber hinaus noch weitere Integrale finden sollten, so kann es sich nur noch um Funktionen der bereits bekannten handeln. Eines der wichtigsten dieser Integrale, das *Energieintegral*, erhalten wir, wenn wir (III; 12) skalar mit $\dot{\mathfrak{p}}$ multiplizieren:

$$(\dot{\mathfrak{p}}\ddot{\mathfrak{p}}) = -\frac{\varkappa^2}{r^3}(\mathfrak{p}\dot{\mathfrak{p}}).$$

Diese Gleichung ist integrabel, da

$$(\dot{\mathfrak{p}}\ddot{\mathfrak{p}}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\mathfrak{p}}\dot{\mathfrak{p}}); \quad (\mathfrak{p}\dot{\mathfrak{p}}) = r\dot{r}; \quad -\frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Wir erhalten also durch Integration

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathfrak{p}}\dot{\mathfrak{p}}) = \frac{1}{2}V^2 = \frac{\varkappa}{r} + h, \qquad \text{(III; 21)}$$

wo V den Betrag der Geschwindigkeit und h eine skalare Integrationskonstante bedeutet.

Eine andere Art, diese Beziehung abzuleiten, ist folgende: Bezeichnet man die drei rechtwinkligen Ortskoordinaten des Planeten mit q_i ($i = 1, 2, 3$)

und die Geschwindigkeitskoordinaten mit $p_i = \dot{q}_i$, so kann man (III; 12) durch folgende sechs skalaren Differentialgleichungen 1. Ordnung ersetzen:

$$\dot{q}_i = p_i,$$
$$\dot{p}_i = \ddot{q}_i = -\frac{\varkappa^2}{r^3} q_i, \quad \left(r^2 = \sum_{i=1}^{3} q_i^2\right).$$

Setzt man nun

(III; 22) $$H(q_1, q_2, q_3; \; p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} \sum p_i^2 - \frac{\varkappa^2}{\sqrt{\sum q_i^2}},$$

so nehmen diese sechs Differentialgleichungen die „*kanonische*" Form

(III; 23) $$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

an. Multipliziert man diese Gleichungen mit $\dot{p}_i$ bzw. $-\dot{q}_i$ und summiert über alle i, so ergibt sich

$$0 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i\right) = \frac{dH}{dt},$$

d.h., es ist

$$H = \text{const} = h$$

das Energieintegral.

Wir wenden nun diesen Satz auf die drei Bewegungsfälle (III; 10) an. Für diese Fälle sei:

1. (Bewegung des Planeten um den Schwerpunkt des Systems): Geschwindigkeit V_1, Radiusvektor q, Integrationskonstante h_1;

2. (Bewegung der Sonne um den Schwerpunkt des Systems): Geschwindigkeit V_2, Radiusvektor s, Integrationskonstante h_2;

3. (Bewegung des Planeten um die Sonne): Geschwindigkeit V, Radiusvektor r, Integrationskonstante h.

Multiplizieren wir in den ersten beiden Fällen die Gleichung (III; 21) mit der jeweiligen Masse des bewegten Körpers, so ergibt sich, wenn wir noch für den Massenfaktor $\varkappa^2$ die entsprechenden Werte aus (III; 10) einsetzen,

$$m h_1 = \frac{1}{2} m V_1^2 - \frac{k^2}{q} \frac{m M^3}{(M + m)^2},$$

$$M h_2 = \frac{1}{2} M V_2^2 - \frac{k^2}{s} \frac{M m^3}{(M + m)^2}$$

oder, da (siehe S. 90)

$$q = \frac{M}{M+m} r, \quad s = \frac{m}{M+m} r,$$

$$m h_1 = \frac{1}{2} m V_1^2 - k^2 \frac{Mm}{r} \cdot \frac{M}{M+m},$$

$$M h_2 = \frac{1}{2} M V_2^2 - k^2 \frac{Mm}{r} \cdot \frac{m}{M+m}.$$

Die Summe dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\boxed{\begin{aligned} E &= T - U = m h_1 + M h_2 = \\ &= \frac{1}{2}(m V_1^2 + M V_2^2) - k^2 \frac{Mm}{r} \quad \text{(Energiesatz)} \end{aligned}} \tag{III; 24}$$

Die neue Konstante E, die auf den Schwerpunkt des Systems bezogen ist und in bezug auf die Massen, Koordinaten und Geschwindigkeiten der beiden Körper völlig symmetrisch gebaut ist, bezeichnet man als die *Gesamtenergie* des Systems, die Gleichung (III; 24) als den *Energiesatz*. E setzt sich zusammen aus der *kinetischen Energie*

$$T = \frac{1}{2}(m V_1^2 + M V_2^2)$$

und der *potentiellen Energie*

$$-U = -k^2 \frac{Mm}{r}$$

des Systems. Der Energiesatz besagt also, daß die Gesamtenergie des Systems konstant ist (Satz von der Erhaltung der Energie). Er gilt natürlich auch, wenn wir, wie im dritten Fall (III; 10), den Koordinatenanfangspunkt in die Sonne legen. Es ist dann entsprechend

$$E = m h = \frac{1}{2} m V^2 - k^2 \frac{m(M+m)}{r}. \tag{III; 25}$$

Hier bedeutet V die Relativgeschwindigkeit des Planeten zur Sonne. Die Größe U, eine skalare Funktion des Abstandes beider Körper, heißt das *Potential* des Systems und hat im Falle (III; 25) die Form

$$U = k^2 \frac{m(M+m)}{r}.$$

Sie besitzt folgende merkwürdige Eigenschaft: Schreibt man die Differentialgleichung (III; 12) in rechtwinkligen Koordinaten mit dem Ursprung in der

Sonne $[\varkappa^2 = k^2 (M + m)]$, so erhält man als Koordinaten der auf den Planeten wirkenden Kraft

$$
\text{(III; 26)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -k^2 m (M + m) \frac{x}{r^3} = \frac{\partial U}{\partial x}, \\
m\ddot{y} &= -k^2 m (M + m) \frac{y}{r^3} = \frac{\partial U}{\partial y}, \\
m\ddot{z} &= -k^2 m (M + m) \frac{z}{r^3} = \frac{\partial U}{\partial z},
\end{aligned}
\right.
$$

wie man leicht bestätigt, wenn man bei der partiellen Differentiation von U berücksichtigt, daß

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{also} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{usw.}$$

ist. Sind $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren in Richtung der drei Koordinatenachsen, so läßt sich wegen (III; 26) die Bewegungsgleichung (III; 12) auch in der Form

$$\text{(III; 27)} \qquad m\ddot{\mathfrak{p}} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathfrak{k} = \operatorname{grad} U$$

schreiben, d. h., *die Kraft, die auf den Planeten wirkt, ist gleich dem Gradienten der Potentialfunktion!*

Aus (III; 21) läßt sich der Zusammenhang zwischen der Energiekonstanten h und den im vorigen Abschnitt definierten Integrationskonstanten der Bahnbewegung herleiten. Multiplizieren wir die erste Gleichung (II; 30) mit sich selbst skalar, so erhalten wir für das Quadrat der Geschwindigkeit

$$V^2 = (\dot{\mathfrak{p}}\dot{\mathfrak{p}}) = \dot{r}^2 (\mathfrak{r}\mathfrak{r}) + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{m}) + r^2\dot{\varphi}^2\,(\mathfrak{m}\mathfrak{m})$$

oder, da $(\mathfrak{r}\mathfrak{r}) = (\mathfrak{m}\mathfrak{m}) = 1$, $(\mathfrak{r}\mathfrak{m}) = 0$,

$$\text{(III; 28)} \qquad V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

Ersetzt man nun r, $\dot{r}$, $\dot{\varphi} = \dot{v}$ durch (II; 31–33), so ergibt sich

$$V^2 = \frac{c^2}{p^2} e^2 \sin^2 v + \frac{c^2}{p^2} (1 + e\cos v)^2 = \frac{c^2}{p^2} (1 + 2e\cos v + e^2) =$$

$$= \frac{c^2}{p}\left(2\frac{1 + e\cos v}{p} - \frac{1 - e^2}{p}\right) = \frac{c^2}{p}\left(\frac{2}{r} - \frac{1 - e^2}{p}\right), \quad \text{also wegen} \quad c = \varkappa\sqrt{p}$$

$$\text{(III; 29)} \qquad V^2 = \varkappa^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1 - e^2}{p}\right).$$

Andererseits ist nach (III; 21)

$$V^2 = \varkappa^2\left(\frac{2}{r} + \frac{2h}{\varkappa^2}\right).$$

Daher ist

(III; 30) $$h = -\varkappa^2 \frac{1 - e^2}{2p}.$$

Nun ist nach (II; 2) für die *Ellipse* $p = a(1 - e^2)$; für die *Hyperbel* aber, wie aus der Geometrie bekannt, $p = a(e^2 - 1)$ der Ausdruck für den Parameter der Bahn, der seiner geometrischen Bedeutung nach eine wesentlich positive Größe darstellt. Wir können dieser Formel einheitlich die Gestalt

$$p = a(1 - e^2)$$

geben, wenn wir die Verabredung treffen, die Größe a im Falle der Hyperbel als negativ anzusehen. Unter dieser Voraussetzung dürfen wir statt (III; 30) einheitlich

$$h = -\frac{\varkappa^2}{2a}$$

und für das Quadrat der Geschwindigkeit

(III; 31) $$\boxed{V^2 = \varkappa^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

schreiben. Diese Formel ist auch für die *Parabel* richtig, für die $a = \infty$ wird, denn es ist ja dann $e = 1$ und, da p stets endlich ist, nach (III; 30) $h = 0$.

Die *Geschwindigkeitsrelation* (III; 31), die nur eine andere Form des Energiesatzes darstellt, lehrt, daß die Geschwindigkeit eines Himmelskörpers im Gravitationsfeld der Sonne, abgesehen von r, nur noch von der großen Halbachse der Bahn, nicht aber von deren Exzentrizität abhängt. Ferner folgt aus ihr, da beide Seiten von (III; 31) stets > 0 sein müssen[1]), daß für elliptische Bahnen ($a > 0$) stets $r < 2a$ ist, während für $a = \infty$ (Parabel) und $a < 0$ (Hyperbel) der Abstand des Himmelskörpers von der Sonne auch unendlich groß werden kann. Für die *Parabel* lautet die Geschwindigkeitsbeziehung

(III; 32) $$V^2 = \frac{2\varkappa^2}{r}; \quad V = \varkappa\sqrt{\frac{2}{r}}.$$

Die Geschwindigkeit eines die Sonne in einer Parabelbahn umlaufenden Kometen oder Meteors ist demnach der Quadratwurzel aus dem Abstand von der Sonne umgekehrt proportional, wird im Unendlichen null und hängt im übrigen von den Bahnelementen nicht ab, wohl aber von der Masse, da $\varkappa = k\sqrt{1 + m}$, wenn die Sonnenmasse gleich eins gesetzt wird. Wegen der Geringfügigkeit der

---

[1]) $V = 0$ ist für endliches r nur bei den geradlinigen Bahnen möglich, die einen singulären Fall der Zweikörperbewegung darstellen (siehe Abschn. 26).

Masse der Kometen (und erst recht der Meteore) darf aber stets $m = 0$ gesetzt werden, so daß sich (III; 32) praktisch auf

$$V = k\sqrt{\frac{2}{r}}$$

reduziert. So haben also alle auf Parabeln um die Sonne laufenden Kometen und Meteore in der gleichen Sonnenentfernung auch die gleiche Geschwindigkeit. Insbesondere ist die Geschwindigkeit aller Meteore, die aus parabolischen Bahnen auf die Erde stürzen, in bezug auf die als ruhend angenommene Sonne stets die gleiche, nämlich, wenn wir den Sonnenabstand der Erde im Zeitpunkt des Einfangens (d.h., wenn die hier vernachlässigte Anziehungskraft der Erde sich bemerkbar zu machen beginnt) und damit auch den des Meteors gleich eins setzen,

$$V = k\sqrt{2}\,\frac{\text{A.E.}}{\text{Tag}} = 42.1\,\frac{\text{km}}{\text{sec}},$$

wie man leicht berechnet, wenn man für k den Wert (II; 54) setzt.

Bei nichtparabolischen Bahnen ist der zweite Summand in (III; 31) von null verschieden; er bewirkt im Fall der Ellipse eine Verminderung, im Falle der Hyperbel eine Vergrößerung der Geschwindigkeit gegen die parabolische. Kennt man also Radiusvektor und Relativgeschwindigkeit in bezug auf die Sonne für irgendeinen Zeitpunkt, so genügen diese Daten zur Bestimmung der Bahnform. Das Kriterium lautet:

$$\text{(III; 33)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} V < \varkappa\sqrt{\dfrac{2}{r}} & \text{(Ellipse)} \\ V = \varkappa\sqrt{\dfrac{2}{r}} & \text{(Parabel)} \\ V > \varkappa\sqrt{\dfrac{2}{r}} & \text{(Hyperbel)} \end{array} \right.$$

Für Kreisbahnen ($r = a$) ergibt sich aus (III; 31) insbesondere

$$V = \frac{\varkappa}{\sqrt{a}} = \text{const.}$$

Die Formel (III; 31) läßt sich noch weiter vereinfachen, wenn man nach (II; 20) den „antifokalen Abstand“

$$s = 2a - r$$

einführt. Es wird dann

$$\text{(III; 34)} \qquad V^2 = \frac{\varkappa^2 s}{ar}.$$

Diese Formel gilt zunächst nur für die Ellipse, läßt sich aber ohne Schwierigkeit auch auf die Hyperbel übertragen, wenn man neben a auch s negativ sein läßt.

Für die Parabel wird (III; 34) allerdings unbestimmt, da sowohl s als auch a unendlich groß werden. Aus (II; 20) folgt aber, daß der Quotient s/a dem Grenzwert 2 zustrebt, so daß (III; 34) in die mittlere Formel (III; 33) übergeht, wie es sein muß.

21. *Der Hodograph der Zweikörperbewegung*

Trägt man Orts- und Geschwindigkeitsvektor eines bewegten Punktes im Koordinatenanfangspunkt an, so beschreibt die Spitze des Ortsvektors die Bahnkurve der Bewegung, die des Geschwindigkeitsvektors eine andere Kurve, die ebenfalls für die Bewegung charakteristisch ist und die man als *Hodograph* bezeichnet. Allgemein ist nach (II; 26)

$$\dot{\mathfrak{p}} = \dot{r}\mathfrak{r} + r\dot{\varphi}\mathfrak{m}.$$

Für die Zweikörperbewegung ergibt sich nach (II; 31–33), wenn wir $\varphi = v$ und $c = \varkappa\sqrt{p}$ setzen, der spezielle Ausdruck

$$\dot{\mathfrak{p}} = \varkappa\sqrt{p}\left(\mathfrak{r}\frac{e}{p}\sin v + \mathfrak{m}\frac{1 + e\cos v}{p}\right) =$$

$$= \frac{\varkappa e}{\sqrt{p}}(\mathfrak{r}\sin v + \mathfrak{m}\cos v) + \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\mathfrak{m}.$$

Dabei ist $\mathfrak{j} = \mathfrak{r}\sin v + \mathfrak{m}\cos v$, wie man der Abb. 20 unmittelbar entnimmt, ein Einheitsvektor, der mit der Richtung $\mathfrak{r}$ den Winkel $\frac{\pi}{2} - v$ einschließt, d.h. gegen die Perihelrichtung um 90° im Sinne der Bahnbewegung verschoben ist. Er steht demnach auf der großen Bahnachse senkrecht. Der Hodograph der Zweikörperbewegung wird also durch

$$\dot{\mathfrak{p}} = \frac{\varkappa e}{\sqrt{p}}\mathfrak{j} + \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\mathfrak{m} \tag{III; 35}$$

dargestellt, d.h. durch einen konstanten Vektor, dessen Spitze M (Abb. 22) auf der positiven Brennpunktsordinate im Abstand $\varkappa e/\sqrt{p}$ vom Brennpunkt liegt, und einen beweglichen Vektor von der konstanten Länge $\varkappa/\sqrt{p}$, der sich um M so dreht, daß seine Richtung der des Ortsvektors stets um 90° im Sinne der Bewegung vorauseilt. Der Hodograph ist demnach ein *Kreis* mit dem Mittelpunkt $M\left(\dot{x} = 0;\ \dot{y} = \frac{\varkappa e}{\sqrt{p}}\right)$ und dem Halbmesser $\varkappa/\sqrt{p}$. Seine Gleichung lautet, wenn wir die rechtwinkligen Koordinaten von $\dot{\mathfrak{p}}$ mit $\dot{x}$, $\dot{y}$ bezeichnen,

$$\dot{x}^2 + \left(\dot{y} - \frac{\varkappa e}{\sqrt{p}}\right)^2 = \frac{\varkappa^2}{p}. \tag{III; 36}$$

Im Falle einer elliptischen Bewegung wird die große Achse von diesem Kreis geschnitten; die Schnittpunkte haben die Abszissen $\pm\varkappa/\sqrt{a}$. Die Richtung der Geschwindigkeit durchläuft, bei 90° (Perihelgeschwindigkeit) beginnend, alle Werte zwischen 0 und 2π. Im Falle der Parabel berührt der Hodograph die Apsidenlinie im Brennpunkt. Der Brennpunkt selbst (Geschwindigkeit null) entspricht dem unendlich fernen Punkt der Bahn. Ist die Bahn eine Hyperbel, so haben Hodograph und große Achse keinen Punkt gemeinsam. Der Rich-

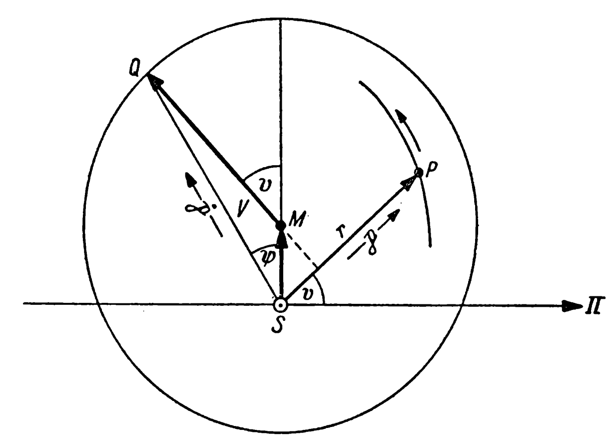


Abb. 22. Hodograph der elliptischen Bewegung.

tungswinkel ψ der Geschwindigkeit gegen die positive Ordinatenachse (die der Richtung der Perihelgeschwindigkeit entspricht) ist zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, die durch die Richtungen der beiden Tangenten vom Brennpunkt an den Hodographen gegeben sind. Alle Punkte des Hodographen, die den Punkten des von dem Himmelskörper durchlaufenen Hyperbelastes entsprechen, liegen oberhalb der die Berührungspunkte dieser Tangenten verbindenden Geraden (der Polare des Brennpunkts). Der unterhalb dieser Geraden liegende Bogen des Hodographen entspricht dem Nebenast der Hyperbel, der den Antifokus einschließt. Dieser Nebenast wird durchlaufen, wenn die Kraft, die auf den Massenpunkt wirkt, *repulsiv* ist: Die Geschwindigkeit erreicht daher im Scheitel des Nebenastes (unterster Punkt des Hodographen) ein Minimum, während sie im Scheitelpunkt des Hauptastes (Perihel), dem bei allen Bahntypen der oberste Punkt des Hodographen entspricht, stets ihr absolutes Maximum annimmt.

Allgemein sind die rechtwinkligen Koordinaten der Geschwindigkeit

$$\text{(III; 37)} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= -V\sin\psi = -\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\sin v\,, \\ \dot{y} &= V\cos\psi = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}(e + \cos v)\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

(III; 38) $$\operatorname{tg}\psi = -\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{\sin v}{e + \cos v},$$

was zu einer einfachen Beziehung zwischen ψ und (im Falle der Ellipse) der exzentrischen Anomalie führt. Dividiert man nämlich (II; 11, 12) durch (II; 9), so erhält man

(III; 39) $$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}, \quad \sin v = \sqrt{1 - e^2}\,\frac{\sin E}{1 - e\cos E}.$$

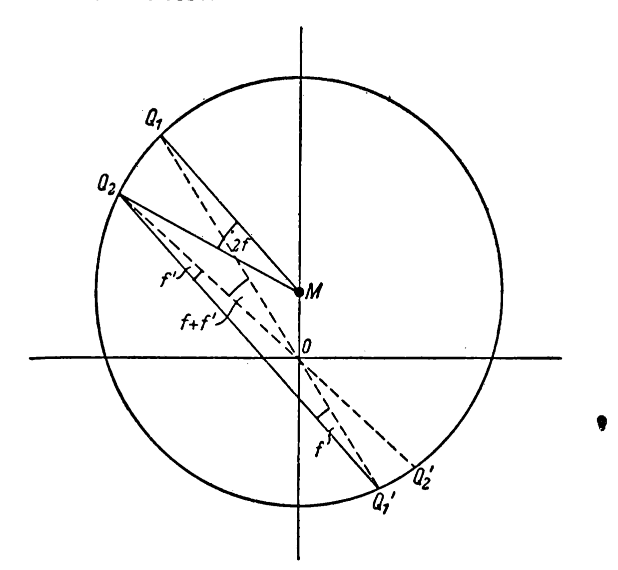


Abb. 23. Differenz der wahren und der antifokalen Anomalien zweier Planetenörter.

Setzt man dies in (III; 38) ein, so folgt

(III; 40) $$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}\operatorname{tg} E = \sec\varphi \operatorname{tg} E,$$

wenn man noch, nach (II; 3), den Exzentrizitätswinkel φ einführt.

Für den Hodographen gilt folgender geometrische Satz, der an späterer Stelle (Abschn. 49) angewandt werden wird. Seien (Abb. 23) Q_1 und Q_2 zwei Punkte des Hodographen, die den Bahnpunkten P_1 und P_2 einer elliptischen Bewegung entsprechen. Verlängert man die Geschwindigkeitsvektoren OQ_1, OQ_2 nach rückwärts, so sind OQ_1', OQ_2' die Geschwindigkeitsvektoren, die zu den P_1 und P_2 diametral gegenüberliegenden Ellipsenpunkten P_1' und P_2' gehören. Die zu diesen Punkten führenden Radiusvektoren r_1' und r_2' sind offenbar gleich den zu P_1 und P_2 gehörenden antifokalen Distanzen.

Nun ist $\sphericalangle Q_1 M Q_2 = 2f = v_2 - v_1$, da ja die Vektoren MQ stets zu den zugehörigen Ortsvektoren OP normal sind und daher untereinander dieselben Winkel bilden wie diese. Es ist daher auch $\sphericalangle Q_1 Q_1' Q_2 = f$ als Umfangswinkel über dem gleichen Bogen. Ebenso ist dann auch $\sphericalangle Q_1' Q_2 Q_2' = f'$, wenn $2f' = w_2 - w_1$ die Differenz der antifokalen Anomalien von P_1 und P_2 bedeutet. Der Winkel zwischen den beiden Geschwindigkeitsvektoren OQ_1 und OQ_2 ist demnach (als Außenwinkel im Dreieck $OQ_1'Q_2$) gleich $f + f'$. Für die Parabel ist $f' = 0$; es gilt daher der Satz: In der Parabelbewegung ist der Winkel zwischen zwei Geschwindigkeitsvektoren stets halb so groß wie der zwischen den beiden Ortsvektoren, also gleich der halben Differenz der beiden wahren Anomalien. In der Hyperbel ist f' negativ.

22. *Das Integral der Anomalie*

Die Integrationskonstante φ_0, die wir als Richtungswinkel des LAPLACEschen Vektors in der Bahnebene erhielten, definiert die Richtung nach dem *Perihel* (Perizentrum) der Bahn. Die Differenz $v = \varphi - \varphi_0$ stellt also den heliozentrisch gesehenen Winkelabstand vom Perihel dar, den wir schon früher als *wahre Anomalie* bezeichnet haben.

Die Gleichung (III; 19), in der das linksseitige Integral noch auszuführen ist, lautet, wenn wir v statt $\varphi - \varphi_0$ einführen, $c = \varkappa\sqrt{p}$ setzen und unter T die Durchgangszeit durch das Perihel ($\varphi = \varphi_0$) verstehen,

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p^3}}(t - T). \tag{III; 41}$$

Die Ausführung der Integration ist verschieden, je nachdem $e \lesseqgtr 1$ ist. Außerdem kann der Fall $e = 0$ gesondert behandelt werden, da er besonders einfach liegt. Wir unterscheiden somit vier verschiedene Fälle:

a) *Kreisbahn* ($e = 0$): Gleichung (III; 41) lautet dann

$$\int_0^v dv = \frac{\varkappa}{\sqrt{p^3}}(t - T)$$

oder, da hier $p = a$,

$$v = \frac{\varkappa}{\sqrt{a^3}}(t - T) = n(t - T) = M, \tag{III; 42}$$

d.h., in der Kreisbahn ist die wahre Anomalie der Zeit proportional (wahre = mittlere Anomalie). Der Fahrstrahl dreht sich also mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $n = \frac{2\pi}{U} = \frac{\varkappa}{\sqrt{a^3}}$ (vgl. II; 52).

b) *Parabelbahn* ($e = 1$): In diesem nächst einfachen Fall nimmt (III; 41) die Form

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + \cos v)^2} = \int_0^v \frac{dv}{4 \cos^4 \frac{v}{2}} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p^3}} (t - T)$$

an. Substituiert man

$$y = \operatorname{tg} \frac{v}{2}; \quad dy = \frac{dv}{2 \cos^2 \frac{v}{2}},$$

so ergibt sich wegen $\cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1}{1 + y^2}$

$$\int_0^y (1 + y^2)\, dy = \frac{2\varkappa}{\sqrt{p^3}} (t - T).$$

Wenn man links das Integral ausführt und rechts, wie bei Parabelbahnen üblich, statt des Parameters p die Periheldistanz $q = \frac{p}{2}$ einführt [aus $p = a(1 - e^2)$ und $q = a(1 - e)$ folgt ja $\frac{p}{q} = 1 + e = 2$ bei der Parabel],

$$\text{(III; 43)} \qquad \boxed{\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \frac{\varkappa}{\sqrt{2q^3}} (t - T)}\,.$$

Aus dieser kubischen Gleichung kann die wahre Anomalie direkt als Funktion der Zeit gefunden werden. Über die Methoden ihrer Auflösung wird im Abschn. 34 berichtet werden.

c) *Ellipsenbahn* ($e < 1$): Die Integration von (III; 41) gelingt durch Einführung der exzentrischen Anomalie E anstatt v. Schreibt man (III; 41) in der aus dem Flächensatz folgenden Form

$$\int_0^v r^2\, dv = c(t - T)$$

und setzt nach (II; 16) $r\, dE = n a\, dt$, nach (II; 8) $r^2\, dv = c\, dt = n\sqrt{p a^3}\, dt$, so findet man durch Elimination von dt

$$dv = \frac{\sqrt{a p}}{r}\, dE,$$

mithin

$$\int_0^v r^2\, dv = \sqrt{a p} \int_0^E r\, dE = n \sqrt{p a^3}\,(t - T)$$

oder, wenn man r durch (II; 10) ausdrückt und integriert,

$$\text{(III; 44)} \qquad \int_0^E (1 - e . \cos E)\, dE = E - e \sin E = n(t - T) = M,$$

also die *Keplersche Gleichung.*

d) *Hyperbelbahn* ($e > 1$; $a < 0$): In der hyperbolischen Bewegung verliert sowohl die mittlere Anomalie M (und mit ihr die mittlere Bewegung n) als auch die exzentrische Anomalie E ihren reellen Sinn. Die Integration von (III; 41) gelingt dennoch in reeller Form, wenn man statt E eine andere Hilfsvariable einführt, die in der Hyperbel (Abb. 24) folgendermaßen definiert wird: Es seien P der Ort des Himmelskörpers und r, v seine Polarkoordinaten, bezogen auf die im Brennpunkt des linken Hyperbelastes stehende Sonne S als Koordinatenursprung und die Richtung von S nach dem Perihel Π als Hauptrichtung. Um den Mittelpunkt M der Hyperbel sei mit dem positiven Halbmesser $\alpha = -a$ der „Hauptkreis" $\Pi K A$ beschrieben, der die Hyperbel in den Scheiteln Π und A berührt. Von dem Fußpunkt Q des von P auf die Apsidenlinie gefällten Lotes aus ziehe man die Tangente QK an den Hauptkreis und verbinde ihren Berührungspunkt K mit M. Dann ist der Winkel $\Pi M K = H$ die erwähnte Variable, die an die Stelle der exzentrischen Anomalie treten soll.

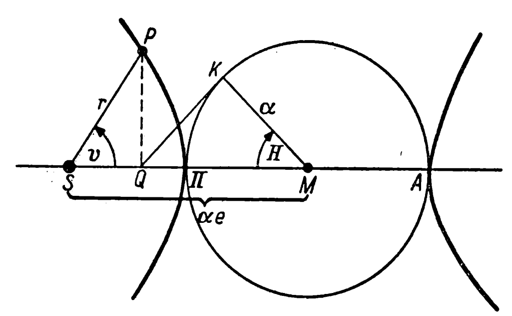


Abb. 24. Bewegung in der Hyperbel.

Aus der Polargleichung der Hyperbel

$$\text{(III; 45)} \qquad r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{\alpha(e^2 - 1)}{1 + e \cos v}$$

und der aus Abb. 24 unmittelbar abzuleitenden Beziehung

$$\text{(III; 46)} \qquad r \cos v = \alpha(e - \sec H)$$

folgt durch Elimination von $\cos v$

$$\text{(III; 47)} \qquad r = \alpha(e \sec H - 1).$$

Schließlich findet man nach einfacher Rechnung

$$r^2 \sin^2 v = r^2(1 - \cos^2 v) = \alpha^2(e^2 - 1)(\sec^2 H - 1) = \alpha^2(e^2 - 1)\operatorname{tg}^2 H,$$

also, wenn man festsetzt, daß v und H gleichsinnig wachsen sollen,

(III; 48) $$r \sin v = \alpha \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} H.$$

Aus (III; 47, 46) ergibt sich dann durch Subtrahieren und Addieren

(III; 49) $$\begin{aligned} r(1 - \cos v) &= \alpha(e + 1)(\sec H - 1), \\ r(1 + \cos v) &= \alpha(e - 1)(\sec H + 1) \end{aligned}$$

und, wenn man die erste dieser Gleichungen durch die zweite dividiert und die Identität

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\sec x - 1}{\sec x + 1} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$$

auf beiden Seiten anwendet, die (II; 14) äquivalente Beziehung

(III; 50) $$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}} \operatorname{tg} \frac{H}{2}.$$

Differenziert man (III; 47), so erhält man

$$dr = \alpha e \operatorname{tg} H \sec H \, dH.$$

Außerdem ist nach (II; 33)

$$dr = \varkappa \frac{e}{\sqrt{p}} \sin v \, dt.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke gleich, so folgt

$$\frac{\operatorname{tg} H \sec H}{\sin v} \frac{dH}{dt} = \frac{\varkappa}{\alpha \sqrt{p}} = \frac{\varkappa}{\sqrt{\alpha^3} \sqrt{e^2 - 1}}$$

oder, wegen (III; 48, 47)

$$\frac{r}{\alpha} \sec H \, dH = (e \sec^2 H - \sec H) \, dH = \frac{\varkappa}{\sqrt{\alpha^3}} dt.$$

Hieraus folgt durch Integration

(III; 51) $$\boxed{e \operatorname{tg} H + \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{H}{2} \right) = \frac{\varkappa}{\sqrt{\alpha^3}} (t - T)}$$

als transzendente Gleichung für H, die im Falle der hyperbolischen Bewegung die KEPLERsche Gleichung ersetzt.

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung gleicht formal dem entsprechenden der KEPLERschen Gleichung, kann aber nicht wie dieser den Anspruch auf die Bezeichnung „mittlere Anomalie" erheben, denn in der Hyper-

belbewegung gibt es keine „Umlaufszeit", und die Begriffe „mittlere Bewegung" und „mittlere Anomalie" sind daher nicht im gleichen Sinne wie bei der Ellipse verwendbar. In der Tat würde der Ausdruck für n auf der rechten Seite von (III; 44) für $e > 1$ imaginär werden. Denn setzen wir $a = -\alpha$, wo α eine reelle positive Größe ist, die den Halbmesser des Hauptkreises der Hyperbel darstellt, so steht auf der rechten Seite von (III; 44) der Ausdruck

$$M = \frac{\varkappa}{\sqrt{(-\alpha)^3}}(t - T) = \frac{\varkappa}{(i\sqrt{\alpha})^3}(t - T) = i\frac{\varkappa}{\sqrt{\alpha^3}}(t - T),$$

so daß M imaginär ist.

Man gewinnt die Gleichung (III; 51) übrigens auch direkt aus der KEPLERschen Gleichung durch Anwendung folgender Substitutionen: Vergleicht man die Formelsysteme (III; 46–48) mit den entsprechenden Formeln (II; 10–12) für die Ellipse, so erhält man

	Hyperbel	*Ellipse*
	$r\cos v = -\alpha(\sec H - e)$	$r\cos v = a(\cos E - e)$
(III; 52)	$r\sin v = -\alpha\sqrt{1 - e^2}\,(-i\,\mathrm{tg}\,H)$	$r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\sin E$
	$r = -\alpha(1 - e\sec H)$	$r = a(1 - e\cos E)$

Die elliptischen Formeln gehen also in die hyperbolischen über, indem man

$$\text{(III; 53)}\qquad \begin{aligned} &\sin E \text{ mit } -i\,\mathrm{tg}\,H, && a \text{ mit } -\alpha \\ &\cos E \text{ mit } \sec H, && a^{-\frac{3}{2}} \text{ mit } i\alpha^{-\frac{3}{2}} \\ &\mathrm{tg}\,E \text{ mit } -i\sin H, && \end{aligned}$$

vertauscht. Diese Substitutionen sind miteinander verträglich, da

$$\sin^2 E + \cos^2 E = (i\,\mathrm{tg}\,H)^2 + \sec^2 H = 1.$$

Wegen $e^{iE} = \cos E + i\sin E$ ist nun $iE = \ln(\cos E + i\sin E)$. Man kann also iE durch

$$\ln(\sec H + \mathrm{tg}\,H) = \ln\frac{1 + \sin H}{\cos H} = \ln\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - H\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - H\right)} =$$

$$= \ln\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{H}{2}\right) = -\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{H}{2}\right)$$

ersetzen, und die mit $-i$ multiplizierte KEPLERsche Gleichung verwandelt sich in

$$\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{H}{2}\right) + e\,\mathrm{tg}\,H = \frac{\varkappa}{\sqrt{\alpha^3}}(t - T).$$

In gleicher Weise erhält man auch das hyperbolische Analogon zu (II; 14). Aus

$$\sin E = 2\sin\frac{E}{2}\cos\frac{E}{2} = -i\,\mathrm{tg}\,H,$$

$$1 + \cos E = 2\cos^2\frac{E}{2} = 1 + \sec H$$

folgt

$$\mathrm{tg}\frac{E}{2} = -i\,\frac{\mathrm{tg}\,H}{1+\sec H} = -i\,\mathrm{tg}\frac{H}{2}$$

und daher (III; 50) aus (II; 14). Schließlich erhält die Beziehung (III; 40) zwischen der exzentrischen Anomalie und dem Richtungswinkel ψ der Bahngeschwindigkeit im Hyperbelfall die Form

$$\text{(III; 54)} \qquad \mathrm{tg}\,\psi = \frac{i}{\sqrt{e^2-1}}\,\mathrm{tg}\,E = \frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\sin H.$$

23. *Beziehungen zwischen den Anomalien in der Ellipse*

In der elliptischen Bewegung sind die Beziehungen zwischen dem Radiusvektor r, der wahren Anomalie v und der exzentrischen Anomalie E durch die Gleichungen (III; 52)

$$\text{(III; 55)} \qquad \begin{array}{ll|c|c} & & \text{(I)} & \text{(II)} \\ r\cos v & = a(\cos E - e) & b\cos E & -a\sin E \\ r\sin v & = b\sin E & a\sin E & b\cos E \\ r & = a(1 - e\cos e) & & \end{array}$$

gegeben. Multipliziert man die ersten beiden dieser Gleichungen mit den Faktoren (I) bzw. (II) und addiert, so erhält man

$$r\,(b\cos E\cos v + a\sin E\sin v) = ab(1 - e\cos E) = rb,$$

$$\text{(III; 56)} \qquad r\,(b\cos E\sin v - a\sin E\cos v) = a^2 e\sin E - (a^2 - b^2)\sin E\cos E$$

$$= r\,ae\sin E.$$

Hieraus folgen, wenn man $e = \sin\varphi$ und $b = a\cos\varphi$ setzt und durch ra dividiert, die trigonometrischen Gleichungen

$$\text{(III; 57)} \qquad \begin{aligned} \cos\varphi &= \sin E\sin v + \cos E\cos v\cos\varphi, \\ \sin\varphi\sin E &= -\sin E\cos v + \cos E\sin v\cos\varphi, \end{aligned}$$

die man auch findet, wenn man den Cosinussatz und den Sinus-Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie auf das sphärische Dreieck ABC der Abb. 25 anwendet, dessen Seiten und Winkel die in der Abbildung eingetragenen Werte haben mögen. Auch der Sinussatz ist erfüllt, da er die Identität

$$\sin\varphi\cos E = \cos E\sin\varphi$$

ergibt. Außer (III; 57) gelten im gleichen Dreieck die Beziehungen

$$\text{(III; 58)}\qquad \begin{aligned} \sin E &= \sin v\cos\varphi - \cos v\sin\varphi\sin E,\\ \cos E\sin v &= \sin v\sin\varphi + \cos v\cos\varphi\sin E \end{aligned}$$

und

$$\text{(III; 59)}\qquad \begin{aligned} \sin v &= \sin E\cos\varphi + \cos E\sin\varphi\sin v,\\ \cos v\cos\varphi &= \cos E\cos\varphi - \sin E\sin\varphi\sin v, \end{aligned}$$

aus denen man leicht die häufig gebrauchten Formeln

$$\text{(III; 60)}\qquad \begin{aligned} \sin E &= \frac{\cos\varphi\sin v}{1+\sin\varphi\cos v}, & \sin v &= \frac{\cos\varphi\sin E}{1-\sin\varphi\cos E},\\ \cos E &= \frac{\cos v+\sin\varphi}{1+\sin\varphi\cos v}, & \cos v &= \frac{\cos E-\sin\varphi}{1-\sin\varphi\cos E} \end{aligned}$$

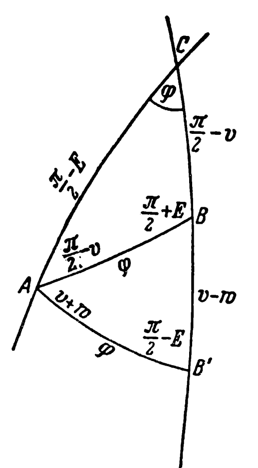


Abb. 25. Trigonometrische Beziehungen zwischen den Anomalien der Ellipsenbahn.

ableiten kann. Für den bei schwach exzentrischen Bahnen stets kleinen Unterschied zwischen der wahren und der exzentrischen Anomalie erhält man aus (III; 60)

$$\cos(v-E) = \frac{\sin\varphi\cos v + \cos^2 v + \cos\varphi\sin^2 v}{1+\sin\varphi\cos v},$$

also

$$\sin^2\frac{v-E}{2} = \frac{1}{2}[1-\cos(v-E)] = \frac{\sin^2 v(1-\cos\varphi)}{1+\sin\varphi\cos v}$$

oder, da

$$1+\sin\varphi\cos v = \frac{p}{r};\quad 1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\text{(III; 61)}\qquad \sin\frac{v-E}{2} = \sqrt{\frac{r}{p}}\,\sin\frac{\varphi}{2}\sin v.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist positiv, da $v-E$ stets das Vorzeichen von $\sin v$ hat.

Faßt man, in Analogie zum System der geographischen Längen und Breiten auf der Erdkugel, C als Nordpol einer Sphäre auf, dann sind CA und CB zwei Meridiane mit dem Längenunterschied φ und A, B zwei auf diesen Meridianen gelegene Punkte mit den Breiten E bzw. v.

Führt man statt v die „antifokale Anomalie" w ein, so erhält man aus den Grundformeln (II; 20) durch analoge Überlegungen die (III; 57) entsprechenden Formeln

$$\text{(III; 62)} \qquad \begin{aligned} \cos\varphi &= \sin E \sin w + \cos E \cos w \cos\varphi, \\ \sin\varphi \sin E &= \sin E \cos w - \cos E \sin w \cos\varphi, \end{aligned}$$

die auch unmittelbar aus (III; 57) folgen, wenn man, wie in Abschn. 15, v mit w und e mit $-e$ bzw. φ mit $-\varphi$ vertauscht. So ergeben sich auch aus (III; 58, 59) die Beziehungen

$$\text{(III; 63)} \qquad \begin{aligned} \sin E &= \sin w \cos\varphi + \cos w \sin\varphi \sin E, \\ \cos E \sin w &= -\sin w \sin\varphi + \cos w \cos\varphi \sin E \end{aligned}$$

und

$$\text{(III; 64)} \qquad \begin{aligned} \sin w &= \sin E \cos\varphi - \cos E \sin\varphi \sin w, \\ \cos w \cos\varphi &= \cos E \cos\varphi + \sin E \sin\varphi \sin w, \end{aligned}$$

während man an Stelle von (III; 60) die Formeln

$$\text{(III; 65)} \qquad \begin{aligned} \sin E &= \frac{\cos\varphi \sin w}{1 - \sin\varphi \cos w}, & \sin w &= \frac{\cos\varphi \sin E}{1 + \sin\varphi \cos E}, \\ \cos E &= \frac{\cos w - \sin\varphi}{1 - \sin\varphi \cos w}, & \cos w &= \frac{\cos E + \sin\varphi}{1 + \sin\varphi \cos E} \end{aligned}$$

findet.

Die Gleichungen (III; 62–64) gelten im Dreieck $AB'C$ der Abb. 25, in dem B' auf der gleichen Länge wie B, aber auf der Breite w liegt, und in dem der Abstand AB', ebenso wie AB, gleich φ ist. Es gilt also der folgende merkwürdige Satz:

Ist in einem sphärischen Koordinatensystem (Länge, Breite) A ein Punkt mit den Koordinaten $(0, E)$, und schlägt man um A einen Kreis mit dem Halbmesser φ, so schneidet dieser den Meridian mit der Länge φ in zwei Punkten mit den Breiten v und w. Dieser Satz behält seine Gültigkeit, wenn von den Anomalien E, v, w einige oder alle größer als $\frac{\pi}{2}$ sind; die entsprechenden Punkte liegen dann auf der Verlängerung ihrer Meridiane über den Pol hinaus.

Aus den sphärischen Dreiecken ABC und $AB'C$ lassen sich alle möglichen Beziehungen ableiten, die zwischen den Anomalien und dem Exzentrizitätswinkel φ gelten. So folgen die Formeln (II; 14) und (II; 21) aus den auf diese beiden Dreiecke angewandten NAPIERschen Analogien. Z.B. ist in ABC auf Grund dieser Formeln

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cos\frac{v+E}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{v+E}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{v-E}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{v+E}{2} \sin\frac{v-E}{2}$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin\frac{v+E}{2}=\sin\frac{v-E}{2}.$$

Hieraus folgt, wenn man die Sinusausdrücke auflöst und die Gleichung durch $\cos\frac{v}{2}\cos\frac{E}{2}$ kürzt,

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2}+\operatorname{tg}\frac{E}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{v}{2}-\operatorname{tg}\frac{E}{2}$$

oder, wie (II; 14),

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}.$$

Die gleiche Operation, auf $AB'C$ angewandt, führt auf (II; 21). Auch die Anwendung der bekannten Tangentenformeln

$$\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin(s-c)\sin s}\qquad\left(s=\frac{a+b+c}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{c}{2}=-\frac{\cos(\sigma-\gamma)\cos\sigma}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)}\qquad\left(\sigma=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right),$$

die für jedes sphärische Dreieck mit den Seiten a, b, c und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ gelten, führt zu weiteren interessanten und wenig

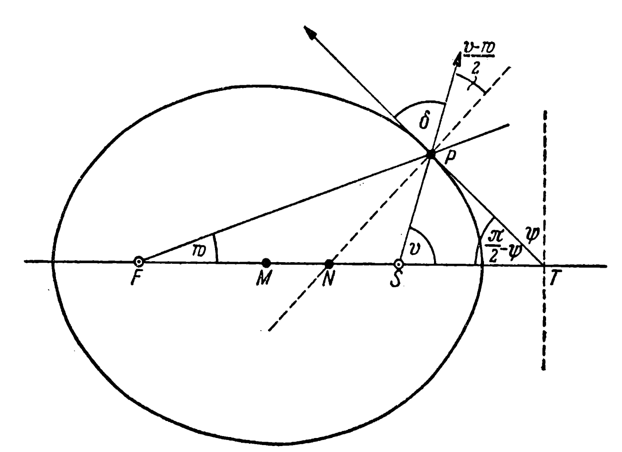


Abb. 26. Tangente und Normale der Ellipse.

bekannten Beziehungen zwischen den Anomalien der elliptischen Bewegung, deren Ableitung dem Leser überlassen bleibe.

Aus dem gleichschenkligen Dreieck ABB' erhält man schließlich alle Beziehungen, die zwischen E und φ einerseits, dem Richtungswinkel ψ der Bahntangente (bzw. des Geschwindigkeitsvektors) und dem Winkel δ (den Orts- und Geschwindigkeitsvektor des Planeten miteinander bilden) andererseits bestehen. Dabei soll ψ, wie schon in Abschn. 21, den Winkel darstellen, den die Bahngeschwindigkeit mit der Perihelgeschwindigkeit bildet, also mit der Richtung der positiven Ordinatenachse. Nach einem bekannten Satz aus der Geometrie der Kegelschnitte halbiert die Normale NP der Ellipse (Abb. 26) den Winkel zwischen den beiden Brennstrahlen SP und FP und halbiert die Tangente TP den Außenwinkel des Dreiecks SPF bei P. Es ist demnach

$$\text{(III; 66)} \quad \frac{v-w}{2} = \frac{\pi}{2} - \delta,$$

und, da im Dreieck SPT

$$v + \delta + \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \pi,$$

$$\text{(III; 67)} \quad \frac{v+w}{2} = \psi.$$

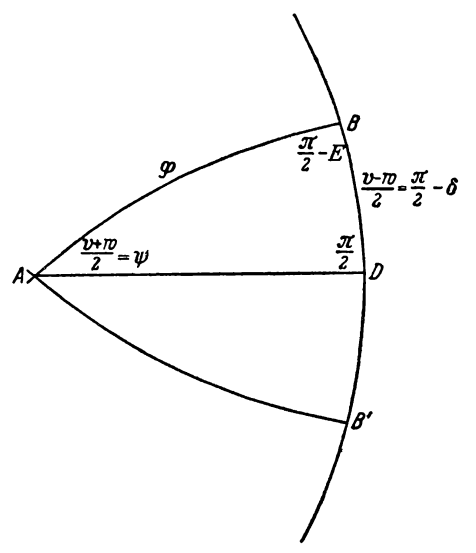


Abb. 27. Beziehungen zwischen den Anomalien in Ellipsenbahnen. Für Hyperbeln ist H statt E, χ statt φ zu setzen. Ferner ist

$$\frac{v+w}{2} = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \frac{v-w}{2} = \psi.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck ABD, das entsteht, wenn man in Abb. 25 das gleichschenklige Dreieck ABB' durch die Mittelsenkrechte AD halbiert (Abb. 27), gelten demnach auf Grund der für rechtwinklige sphärische Dreiecke gültigen Formeln die Beziehungen

$$\text{(III; 68)} \quad \begin{aligned} \sin\psi\cos\varphi &= \sin\delta\sin E, \\ \sin\psi\sin\varphi &= \cos\delta, \\ \cos\psi &= \sin\delta\cos E \end{aligned}$$

und

$$\text{(III; 69)} \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} E \operatorname{ctg}\psi &= \cos\varphi, & \operatorname{ctg}\delta\operatorname{ctg}\psi &= \sin\varphi\cos E, \\ \operatorname{tg} E \operatorname{tg}\varphi &= \cos\delta\sec\psi, & \operatorname{ctg}\delta\operatorname{ctg}\varphi &= \sin E, \end{aligned}$$

unter denen man die schon früher abgeleitete Formel (III; 40) wiederfindet.

Für *Parabelbahnen* rückt der Punkt A in den Äquator, da $E = 0$, und der Kreis um A mit dem Halbmesser $\varphi = \frac{\pi}{2}$ fällt mit dem Meridian der Länge $\frac{\pi}{2}$ ganz zusammen, d.h., zu jeder beliebigen wahren Anomalie v gehört $E = 0$. Aus (III; 68) folgt für die Parabel

$$\text{(III; 70)} \qquad \begin{aligned} \cos\psi &= \sin\delta, \\ \sin\psi &= \cos\delta, \end{aligned} \quad \text{d.h.} \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \delta,$$

übereinstimmend mit einer bekannten geometrischen Eigenschaft dieses Kegelschnitts. Hieraus folgt übrigens auch die am Schluß des Abschn. 21 erwähnte Eigenschaft der Parabelbewegung, daß der Winkel zwischen zwei Geschwindigkeitsrichtungen (Tangenten) halb so groß ist wie der zwischen den beiden zugehörigen Ortsvektoren. Für jeden Ort ist nämlich nach Definition $\delta = \left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) - v$, also wegen (III; 70) $2\psi = v$. Für zwei verschiedene Örter ist also

$$\psi_2 - \psi_1 = \frac{1}{2}(v_2 - v_1).$$

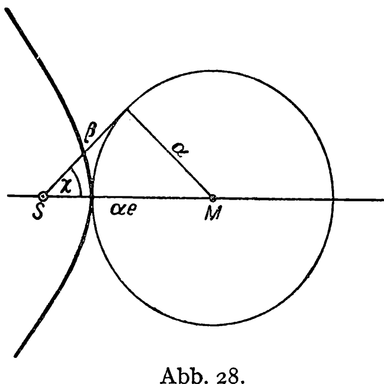


Abb. 28.
Exzentrizitätswinkel der Hyperbel.

24. *Beziehungen zwischen den Anomalien in der Hyperbel*

Für die Hyperbel werden E und φ imaginär. Führen wir, wie in Abschn. 22, statt E die reelle Hilfsvariable H ein, so ergeben sich an Stelle der Gleichungen (III; 57) analoge Beziehungen, wenn wir statt φ einen „hyperbolischen Exzentrizitätswinkel" χ durch

$$\text{(III; 71)} \qquad \sin\chi = \frac{1}{e}, \quad \operatorname{ctg}\chi = \sqrt{e^2 - 1}$$

definieren. Die geometrische Bedeutung dieses Winkels lehrt Abb. 28: χ ist der Winkel, den die vom Brennpunkt S an den Hauptkreis der Hyperbel gezogene Tangente mit der großen Achse bildet. Man erkennt ferner, daß $\frac{\pi}{2} - \chi$ der zu $v = \frac{\pi}{2}$ gehörige Hilfswinkel H ist.

Setzt man, wie in Abschn. 22, in (III; 57)

$$\sin E = -i \operatorname{tg} H, \quad \cos E = \sec H$$

und ferner, wie oben,

$$\text{(III; 72)} \qquad \sin\varphi = \operatorname{cosec}\chi, \quad \cos\varphi = -i\sqrt{e^2 - 1} = -i \operatorname{ctg}\chi,$$

so verwandeln sich diese Gleichungen, wenn man noch mit $-\sin\chi\cos H$ heraufmultipliziert, in

$$\begin{aligned} \cos H\cos\chi &= \cos v\cos\chi + \sin v\sin\chi\sin H, \\ \sin H &= \sin v\cos\chi - \cos v\sin\chi\sin H. \end{aligned} \tag{III; 73}$$

Diese Formeln entsprechen der zweiten Gleichung (III; 59) bzw. der ersten Gleichung (III; 58), wenn man E mit H und φ mit χ vertauscht. Damit ist

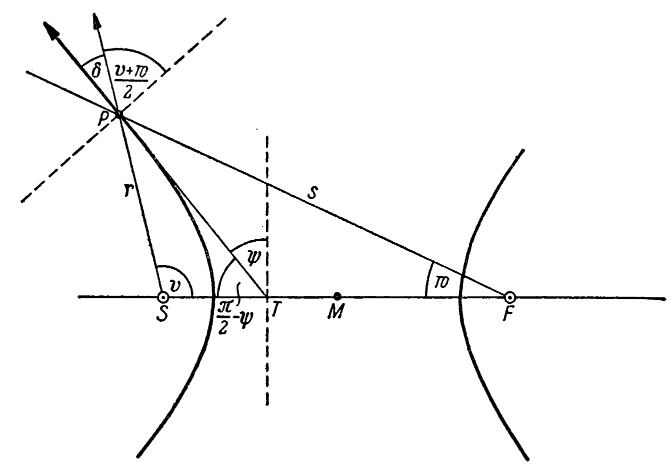


Abb. 29. Tangente, Normale und antifokale Anomalie der Hyperbelbahn.

gleichzeitig bewiesen, daß alle für die Ellipse im vorigen Abschnitt entwickelten Beziehungen zwischen den Anomalien in analoge für die Hyperbel übergehen, wenn man diese Vertauschungen vornimmt.

Auch der Begriff der antifokalen Anomalie läßt sich auf die Hyperbel übertragen. Verbindet man (Abb. 29) den Bahnort P mit den beiden Brennpunkten S und F und bezeichnet mit w den Winkel SFP, so folgt aus (III; 52) und Abb. 29

$$\begin{aligned} r\cos v &= 2\alpha e - s\cos w = \alpha(e - \sec H), \\ r\sin v &= \qquad\quad s\sin w = \alpha\sqrt{e^2 - 1}\,\mathrm{tg}\,H = \beta\,\mathrm{tg}\,H, \\ r &= \quad s - 2\alpha e \quad = \alpha(e\sec H - 1) \end{aligned}$$

oder

	(I)	(II)
$s\cos w = \alpha(e + \sec H),$	$\beta\sec H$	$\alpha\,\mathrm{tg}\,H$
$s\sin w = \beta\,\mathrm{tg}\,H,$	$-\alpha\,\mathrm{tg}\,H$	$\beta\sec H.$
$s \quad = \alpha(e\sec H + 1)$		

Multipliziert man die ersten beiden dieser Gleichungen mit den Faktoren (I) bzw. (II) und addiert, so ergibt sich

$$s(\beta \sec H \cos w - \alpha \operatorname{tg} H \sin w) = \alpha\beta(e \sec H + \sec^2 H - \operatorname{tg}^2 H) = s\beta,$$

$$s(\alpha \operatorname{tg} H \cos w + \beta \sec H \sin w) = \alpha^2 e \operatorname{tg} H + (\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{tg} H \sec H = s\alpha e \operatorname{tg} H$$

oder, wenn man gemäß (III; 71) $e = \operatorname{cosec} \chi$, $\beta = \alpha \operatorname{ctg} \chi$ einführt und mit $\dfrac{\sin\chi \cos H}{s\alpha}$ heraufmultipliziert,

$$\cos w \cos \chi - \sin w \sin \chi \sin H = \cos \chi \cos H,$$

$$\sin w \cos \chi + \cos w \sin \chi \sin H = \sin H.$$

Diese Formeln gehen aus der zweiten Gleichung (III; 64) und der ersten Gleichung (III; 63) hervor, wenn man wieder E mit H und φ mit χ vertauscht. Damit ist gezeigt, daß Abb. 26 auch in bezug auf das Dreieck $AB'C$ für die Hyperbel Gültigkeit behält, wenn man die Bezeichnungen der Seiten und Winkel entsprechend ändert.

Auch die Formeln (III; 68, 69), die für die Ellipse aus dem rechtwinkligen Dreieck ABD (Abb. 27) abgeleitet wurden, gelten mutatis mutandis für die Hyperbel, vorausgesetzt, daß die oben gegebene Definition der antifokalen Anomalie nicht zu Widersprüchen führt. Nun zeigt aber Abb. 29, daß zwischen den Winkeln ψ und δ einerseits und den Anomalien v und w andererseits die aus der Abbildung unmittelbar ablesbaren Beziehungen

$$\text{(III; 74)} \qquad \frac{v+w}{2} = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \frac{v-w}{2} = \psi$$

gelten, die mit (III; 66, 67) nur übereinstimmen, wenn man $-w$ statt w setzt. Tatsächlich ist aus Abb. 29 ersichtlich, daß w im negativen Sinne wächst, wenn v zunimmt. Behalten wir aus Gründen der Bequemlichkeit die obige Definition von w bei (in der also v und w das gleiche Vorzeichen haben), so müssen wir in Abb. 27, wenn diese für Hyperbeln gültig bleiben soll, nicht nur E, φ mit H, χ, sondern auch ψ, δ mit $\dfrac{\pi}{2} - \delta$, $\dfrac{\pi}{2} - \psi$ vertauschen. Die Formeln (III; 68, 69) gehen dann in

$$\text{(III; 75)} \qquad \begin{aligned} \cos\delta \cos\chi &= \cos\psi \sin \mathrm{H}, \\ \cos\delta \sin\chi &= \sin\psi, \\ \sin\delta &= \cos\psi \cos H \end{aligned}$$

und

$$\text{(III; 76)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} H \operatorname{tg} \delta &= \cos\chi, & \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\delta &= \sin\chi \cos H, \\ \operatorname{tg} H \operatorname{tg}\chi &= \sin\psi \operatorname{cosec}\delta, & \operatorname{tg}\psi \operatorname{ctg}\chi &= \sin H \end{aligned}$$

über. Die gleichen Formeln erhält man auch, wenn auch in anderer Reihenfolge, wenn man in (III; 68, 69) ψ und δ unverändert läßt, dafür aber die trigonometrischen Funktionen von E durch (III; 53) und die von φ durch (III; 72) ersetzt.

25. *Die Mittelwerte des Radiusvektors*

Man bezeichnet die große Halbachse a der KEPLERschen Ellipse auch als die *mittlere Entfernung* des Planeten von der Sonne. Diese Bezeichnung läßt sich auf zweierlei Arten rechtfertigen: 1. ist a gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Extremen, die r im Laufe der Bewegung einnimmt, nämlich aus der *Periheldistanz* $a(1 - e)$ und der *Apheldistanz* $a(1 + e)$. 2. ist a der Mittelwert von r, wenn man r als Funktion der exzentrischen Anomalie auffaßt. Aus (II; 10) folgt nämlich durch Integration über E, erstreckt über einen vollen Umlauf,

$$\int_0^{2\pi} r\,dE = 2\pi a,$$

also der Mittelwert von $r(E)$

$$\overline{r(E)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\,dE = a.$$

In gleicher Weise kann man aus KEPLER I,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos v),$$

folgern, daß $1/p$ der Mittelwert des als Funktion der wahren Anomalie betrachteten Kehrwertes $1/r$ des Radiusvektors ist.

Darüber hinaus ist es von Interesse festzustellen, welche Mittelwerte der Radiusvektor annimmt, wenn man ihn als Funktion der wahren Anomalie v oder der mittleren Anomalie M ansieht. Differenziert man die ersten beiden Gleichungen (III; 55) nach r, v und E, so erhält man

$$dr\cos v - r\,dv\sin v = -a\,dE\sin E,$$

$$dr\sin v + r\,dv\cos v = \quad b\,dE\cos E$$

und durch Auflösung dieser Gleichungen nach dr und $r\,dv$

$$dr = dE(b\cos E\sin v - a\sin E\cos v),$$

$$r\,dv = dE(b\cos E\cos v + a\sin E\sin v).$$

Vergleicht man die Klammerausdrücke der rechten Seiten mit (III; 56), so folgt

$$dr = ae\sin E\,dE \text{ (wie in Abschn. 14)},$$

$$r\,dv = b\,dE.$$

Integriert man die zweite dieser Gleichungen über einen vollen Umlauf, so ergibt sich der Mittelwert von $r(v)$

$$\overline{r(v)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\,dv = b,$$

d.h., der über r als Funktion der wahren Anomalie genommene Mittelwert des Radiusvektors ist gleich der kleinen Halbachse der Ellipse.

Aus dem Differential der KEPLERschen Gleichung

$$dM = dE(1 - e\cos E)$$

folgt schließlich

$$r\,dM = a\,dE(1 - e\cos E)^2 = a\,dE(1 - 2e\cos E + e^2\cos^2 E),$$

also nach Integration über einen vollen Umlauf der Mittelwert von r als Funktion der mittleren Anomalie bzw. der Zeit

$$\overline{r(M)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\,dM = a\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) = a + \frac{a-p}{2}.$$

Unter Umständen ist es nützlich, auch die Mittelwerte von $1/r$ zu kennen. Über v erstreckt, ist dieser Mittelwert, wie schon erwähnt, gleich $1/p$. Dagegen ist das *zeitliche* Mittel des reziproken Radiusvektors gleich $1/a$, denn es ist nach (III; 44) und dem Flächensatz

$$dM = n\,dt = \frac{n}{\varkappa\sqrt{p}}r^2 dv, \quad \text{also} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dM}{r} = \frac{n}{2\pi\varkappa\sqrt{p}}\int_0^{2\pi} r\,dv = \frac{b}{\sqrt{pa^3}} = \frac{1}{a}.$$

26. *Die geradlinige Bahn*

Außer den bisher behandelten Kegelschnittbahnen liefern die Differentialgleichungen der Zweikörperbewegung unter gewissen Umständen noch singuläre Lösungen, die als Grenzfälle der normalen anzusehen sind.

Der auf der Bahnebene senkrecht stehende Vektor $\mathfrak{g}$ der Flächengeschwindigkeit bildet mit dem in der Bahnebene selbst liegenden heliozentrischen Ortsvektor $\mathfrak{p}$ stets einen rechten Winkel; das skalare Produkt beider ist also ständig null. Sind c_1, c_2, c_3 die Koordinaten von $\mathfrak{g}$ und x, y, z die des Planeten, so stellt diese Beziehung,

$$(\mathfrak{g}\mathfrak{p}) = c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0, \tag{III; 77}$$

die Gleichung der durch den Koordinatenanfang gehenden Bahnebene dar. Ihr genügen auch die Koordinaten d_1, d_2, d_3 des LAPLACEschen Vektors $\mathfrak{f}$, wie schon in (III; 17) gezeigt worden ist. Sie verliert ihren Sinn dann und nur dann,

wenn alle drei Flächenkonstanten c_i und damit auch der Vektor $\mathfrak{g}$ selbst verschwinden. Wegen

$$|\mathfrak{g}| = c = \varkappa\sqrt{p}$$

würde in diesem Falle der Bahnparameter p den Wert null annehmen. Aus $p = a(1 - e^2) = \alpha(e^2 - 1)$ folgt, daß bei festgehaltenem, im übrigen beliebig großem a bzw. α der Parameter p gegen null strebt, wenn man die Exzentrizität sich der Eins nähern läßt. Geometrisch ist evident, daß dieser Vorgang einem Schrumpfen des Kegelschnitts, welchen Typs er auch sei, auf die große Achse gleichkommt. Der Kegelschnitt selbst artet dabei in eine gerade Linie aus – im *elliptischen* Typ in eine endliche Strecke von der Länge $2a$, im *parabolischen* in einen einseitig begrenzten Strahl, im *hyperbolischen* ebenfalls, wenn lediglich der vom Himmelskörper wirklich durchlaufene Hyperbelast als Bahn angesehen wird.

Die gleichen Folgerungen zieht man auch aus (III; 16): Wegen $\mathfrak{g} = 0$ ist für die singuläre Bahn

$$\varkappa^2 \frac{\mathfrak{p}}{r} = -\mathfrak{f}$$

oder, wenn man, wie früher, $\mathfrak{p} = r\mathfrak{r}$ setzt,

$$\mathfrak{r} = -\frac{1}{\varkappa^2}\mathfrak{f}. \tag{III; 78}$$

Der in die Richtung von der Sonne nach dem Ort des bewegten Massenpunktes zeigende Einheitsvektor $\mathfrak{r}$ ist demnach konstant und dem LAPLACEschen Vektor $\mathfrak{f}$ entgegengesetzt gerichtet. Da der Betrag von $\mathfrak{f}$ nach (III; 18) $d = \varkappa^2 e$ ist, so folgt aus (III; 78), wie zu erwarten ist, $e = 1$. Die Richtung von $\mathfrak{f}$ ist stets die von der Sonne zum Perihel. Beim Grenzübergang rückt der Brennpunkt in das Perihel hinein, da ja bei festem endlichen a für $e \to 1$ die lineare Exzentrizität ae gegen a strebt. Der Ortsvektor $\mathfrak{p}$ hat demnach für alle Zeiten die Richtung nach dem *Aphel*, d.h., der Himmelskörper bewegt sich auf einem vom Zentralkörper ausgehenden Strahl.

Die Bewegung des Körpers auf diesem Strahl ist bekannt, wenn der Radiusvektor r als Funktion der Zeit bestimmt wird. Die vektorielle Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathfrak{p}} = -\varkappa^2 \frac{\mathfrak{p}}{r^3} \qquad (\mathfrak{p} = r\mathfrak{r})$$

geht, da $\mathfrak{r} = \text{const}$, also $\ddot{\mathfrak{p}} = \ddot{r}\mathfrak{r}$, in die skalare Differentialgleichung

$$\ddot{r} = -\frac{\varkappa^2}{r^2} \tag{III; 79}$$

über. Multipliziert man sie mit $\dot{r}$, so entsteht die Gleichung

$$\dot{r}\ddot{r} = -\varkappa^2 \frac{\dot{r}}{r^2},$$

deren Integration den *Energiesatz* in der Form

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{\varkappa^2}{r} + h \tag{III; 80}$$

liefert. Da in der geradlinigen Bahn $\dot{r} = V$ ist und $a \neq 0$ angenommen werden muß, so erweist sich (III; 80) als identisch mit der Geschwindigkeitsrelation (III; 31) und h als identisch mit der Energiekonstanten (III; 30)

$$h = -\frac{\varkappa^2}{2a}. \tag{III; 81}$$

Eigentümlich ist, daß in diesem singulären Grenzfall trotz $e = 1$ die Unterscheidung der Bahnformen in solche vom elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Typ erhalten bleibt, da ja beim Grenzübergang die große Halbachse unverändert bleibt, deren numerischer Wert das Kriterium für den Bahntypus darstellt. Das kommt noch deutlicher zum Ausdruck, wenn man die Lösung der Differentialgleichung (III; 79) durch eine weitere Integration zu Ende führt. Aus (III; 80, 81) erhält man

$$\dot{r} = \pm\varkappa\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}} \quad \text{oder} \quad \varkappa\, dt = \pm\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}},$$

also durch Integrieren

$$\varkappa(t - t_0) = \pm\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}}. \tag{III; 82}$$

Nimmt man an, daß t_0 die Anfangs-, t die Endzeit eines durchlaufenen Bahnstücks ist, so ist die linke Seite von (III; 82) stets positiv. Rechts wird also das positive Zeichen gelten, wenn auch dr positiv ist, der Massenpunkt sich also in dem betreffenden Zeitintervall vom Attraktionszentrum entfernt (*Steigbewegung*). Ebenso gilt das negative Zeichen, wenn $dr < 0$, der Massenpunkt sich also dem Attraktionszentrum nähert (*Fallbewegung*). Setzt sich, was nur beim elliptischen Bahntyp vorkommt, die Bewegung aus einem aufsteigenden und einem absteigenden Ast zusammen, so tritt am Umkehrpunkt, an dem r das Maximum $2a$ erreicht, ein Vorzeichenwechsel ein.

(III; 82) ist natürlich nichts anderes als das Anomalieintegral (III; 41), in dem die hier sinnlos gewordene Variable v durch r substituiert wurde. In der Tat erhält man aus der allgemeinen Bahngleichung

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

durch Differenzieren

$$dv = dr \frac{(1 + e\cos v)^2}{e p \sin v}.$$

Damit wird (III; 41)

$$\varkappa(t - t_0) = \sqrt{p} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{e \sin v}.$$

Bedenkt man nun, daß

$$e \sin v = \pm\sqrt{e^2 - (e\cos v)^2} = \pm\sqrt{e^2 - \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2p}{r} - \frac{p^2}{r^2} - (1 - e^2)},$$

so erhält man

$$\text{(III; 83)} \qquad \varkappa(t - t_0) = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{p}{r^2} - \frac{1 - e^2}{p}}}.$$

Setzt man hierin $p = a(1 - e^2)$, wobei a beim hyperbolischen Typ negativ zu nehmen ist, und läßt man p gegen null streben, so geht (III; 83) in (III; 82) über.

Die Ausführung des Integrals (III; 82) gelingt durch geeignete Substitutionen, wobei man wiederum die drei Bahntypen zu unterscheiden hat, je nachdem $1/a$ positiv, null oder negativ ist.

Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung beim parabolischen Typ. Hier erhält man ($1/a = 0$)

$$\text{(III; 84)} \qquad \varkappa(t - t_0) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{r_0}^{r} \sqrt{r}\, dr = \pm \frac{1}{3}\sqrt{2}\left[r^{\frac{3}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}}\right].$$

Diese Formel gewinnt man auch durch Grenzübergang aus (III; 43), wenn man diese Gleichung, da hier beide Grenzen willkürlich sind, in der Form

$$\text{(III; 85)} \qquad \varkappa(t - t_0) = \sqrt{2q^3}\left[\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}\right]_{v_0}^{v}$$

schreibt. Setzt man in der Bahngleichung der Parabel,

$$r = \frac{p}{1 + \cos v},$$

$p = 2q$ (q = Periheldistanz) und $1 + \cos v = 2\cos^2 \frac{v}{2}$, so erhält man

$$(\text{III}; 86) \qquad r = \frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}} = q\left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{v}{2}\right); \quad \mathrm{tg}^2 \frac{v}{2} = \frac{r - q}{q}.$$

Führt man dies in (III; 85) ein, so findet man

$$\varkappa(t - t_0) = \pm\sqrt{2q^3}\left[\left(\frac{r-q}{q}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\left(\frac{r-q}{q}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r_0}^{r} =$$

$$= \pm\sqrt{2}\left[q(r-q)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(r-q)^{\frac{3}{2}}\right]_{r_0}^{r},$$

also, wenn man q gegen null streben läßt, die Gleichung (III; 84).

Die Substitutionen, die zur Ausführung des Integrals (III; 82) im elliptischen und hyperbolischen Fall notwendig sind, ergeben sich zwanglos, wenn man, ausgehend von den entsprechenden Lösungen des Anomalieintegrals im allgemeinen Fall, gleichfalls den Grenzübergang zum singulären Fall vornimmt. Diese Lösungen sind, wie wir wissen, die KEPLERsche Gleichung bzw. ihr hyperbolisches Analogon (III; 51). Die Grenzübergänge sind leicht zu bewerkstelligen, da ja die exzentrische Anomalie E ebenso wie der Winkel H in der Hyperbelbewegung geometrisch durch die Begriffe „große Achse" und „Hauptkreis" definiert sind und daher ebenso wie diese ihren Sinn auch beim Übergang auf die singuläre Bewegung bewahren.

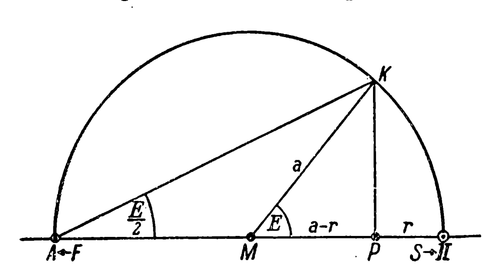


Abb 30. Geradlinige Bewegung.

Es genügt, den elliptischen Typ der geradlinigen Bewegung zu untersuchen. Die Bahn des Massenpunktes P (Abb. 30) ist die große Achse, auf die die ursprüngliche Ellipse durch affine Schrumpfung ($b \to 0$) ausgeartet ist. Dabei ist der rechte Brennpunkt S in das Perihel Π, der Antifokus F in das Aphel A gerückt. Die Bewegung von P besteht, mathematisch gesehen, in einem periodischen Hin- und Herpendeln zwischen den beiden Endpunkten der „Fallstrecke" ΠA. Bei der physikalischen Deutung dieses Vorgangs hat man allerdings zu beachten, daß die Bewegung des fallenden Körpers bei der Ankunft in Π ihr natürliches Ende findet, d.h. in den dort befindlichen Zentralkörper stürzt (Einsturz eines Meteors in die Sonne!).

Nun sei P der Ort des Massenpunkts zur Zeit t, r sein Abstand von der in Π befindlichen Sonne. Es ist dann der Winkel $KM\Pi = E$ die exzentrische Anomalie und

$$KP = a \sin E = \pm \sqrt{a^2 - (a - r)^2} = \pm \sqrt{r(2a - r)}.$$

Die KEPLERsche Gleichung, die wir wieder mit beliebiger unterer und oberer Integrationsgrenze in der Form

$$\varkappa (t - t_0) = \sqrt{a^3}\,[E - e \sin E]_{E_0}^{E}$$

schreiben, läßt sich dann in

$$\varkappa (t - t_0) = \pm \sqrt{a^3} \left[\arc \sin \frac{\sqrt{r(2a - r)}}{a} - \frac{\sqrt{r(2a - r)}}{a}\right]_{r_0}^{r}$$

umwandeln, nachdem der Grenzübergang $e \to 1$ vollzogen worden ist.

Für die praktische Rechnung ist diese Formel unzweckmäßig, da die Funktion arc sin im Intervall $0 \leqq r \leqq 2a$ mehrdeutig ist und für $r = a$, wo ihr Argument den Wert 1 annimmt, nicht genau ermittelt werden kann. Es ist daher besser

$$E = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{E}{2}\right)$$

zu setzen. In Abb. 30 ist der Winkel $KA\Pi = \frac{E}{2}$ als Umfangswinkel über dem Bogen $K\Pi$, dessen Mittelpunktswinkel E ist. Man findet dann

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - (a - r)^2}}{2a - r} = \pm \sqrt{\frac{r}{2a - r}}$$

und erhält somit

$$\varkappa (t - t_0) = \pm \sqrt{a^3} \left[2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{r}{2a - r}} - \frac{\sqrt{r(2a - r)}}{a}\right]_{r_0}^{r}. \tag{III; 87}$$

Diese Lösung ist innerhalb eines Umlaufs ($0 \leqq E \leqq 2\pi$) eindeutig und immer scharf numerisch bestimmbar. Die beiden Vorzeichen gelten, wie in (III; 82), für $E \lesseqgtr 0$, also für $dr \gtreqless 0$.

Der Weg zur Auffindung der das Integral (III; 82) lösenden Substitution ist nun vorgezeichnet. Man setze

$$z^2 = \frac{r}{2a - r}, \quad r = \frac{2az^2}{1 + z^2}, \quad dr = \frac{4az}{(1 + z^2)^2} dz, \quad \frac{2}{r} - \frac{1}{a} = \frac{1}{az^2}.$$

Damit wird (III; 82)

$$\varkappa (t - t_0) = \pm 4\sqrt{a^3} \int_{z_0}^{z} \frac{z^2 dz}{(1 + z^2)^2},$$

und die Ausführung der Integration ergibt

(III; 88) $$\varkappa(t-t_0) = \pm 2\sqrt{a^3}\left[\operatorname{arc\,tg} z - \frac{z}{1+z^2}\right]_{z_0}^{z},$$

was nach Einsetzen von $z = \sqrt{\dfrac{r}{2a-r}}$ in (III; 87) übergeht.

Auch der hyperbolische Fall läßt sich nunmehr ohne weitere Umstände erledigen. Für negatives a wird z imaginär. Setzt man also den Halbmesser des Hauptkreises der Hyperbel $-a = \alpha$, so empfiehlt sich die reelle Substitution

$$\zeta^2 = \frac{r}{2\alpha + r},$$

die mit $\zeta = \operatorname{tg}\dfrac{H}{2}$ gleichbedeutend ist, was man auch geometrisch leicht einsehen kann. Sie führt (III; 82) in

$$\varkappa(t-t_0) = \pm 4\sqrt{\alpha^3}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{\zeta^2\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^2}$$

über – die Ausführung der Integration ergibt

$$\varkappa(t-t_0) = \pm 2\sqrt{\alpha^3}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1-\zeta}{1+\zeta} + \frac{\zeta}{1-\zeta^2}\right]_{\zeta_0}^{\zeta}$$

oder, wenn man wieder für ζ den obigen Wert einsetzt,

(III; 89) $$\varkappa(t-t_0) = \pm\sqrt{\alpha^3}\left[\ln\frac{\sqrt{2\alpha+r}-\sqrt{r}}{\sqrt{2\alpha+r}+\sqrt{r}} + \frac{\sqrt{r(2\alpha+r)}}{\alpha}\right]_{r_0}^{r}.$$

Die Integrale (III; 84, 88, 89) ergeben direkt die Steig- bzw. Fallzeit des Körpers zwischen zwei Punkten des vom Gravitationszentrum ausgehenden Strahls. Beim parabolischen und hyperbolischen Typ der Bewegung kann die Entfernung r des Körpers vom Attraktionszentrum jeden beliebigen Wert zwischen 0 und ∞ annehmen, während beim elliptischen Typ r auf den Bereich zwischen 0 und $2a$ beschränkt bleibt. Die Geschwindigkeitsrelation (III; 31) gilt unverändert. Sie liefert für die drei Bahntypen

$$V^2 = \varkappa^2\frac{2a-r}{ar} \quad \text{(elliptischer Typ)},$$

$$V^2 = \varkappa^2\frac{2}{r} \quad \text{(parabolischer Typ)},$$

$$V^2 = \varkappa^2\frac{2\alpha+r}{\alpha r} \quad \text{(hyperbolischer Typ)}.$$

Bei der elliptischen Bewegungsart wird der obere Grenzpunkt $r = 2a$ mit der Geschwindigkeit null erreicht (Umkehr- oder Scheitelpunkt zwischen steigender und fallender Bewegung). Beim parabolischen Typ liegt der Scheitelpunkt im Unendlichen, beim hyperbolischen ist auch im Unendlichen die Geschwindigkeit noch von null verschieden, nämlich

$$V_\infty = \pm \frac{\varkappa}{\sqrt{\alpha}}.$$

Die andere, untere Begrenzung der Fallstrecke ist durch $r = 0$ gegeben, d.h. durch das Attraktionszentrum selbst. Es wurde schon gesagt, daß in ihm die Bewegung praktisch aufhört, da ein Zusammenstoß der Massen erfolgt, wenn er erreicht wird. Andererseits kann $r = 0$ auch als Anfangspunkt der Bewegung angesehen werden – die Masse m wird dann aus dem Ort der Masse M abgeschleudert (Ejektion). Wenn wir von der physikalischen Deutung dieser Vorgänge (Aufsturz bzw. Ejektion) absehen, das Attraktionszentrum also als einen ausdehnungslosen, symbolisch mit Masse belegten Punkt ansehen, tritt der singuläre Charakter der geradlinigen Bewegung an dieser Stelle deutlich zutage. Für $r = 0$ wird nämlich, unabhängig vom Bahntyp, die Aufsturz- bzw. Ejektionsgeschwindigkeit unendlich. Hier verliert also bereits der erste Differentialquotient von r nach der Zeit seinen Sinn. Wir werden auf die mathematischen Schwierigkeiten, die mit der Beschreibung der Bahnbewegung unmittelbar vor der Kollision bzw. nach der Ejektion verbunden sind, im Abschn. 64 noch zurückkommen.

Es ist bemerkenswert, daß die Natur selbst die hier auftretende Singularität mit unüberwindlichen Schranken umgibt, so daß die Fallgeschwindigkeit eines Körpers gewisse endliche Grenzen niemals überschreiten kann. Sie teilt jeder gravitierenden Masse ein endliches Volumen zu, das sie ausfüllt und das die Annäherung einer anderen gravitierenden Masse bis zur völligen Koinzidenz unmöglich macht. Das ist jedenfalls die Sachlage, solange es sich um Körper handelt, wie sie in der Astronomie gewöhnlich vorkommen, also um Kugeln mit radialsymmetrischer Massenverteilung oder um Gebilde, die sich von ihnen nur unwesentlich unterscheiden. Von ihnen gilt, daß die von ihnen ausgehenden Gravitationskräfte so wirken, als sei ihre gesamte Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt. Dieser Satz, der alle unsere bisherigen Aussagen rechtfertigt, wird im nächsten Abschnitt bewiesen werden. Er gilt, solange sich die angezogene Masse noch außerhalb der Begrenzung des anziehenden Körpers befindet, in unserem Problem der geradlinigen Bewegung also bis zum Sturz auf die Oberfläche des Zentralkörpers, der nach den oben abgeleiteten Formeln stets mit endlicher Geschwindigkeit erfolgt.

Anders wird es, wenn wir die Möglichkeit zulassen, daß der fallende Körper (reibungslos) in den anziehenden eindringen kann. Man könnte diesen Vorgang etwa so realisieren, daß man annimmt, ein Stern falle zentral in einen kugelförmigen Sternhaufen hinein, ohne mit einem Mitglied des Haufens zu kollidieren. Wir werden im nächsten Abschnitt auf diesen in der Wirklichkeit durchaus denkbaren Vorgang zurückkommen und zeigen, daß sich das An-

ziehungsgesetz ändert, sobald sich der fallende Stern im Innern des Haufens befindet, insofern nämlich, als die bereits durchstoßenen Kugelschalen des Haufens keine Anziehungskraft mehr ausüben. Im Mittelpunkt des Haufens selbst ist die Kraft gleich null, da dort die Resultierende aus den Anziehungskräften aller Sterne des Haufens auf den eingedrungenen Körper verschwindet. Der fallende Stern wird dann beim Durchgang durch den Mittelpunkt eine endliche Maximalgeschwindigkeit erreichen. Danach kehrt sich der Vorgang um: Die Geschwindigkeit nimmt wieder ab und erreicht, wenn der Körper auf der entgegengesetzten Seite den Haufen wieder verläßt, den gleichen Betrag wie beim Eintritt. So entsteht, wenn es sich um eine Fallbewegung vom elliptischen Typ handelt, ein Hin- und Herpendeln des Sterns auf einer geraden Strecke, aber nicht, wie die Theorie bei Annahme punktförmiger Massen vorschreibt, zwischen Umkehrpunkt und Attraktionszentrum, sondern zwischen zwei Umkehrpunkten, die symmetrisch zum Attraktionszentrum (in unserem Beispiel zum Mittelpunkt des Kugelhaufens) angeordnet sind.

Gleichung (III; 87) gestattet die Berechnung der Fallzeit eines frei fallenden Meteors aus der Ruhelage bis zum Aufsturz auf die Oberfläche der Sonne. Sie ist etwas kürzer als die „ideale Fallzeit", die sich ergeben würde, wenn man die Sonne als geometrischen Punkt mit der Masse $M = 1$ betrachtet. Zur Berechnung der idealen Fallzeit haben wir $r = 2a$ und $r_0 = 0$ zu setzen und erhalten dann

$$T_0 = \frac{\pi \sqrt{a^3}}{\varkappa}.$$

Dies entspricht [siehe (II; 50) oder auch (III; 44) mit $E = \pi$] der halben Umlaufszeit in einer Ellipse mit der großen Halbachse a, ein Ergebnis, das zu erwarten war, da ja die Umlaufszeit in der Ellipse bei gegebenen Massen nur von a abhängt und daher beim Grenzübergang auf die geradlinige elliptische Bewegung erhalten bleibt. Die gesamte Umlaufszeit entspricht dann der Dauer von Steig- und Fallbewegung zusammen.

Ist die Ausdehnung des Zentralkörpers klein gegen die Fallstrecke, so ist auch die Korrektur klein, die wir an die ideale Fallzeit anzubringen haben, um die Fallzeit bis zur Oberfläche des Zentralkörpers zu berechnen. Der Zentralkörper habe Kugelgestalt, sein Halbmesser betrage ϱ. Dann entspricht diese Korrektion δT der Fallzeit von $r = \varrho$ bis $r = 0$. Es ist also

$$\delta T = \frac{2\sqrt{a^3}}{\varkappa}\left[\operatorname{arc\,tg} z - \frac{z}{1+z^2}\right]_0^{z(\varrho)}; \quad z(\varrho) = \sqrt{\frac{\varrho}{2a-\varrho}}.$$

Ist nun ϱ gegen $2a$ klein, so auch z. Der Ausdruck in der Klammer ist also die Differenz zweier kleiner Zahlen gleicher Größenordnung und daher in der gegebenen Form für die Rechnung ungeeignet. Setzt man aber

$$\operatorname{arc\,tg} z = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \cdots,$$

$$\frac{z}{1+z^2} = z - z^3 + z^5 - z^7 + \cdots,$$

so findet man

$$\delta T = \frac{4}{3\varkappa}\left(z\sqrt{a}\right)^3\left[1 - \frac{6}{5}z^2 + \frac{9}{7}z^4 - \frac{12}{9}z^6 + \cdots\right]. \tag{III; 90}$$

Für sehr kleines z beschränkt sich die Korrektion der Fallzeit daher auf das Hauptglied dieser Entwicklung,

$$\delta T = \frac{4}{3\varkappa}\left(z\sqrt{a}\right)^3.$$

Beispiel: Ein Meteor falle aus der Erdbahn, d.h. aus der Entfernung eins, mit der Anfangsgeschwindigkeit null geradlinig auf die Sonne. Wie groß ist die ideale Fallzeit, wie lange fällt es bis zum Einsturz in die Sonne, und welches ist die Einsturzgeschwindigkeit?

Da das Meteor eine verschwindend kleine Masse besitzt, ist $\varkappa = k = 0.0172021$ zu setzen. Es ist ferner $2a = 1$, der Sonnenhalbmesser $\varrho = 0.6955 \cdot 10^6$ km $= 0.00465$ A.E. Die ideale Fallzeit beträgt dann

$$T_0 = \frac{\pi}{k\sqrt{8}} = 64^{\text{d}}.570.$$

Ferner ist $z = \sqrt{\dfrac{\varrho}{1-\varrho}} = 0.068367$, das Hauptglied der Korrektion daher

$$\delta T = \frac{4}{3k}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^3 = 0^{\text{d}}.00876 = 12^{\text{m}}.6.$$

Das erste Zusatzglied in der Klammer von (III; 90), $\dfrac{6}{5}z^2 = 0.0056$, vermag diesen Betrag nur um weniger als eine Zehntelminute zu ändern. Die gesuchte Fallzeit beträgt daher

$$T = T_0 - \delta T = 64.561 \text{ mittlere Sonnentage}.$$

Die Aufsturzgeschwindigkeit errechnet sich mit $r = \varrho$ zu

$$V_\varrho = 0.3558 \frac{\text{A.E.}}{\text{Tag}} = 615.7 \frac{\text{km}}{\text{sec}}.$$

27. *Potential und Gravitationsfeld ausgedehnter Himmelskörper mit radialsymmetrischem Massenaufbau*

Es ist nun an der Zeit, die am Anfang des Abschn. 13 aufgeworfene Frage zu beantworten, ob bzw. unter welchen Bedingungen es erlaubt ist, die Himmelskörper als mit Masse belegte ausdehnungslose Punkte zu betrachten. Von dieser Vereinfachung dürfen wir offenbar bedenkenlos Gebrauch machen, wenn die räumliche Ausdehnung der betrachteten Körper genügend klein gegen ihre

Abstände voneinander ist, so klein etwa, daß bei der gewählten Stellengenauigkeit der Rechnung das Verhältnis zwischen Durchmesser und Abstand vernachlässigt werden darf.

Diese Bedingung ist meistens erfüllt, wenn wir die Bewegung der Fixsterne im interstellaren Raum oder in den äußeren Teilen der Kugelhaufen betrachten, nicht aber im Planetensystem. So ist z.B. der Abstand zwischen Erde und Sonne nur wenig größer als das hundertfache des Sonnen- bzw. das zehntausendfache des Erddurchmessers. Wenn im Planetensystem – mit Ausnahmen, auf die wir noch zurückkommen werden – die oben erwähnte Vereinfachung dennoch gestattet ist, so deshalb, weil die Himmelskörper des Systems mit großer Annäherung nach Gestalt und Massenverteilung radialsymmetrisch aufgebaut sind. Wir werden beweisen, daß solche Körper auf andere, die sich in beliebiger Entfernung von ihnen befinden, nach dem NEWTONschen Gesetz der Gravitation so wirken, als seien ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt.

In Abschn. 20 haben wir festgestellt, daß in einem kräftefreien Koordinatensystem das *Potential* U eines Massenpunktes P' mit der Masse m' in bezug auf einen anderen Massenpunkt P mit der Masse m die Form

$$U = k^2 \frac{m m'}{r}$$

hat, wenn r der Abstand PP' ist. Die Kraft, die von P' auf P wirkt, ist dann durch den Wert gegeben, den die Vektorfunktion

$$\mathfrak{k} = \pm \operatorname{grad} U$$

an der Stelle P annimmt[1]). Nehmen wir an, daß die anziehende Masse ein ausgedehnter Körper K sei, der aus beliebig vielen Massenelementen dm' bestehen möge, so addieren sich die Potentiale und Kräfte in bezug auf P, und wir können schreiben

$$\bar{U} = k^2 m \int_K \frac{dm'}{r}, \tag{III; 91}$$

wobei das Integral über alle Massenelemente von K zu erstrecken ist. Ist K insbesondere radialsymmetrisch aufgebaut, hat er also die Gestalt einer Kugel, die aus konzentrischen Schichten (Kugelschalen) von jeweils konstanter Dichte zusammengesetzt ist, so ist das Potential $U(P)$ eine im ganzen Raum außerhalb der Kugel stetige und endliche Funktion von P, die so beschaffen ist, daß die Flächen $U = \text{const}$ konzentrische Kugelflächen darstellen, deren gemeinsamer Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt, der gleichzeitig

---

[1]) Das Vorzeichen ist bei attraktiven Kräften so zu wählen, daß $\mathfrak{k}$ nach dem Attraktionszentrum gerichtet ist. Da grad U stets die Richtung nach wachsendem U hat, ist für $U \sim r^{-1}$ das positive Zeichen gültig, während [siehe (III; 95)] für $U \sim r^2$ das negative Zeichen zu nehmen wäre.

ihr Schwerpunkt ist. Die Gradienten dieser skalaren Funktion, die die Niveauflächen $U = \text{const}$ überall rechtwinklig durchstoßen, sind also nach dem Mittelpunkt C des Körpers gerichtete Vektoren, deren Beträge nur von dem Abstand r des „Aufpunktes" P von C abhängen. Die von dem Körper K auf P ausgeübte Gravitationskraft ist also notwendig eine Zentralkraft.

Die Potentialfunktion U genügt im ganzen Raume außerhalb von K der LAPLACEschen Differentialgleichung

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \tag{III; 92}$$

wenn wir irgendein rechtwinkliges Koordinatensystem mit C als Anfangspunkt einführen und den Punkten P und P' die Koordinaten x, y, z bzw. x', y', z' zuschreiben. Es ist dann

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x'}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y - y'}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z - z'}{r},$$

somit

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = -k^2 m m' \frac{x - x'}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{k^2 m m'}{r^3}\left[3\frac{(x - x')^2}{r^2} - 1\right],$$

woraus sofort (III; 92) folgt, wenn man die entsprechend gebauten Ausdrücke für die partiellen Ableitungen nach y und z hinzufügt. Da (III; 92) unabhängig von der Lage des anziehenden Massenelements dm' in P' ist, dürfen wir den Operator Δ auch auf $\overline{U}$ anwenden, und es ist daher auch $\Delta \overline{U} = 0$.

Um den oben ausgesprochenen Satz zu beweisen, betrachten wir zunächst eine unendlich dünne und mit Masse gleichmäßig dicht belegte Kugelschale K (Abb. 31) mit dem Halbmesser a und dem Mittelpunkt C. Die gesamte auf der Schale verteilte Masse sei

$$M = \int_K dm'. \tag{III; 93}$$

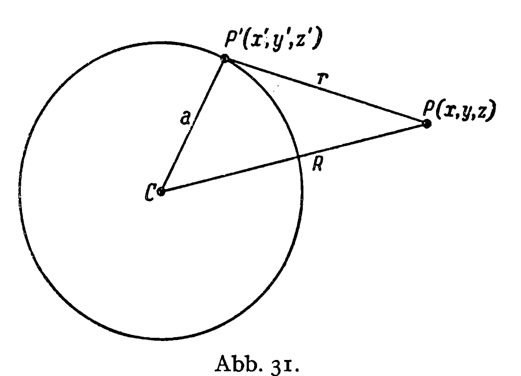


Abb. 31.
Potential einer Kugelschale.

Der Aufpunkt P mit den auf C als Koordinatenanfang bezogenen rechtwinkligen Koordinaten x, y, z habe von C die Entfernung R und von $P'(x', y', z')$

die Entfernung r. Ferner sei $U(R)$ das Potential der Kugelschale in P. Wegen $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist dann

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dR}\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{dU}{dR}\frac{x}{R}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{d^2 U}{dR^2}\frac{x^2}{R^2} + \frac{dU}{dR}\left(\frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3}\right),$$

also, wenn wir die entsprechenden Ausdrücke in y und z hinzufügen,

$$\Delta U = \frac{d^2 U}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{dU}{dR} = \frac{1}{R}\frac{d^2(UR)}{dR^2} = 0.$$

Es gilt also, solange $R > 0$, die Differentialgleichung

$$\frac{d^2(UR)}{dR^2} = 0,$$

deren allgemeines Integral

$$UR = \alpha R + \beta \quad \text{oder} \quad U = \alpha + \frac{\beta}{R}$$

lautet, wo α, β zwei willkürliche Integrationskonstante sind.

Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. der Aufpunkt P befindet sich außerhalb der Kugelschale. Dann ist $R - a < r < R + a$, und es gilt daher wegen (III; 93) die Ungleichung

$$\text{(III; 94)} \qquad \frac{M}{R + a} < \int \frac{dm'}{r} < \frac{M}{R - a}$$

für jedes $R > a$. Strebt R gegen ∞, so strebt daher

$$U = k^2 m \int \frac{dm'}{r}$$

gegen null, was nur möglich ist, wenn $\alpha = 0$, also $U = \beta/R$ ist. Die Ungleichung (III; 94) läßt sich daher auch

$$\frac{M}{1 + \frac{a}{R}} < \frac{\beta}{k^2 m} < \frac{M}{1 - \frac{a}{R}}$$

schreiben, und man findet $\beta/k^2 m = M$, wenn man R gegen ∞ streben läßt. Damit ist gezeigt, daß die Konstante β den Wert $k^2 m M$ haben muß, und es ist also

$$U = k^2 \frac{mM}{R}.$$

Das Potential einer gleichmäßig mit Masse belegten Kugelschale von der Gesamtmasse M auf einen Aufpunkt mit der Masse m im Abstand $R > a$ vom Mittelpunkt der Kugel ist also dasselbe wie das eines im Mittelpunkt der Kugel

liegenden Massenpunktes, in dem die Masse M vereinigt ist. Das gleiche gilt natürlich für das Potential einer aus konzentrischen Kugelschalen von jeweils gleicher Massendichte zusammengesetzten Vollkugel auf einen außerhalb ihrer Oberfläche liegenden Aufpunkt. Durch Anwendung des Prinzips von der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung überlegt man sich leicht, daß dieser Satz seine Gültigkeit auch dann behält, wenn an Stelle des Massenpunktes P ebenfalls ein radialsymmetrisch aufgebauter Körper tritt. Es ist demnach gestattet, bei der Untersuchung der translatorischen Bewegungen der Himmelskörper diese durch Massenpunkte zu ersetzen, sofern es sich um Kugeln der beschriebenen Art handelt.

Diese Überlegungen gelten nicht, wenn sich der Aufpunkt im *Innern* einer Kugelschale befindet. Dann ist $0 < R < a$, und es folgt, daß $\beta = 0$, also $U = \alpha = \text{const}$ sein muß. Denn wäre $\beta \neq 0$, so würde U bei Annäherung des Aufpunkts an den Kugelmittelpunkt ($R \to 0$) unendlich groß werden, während in Wirklichkeit im Mittelpunkt der Kugel für alle Massenelemente $r = a$ und daher nach (III; 91)

$$U(0) = k^2 m \int \frac{dm'}{a} = k^2 \frac{mM}{a} = \alpha$$

endlich ist. Es hat daher für das ganze Innere der Kugelschale, einschließlich des Mittelpunkts, den wir vorhin ausnehmen mußten, das Potential diesen konstanten Wert, gegen den übrigens auch U strebt, wenn sich der Aufpunkt der Kugelschale von außen nähert. Im Innern einer homogen mit Masse belegten Kugelschale (oder einer Hohlkugel von beliebiger Dicke und radialsymmetrischem Massenaufbau) sind also die NEWTONschen Gravitationskräfte null, da alle Ableitungen der Potentialfunktion verschwinden.

Ein Massenpunkt, der sich im Innern eines radialsymmetrisch aufgebauten Körpers befindet (z.B. ein Stern im Innern eines kugelförmigen Sternhaufens) wird demnach nur von denjenigen Massenelementen angezogen, deren Abstand vom Mittelpunkt der Kugel kleiner ist als sein eigener, während diejenigen Schichten, deren Abstand größer ist, keine Kräfte auf ihn ausüben. Ein Stern, der sich im Innern eines solchen Haufens bewegt, wird also einem Kraftgesetz unterliegen, das mit dem Abstand vom Mittelpunkt des Haufens variiert. Die Bahnen, die ein solcher Stern beschreibt, werden wesentlich durch das Gesetz bestimmt sein, mit dem die Dichte der Materie im Haufen mit dem Abstand vom Mittelpunkt variiert. Natürlich werden die Ergebnisse einer Analyse dieses Problems cum grano salis zu verstehen sein: Es handelt sich ja hier um ein statistisches Dichtegesetz, das nur durchschnittliche Werte für die Massendichte angibt. Die wirklichen Bewegungen der Sterne werden sich von den berechneten etwa in derselben Art unterscheiden, wie die von Wellen bewegte Oberfläche des Meeres sich von der Gestalt einer Kugelfläche unterscheidet, die man ihr bei großräumigen Betrachtungen zubilligen darf.

Die Idealisierung, die wir bei einer solchen Betrachtungsweise an dem Problem vornehmen müssen, besteht darin, daß wir das *Dichtegesetz* $\delta(R)$ eines Kugelhaufens als stetige und (evtl. bis auf endlich viele Sprungstellen) differenzierbare Funktion des Abstandes R vom Mittelpunkt auffassen, was in

Wirklichkeit nur der Fall wäre, wenn der Körper K stetig mit (gasförmiger, flüssiger oder fester) Materie erfüllt ist. Eine reibungslose Bewegung wäre dann aber unmöglich.

Sei ganz allgemein $\delta(R)$ die Massendichte einer radialsymmetrisch mit Masse belegten Kugel, so ist das Potential in bezug auf einen Massenpunkt P mit der Masse m im Abstand R vom Mittelpunkt

$$U(R) = k^2 \frac{m\,M(R)}{R},$$

wo

$$M(R) = 4\pi \int_0^R \varrho^2\, \delta(\varrho)\, d\varrho$$

die in dem Kugelkern vom Halbmesser R eingeschlossene Teilmasse des Körpers bedeutet. Wir wollen an dieser Stelle nur den besonders einfachen Fall betrachten, daß die Dichte im Innern der Kugel konstant, also

$$\delta(\varrho) = \delta \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho \leqq a$$

sei. Es ist dann für $R > a$

$$U(R) = k^2 \frac{mM}{R}; \quad M = M(a) = \frac{4}{3}\pi a^3 \delta;$$

während im Innern der Kugel ($R < a$)

$$U(R) = k^2 \frac{m}{R} \cdot 4\pi\delta \int_0^R \varrho^2\, d\varrho = \frac{4}{3}\pi k^2 m\, \delta R^2$$

oder, da $\delta = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}$,

$$U(R) = k^2 \frac{mM}{R} \left(\frac{R}{a}\right)^3 = \frac{m}{2} C R^2$$

gilt, wenn wir die Konstante $2\,k^2 M/a^3$ mit C bezeichnen.

Während sich der Massenpunkt P außerhalb eines Sternhaufens nach dem Gravitationsgesetz so bewegt, als sei dessen Gesamtmasse in seinem Mittelpunkt vereinigt, würde im Innern des Haufens, wenn dessen Dichte konstant wäre, das Beschleunigungsgesetz

$$\text{(III; 95)} \qquad \ddot{\mathfrak{p}} = -\frac{1}{m} \operatorname{grad} U = C R \mathfrak{r} = C \mathfrak{p}$$

gelten (siehe Fußnote S. 128), die Beschleunigung also proportional mit dem Abstand vom Mittelpunkt wachsen, bis sie an der Oberfläche des Haufens den dort nach dem NEWTONschen Gesetz zu erwartenden Betrag erreicht.

Wir werden später sehen (Abschn. 89), daß die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß eines derartigen Kraftgesetzes, die in der Physik als „harmonische Bewegung" bekannt ist, auf Ellipsen vor sich geht, deren Mittelpunkt mit dem Attraktionszentrum zusammenfällt.

28. *Potential und Gravitationsfeld abgeplatteter Himmelskörper*

Die Voraussetzung radialsymmetrischen Massenaufbaus ist bei den meisten Himmelskörpern, mit denen es die Himmelsmechanik zu tun hat, nur mit mehr oder weniger großer Annäherung erfüllt. So ist die geometrische Gestalt vieler

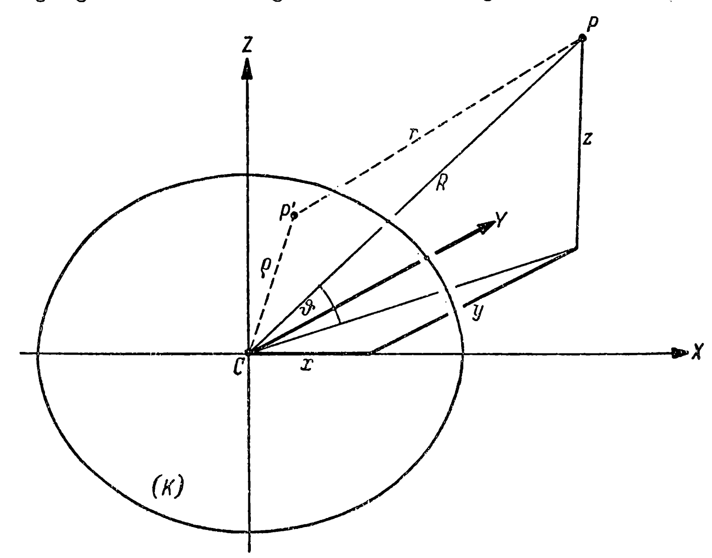


Abb. 32. Potential eines homogenen Ellipsoids.

Planeten die von merklich abgeplatteten Rotationsellipsoiden. Bezeichnet man ihren Äquatorhalbmesser mit a, den etwas kleineren Polarhalbmesser mit b, so mißt man die geometrische Abplattung der Oberfläche durch den Quotienten

$$\alpha = \frac{a - b}{a}.$$

Genau bekannt sind die Abplattungen der *Erde* (1 : 297), des *Jupiter* (1 : 16.35) und des *Saturn* (1 : 10.44), während man die des *Mars* ($\approx$ 1 : 190) und des *Uranus* ($\approx$ 1 : 18) nur mit einiger Unsicherheit abschätzen konnte. Die vermutlich vorhandene Abplattung des *Neptun* läßt sich wegen der Kleinheit des scheinbaren Durchmessers der Planetenscheibe, der wenig mehr als 2″ beträgt, durch Messung nicht bestimmen. Die Planeten *Merkur* und *Venus*, die nur langsam

um ihre Achse rotieren, sind ebenso wie der *Erdmond* mit genügender Genauigkeit als kugelförmig anzusehen. Das gleiche gilt für die *Sonne*, bei der ein Unterschied zwischen Äquator- und Polardurchmesser, wenn vorhanden, geringer als der zufällige Meßfehler sein müßte.

Zur Entscheidung der Frage, unter welchen Bedingungen es gestattet ist, die bestehenden Abweichungen des Massenaufbaus von der Kugelsymmetrie zu vernachlässigen, berechnen wir das Potential eines Rotationsellipsoids mit gegebener Abplattung. Wir dürfen dabei – aus Gründen, die im Verlauf der Untersuchung noch ersichtlich werden – die Massendichte im Innern des Körpers als konstant annehmen.

Es sei (Abb. 32) K ein Körper homogener Dichte, dessen Gestalt symmetrisch zu den drei Achsen eines rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems sei, dessen Mittelpunkt, der gleichzeitig auch der Schwerpunkt ist, also mit dem Koordinatenanfang C zusammenfällt. $P'(x', y', z')$ sei der Ort eines Massenelements dm' im Innern von K und im Abstand ϱ von C. Dann ist das Potential von K an der Stelle $P(x, y, z)$, an der sich ein Massenpunkt mit der Masse m befinden möge, durch

$$U = k^2 m \int_K \frac{dm'}{r} \tag{III; 96}$$

gegeben, wo

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = R^2 - 2\varrho R \cos\varphi + \varrho^2$$

und φ der zwischen CP und CP' eingeschlossene Winkel ist. Es ist dann

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left[1 - 2\frac{\varrho}{R}\cos\varphi + \left(\frac{\varrho}{R}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

oder, wenn man die Klammer nach dem binomischen Satz entwickelt und Glieder von höherer als 2. Ordnung in der kleinen Größe ϱ/R vernachlässigt,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left[1 + \frac{\varrho}{R}\cos\varphi - \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2 (1 - 3\cos^2\varphi) + \cdots\right]. \tag{III; 97}$$

Nun sind aus Symmetriegründen, wenn man über alle Massenelemente des Körpers integriert, die „Momente" 1. und 2. Ordnung

$$\begin{gathered} \int x'\, dm' = \int y'\, dm' = \int z'\, dm' = 0, \\ \int y'z'\, dm' = \int z'x'\, dm' = \int x'y'\, dm' = 0. \end{gathered} \tag{III; 98}$$

Andererseits sind

(III; 99)
$$A = \int (y'^2 + z'^2)\, dm', \quad B = \int (z'^2 + x'^2)\, dm', \quad C = \int (x'^2 + y'^2)\, dm'$$

die drei *Hauptträgheitsmomente* des Körpers, dessen Hauptträgheitsachsen mit den Koordinatenachsen, die ja nach Voraussetzung auch seine Symmetrieachsen sind, zusammenfallen. Aus (III; 99) folgt

$$\int x'^2\,dm' = \frac{B+C-A}{2},\quad \int y'^2\,dm' = \frac{C+A-B}{2},\quad \int z'^2\,dm' = \frac{A+B-C}{2};$$

hieraus

$$\int \varrho^2\,dm' = \frac{A+B+C}{2},$$

ferner wegen $\varrho\cos\varphi = \dfrac{xx'+yy'+zz'}{R}$ und (III; 98)

$$\int \varrho\cos\varphi\,dm' = 0$$

und

$$\int (\varrho\cos\varphi)^2\,dm' = \frac{1}{2R^2}[x^2(B+C-A)+y^2(C+A-B)+z^2(A+B-C)]$$

$$= \frac{1}{2}(A+B-C)+\frac{1}{R^2}[x^2(C-A)+y^2(C-B)].$$

Setzt man den Wert (III; 97) in (III; 96) ein und setzt die Gesamtmasse des Körpers

$$\int dm' = M,$$

so ergibt sich mit den obigen Ausdrücken für die Integrale

$$U = k^2\frac{m}{R}\Big\{M - \frac{1}{4R^2}(A+B+C)+\frac{3}{4R^2}(A+B-C)+$$
$$+\frac{3}{2R^4}[x^2(C-A)+y^2(C-B)]+\cdots\Big\} =$$
$$= k^2\frac{m}{R}\Big\{M - \frac{1}{2R^2}[(C-A)+(C-B)]+$$
$$+\frac{3}{2R^4}[x^2(C-A)+y^2(C-B)]+\cdots\Big\}.$$

Ist K speziell ein abgeplattetes Rotationsellipsoid (Sphäroid) oder ein ähnlicher Rotationskörper, dessen Rotationsachse mit der z-Achse zusammenfällt, so ist $A = B$, und man erhält einfacher

$$U = k^2\frac{m}{R}\left\{M+\frac{1}{2R^2}(C-A)\left[1-3\left(\frac{z}{R}\right)^2\right]+\cdots\right\}$$

oder, wenn (Abb. 32) ϑ den Winkel bezeichnet, den der Strahl OP mit der x, y-Ebene bildet und den man als die *Deklination des Aufpunktes* in bezug auf die Äquatorebene des Körpers K bezeichnen kann,

$$U = k^2 \frac{mM}{R} \left\{1 + \frac{C - A}{2MR^2} (1 - 3 \sin^2 \vartheta) + \cdots\right\}. \tag{III; 100}$$

Für die Hauptträgheitsmomente eines homogenen Rotationsellipsoids erhält man schließlich auf Grund einer elementaren Anwendung der Integralrechnung

$$C = \frac{2}{5} M a^2; \quad A = B = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2) \tag{III; 101}$$

und daher, wenn man die Abplattung α einführt,

$$\frac{C - A}{M} = \frac{1}{5} (a^2 - b^2) = \frac{1}{5} a^2 \left(\frac{a - b}{a}\right) \left(\frac{a + b}{a}\right) = \frac{1}{5} a^2 \alpha (2 - \alpha),$$

also schließlich

$$U = k^2 \frac{mM}{R} \left\{1 + \frac{1}{5} \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot (1 - 3 \sin^2 \vartheta) + \cdots\right\}. \tag{III; 102}$$

Das Potential eines abgeplatteten Himmelskörpers ist also, zunächst unter der Voraussetzung homogener Dichte, mit dem Potential der NEWTONschen Gravitationskraft identisch, solange das Zusatzglied in der Klammer gegen die Einheit vernachlässigt werden darf. Sofern dies der Fall ist, darf man den Körper K also durch einen in seinem Mittelpunkt gelegenen und mit der Masse M belegten Massenpunkt ersetzen. Für $\alpha > 0$ ist das offenbar nur dann der Fall, wenn R gegen den Äquatorhalbmesser a des attrahierenden Körpers genügend groß ist. Für siebenstellige Rechnung ergibt sich als Bedingung hierfür, wenn wir den ungünstigsten Fall $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ zugrunde legen und α^2 gegen α vernachlässigen,

$$\frac{2}{5} \alpha \left(\frac{a}{R}\right)^2 < \frac{1}{2} 10^{-7} \quad \text{oder} \quad R > R_0 = 2000\, a \sqrt{2\alpha}.$$

Für Erde, Jupiter und Saturn erhält man z.B.

Erde:	$= 1 : 297$,	$2000 a = 0.08533$ A.E.,	$R_0 = 0.007$ A.E.
Jupiter:	$= 1 : 16.35$,	$2000 a = 0.96075$ A.E.,	$R_0 = 0.336$ A.E.
Saturn:	$= 1 : 10.44$,	$2000 a = 0.80636$ A.E.,	$R_0 = 0.353$ A.E.

Die kritischen Abstände R_0 sind in allen drei Fällen bedeutend kleiner als die im Planetensystem vorkommenden Abstände zwischen den Planeten selbst. Sie sind aber merklich größer als die Abstände der Satelliten von ihren Zentralplaneten. So ist z.B. der Abstand des Mondes von der Erde rund $1 : 400$

= 0.0025 A.E., also fast dreimal kleiner als derjenige Abstand, in dem bei siebenstelliger Rechnung der Einfluß der Abplattung der Erde keinen Einfluß mehr hat. Auch die Satellitensysteme des Jupiter und des Saturn liegen weit innerhalb dieser kritischen Grenze. In allen Satellitenproblemen der Himmelsmechanik muß daher auf die Abplattung des Planeten Rücksicht genommen werden. In noch weit größerem Maße gilt das für die Bewegungstheorie der engen Doppelsternsysteme.

Die kritischen Abstände verkleinern sich etwas, wenn man von der provisorischen Annahme konstanter Dichte im Planeteninnern abgeht; die nach obigem Schema gerechneten Werte sind also Höchstwerte, jenseits derer die Vernachlässigung der Abplattung unter allen Umständen gestattet ist. In Wirklichkeit ist die Dichte eine Funktion des Abstandes vom Planetenmittelpunkt, die mit wachsendem Abstand abnimmt. Bei der Erde beträgt die Dichte im Mittelpunkt etwa 12 g/cm^3, an der Oberfläche rund 3 g/cm^3, und die Abnahme erfolgt an gewissen Stellen unstetig: die Erde besteht aus einem sehr dichten Kern, der von dem Mantel in 2900 km Tiefe durch einen Dichtesprung getrennt ist, und es ist nicht ausgeschlossen, daß auch noch andere, wenn auch weniger ausgeprägte Sprungschichten existieren. Über die Abplattung des Erdkerns ist nichts Sicheres bekannt, sie ist aber wahrscheinlich geringer als die der Oberfläche. Der Äquatorwulst der Erde, der die Abhängigkeit der Potentialfunktion von ϑ und die dadurch verursachte sphäroidische Deformation der Niveauflächen dieser Funktion vornehmlich hervorruft, besteht aus Material, dessen Dichte nur etwa $^3/_5$ der mittleren Erddichte beträgt. Es ist daher zu erwarten, daß der Faktor $C - A$ in (III; 100) etwas kleiner ausfällt als bei homogener Dichte. Über das Dichtegesetz im Innern der Riesenplaneten ist noch wenig bekannt, doch darf man vermuten, daß bei ihnen die Dichte der Oberflächenschichten relativ zur mittleren Dichte noch geringer ist als bei der Erde. Alle diese Überlegungen deuten darauf hin, daß die aus (III; 101) abgeleiteten Beträge des von ϑ abhängigen Zusatzgliedes nur obere Schranken für die wirklichen Beträge darstellen.

In den meisten praktisch vorkommenden Fällen genügt es immer, das in (III; 100) aufgeführte erste Entwicklungsglied der Potentialfunktion zu berücksichtigen. Eine Ausnahme bildet das neuerdings aktuell gewordene Problem der Bewegung künstlicher Erdsatelliten. Hier ist a/R nahezu gleich der Einheit, und die Entwicklung der Potentialfunktion müßte, um eine genaue Berechnung der wirksamen Kräfte zu garantieren, um einige Glieder weiter getrieben werden. Auch müßte man, um die Beträge der Koeffizienten dieser Glieder genau genug berechnen zu können, die Größe $C - A$ und die ebenfalls von der Dichtefunktion abhängigen Momente höherer Ordnung genauer kennen, als dies aus unserer jetzigen Kenntnis vom Massenaufbau der Erde möglich ist. Zwar läßt sich die „dynamische Abplattung“ $\frac{C - A}{C}$ der Erde auf himmelsmechanischem Wege mit Hilfe der Theorie der Mondbewegung und der mit ihr eng zusammenhängenden Verlagerung des Frühlingspunktes (Präzession und Nutation) ermitteln, aber für die in den höheren Gliedern von (III; 100) vorkommenden Momente höherer Ordnung ist dies nicht mehr möglich,

da ihr Einfluß auf die Bewegung des Mondes dazu nicht groß genug ist. Es könnte aber die genaue Beobachtung eines weit genug außerhalb der Grenzen der irdischen Atmosphäre kreisenden künstlichen Satelliten zur Bestimmung dieser wichtigen Größen benutzt werden. An dieser Stelle kann auf dieses Problem, das erst im Zusammenhang mit den Störungstheorien und insbesondere den Bewegungen der Satelliten im Band III dieses Werkes angeschnitten werden kann, nur hingewiesen werden.

Ebenso wie es möglich ist, Potential und Gravitationsfeld eines kugelsymmetrisch aufgebauten Himmelskörpers durch das eines in seinem Mittelpunkt liegenden Massenpunktes zu ersetzen, läßt sich auch zeigen, daß das von der Abplattung herrührende Zusatzpotential, das nicht, wie das erstere, eine Funktion des Abstandes R allein ist, sondern auch von der Deklination ϑ des Aufpunktes abhängt, ersetzt werden kann durch das Potential eines mit Masse gleichmäßig belegten Ringes, der den Mittelpunkt des Himmelskörpers in dessen Äquatorebene umgibt. Das gilt wenigstens, solange es ausreicht, sich auf das erste Zusatzglied der Entwicklung (III; 100) zu beschränken.

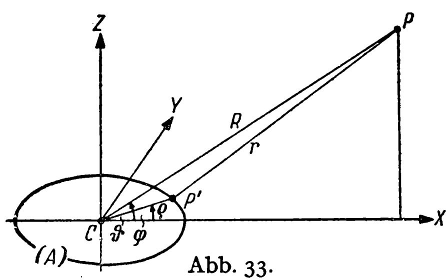


Abb. 33.
Potential eines ringförmigen Massefadens.

Um dies zu beweisen, definieren wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem so, daß der (fadenförmige) Ring mit dem Halbmesser ϱ in der x, y-Ebene liegt (Abb. 33) und sein Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfang C zusammenfällt. Wir erhalten das Potential U_a dieses Ringes, indem wir in (III; 100) die Ringmasse M_a statt M und für C, A die Hauptträgheitsmomente des Ringes

$$C_a = \int \varrho^2 dm' = \varrho^2 M_a; \quad A_a = \int \varrho^2 \cos^2 \varphi \, dm' = \frac{\varrho^2 M_a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \varrho^2 M_a$$

einsetzen. Es ist dann

$$U_a = k^2 \frac{m M_a}{R} \left\{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^2 (1 - 3 \sin^2 \vartheta) + \cdots \right\}. \tag{III; 103}$$

Nun denke man sich das homogene Rotationsellipsoid mit der Dichte δ zerlegt in eine homogene Kugel mit dem Halbmesser b und der Masse

$$M_0 = \frac{4}{3} \pi b^3 \delta$$

und in den Restkörper mit der Masse

$$M - M_0 = dM = \frac{4}{3} \pi a^2 b \delta \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 2\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) M.$$

Das Potential des Ellipsoids ist dann gleich der Summe der Potentiale U_0 und dU der beiden Teilkörper. Es ist also nach (III; 102)

$$U = k^2 \frac{mM_0}{R} + dU = k^2 \frac{mM}{R} \left\{1 + \frac{1}{5}\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{a}{R}\right)^2 (1 - 3\sin^2\vartheta) + \cdots\right\}$$

und wegen $M = M_0 + dM$

$$dU = k^2 \frac{m\,dM}{R} \left\{1 + \frac{1}{5}\frac{M}{dM}\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{a}{R}\right)^2 (1 - 3\sin^2\vartheta) + \cdots\right\}.$$

Setzen wir hierin $M = \dfrac{dM}{2\alpha\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$, so folgt

$$dU = k^2 \frac{m\,dM}{R} \left\{1 + \frac{1}{10}\left(\frac{a}{R}\right)^2 (1 - 3\sin^2\vartheta) + \cdots\right\}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (III; 103) so erkennt man, daß beide Formeln ineinander übergehen, wenn man

$$M_a = dM \quad \text{und} \quad \frac{\varrho^2}{4} = \frac{a^2}{10}, \quad \text{d.h.} \quad \varrho = a\sqrt{\frac{2}{5}}$$

setzt. Das Potential des homogenen Rotationsellipsoids zerfällt daher in zwei Teile:

1. in das Potential einer homogenen Kugel vom Halbmesser b und der Masse M_0;

2. in das Potential eines in der Äquatorebene liegenden, mit der Kugel konzentrischen, ringförmigen Massenfadens vom Halbmesser $\varrho = a\sqrt{0.4}$ und der Masse $dM = 2\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)M$ des den Äquatorwulst bildenden Restkörpers.

29. *Universelle Gültigkeit des NEWTONschen Gravitationsgesetzes*

Bei dem Versuch, die Bewegungen der Himmelskörper unseres Planetensystems zu beschreiben, hat sich das NEWTONsche Gravitationsgesetz bewährt. Es ist möglich, die Bahnbewegungen der Planeten, Satelliten, Kometen und Meteore in diesem System mit Hilfe der Integrale jener Differentialgleichungen zu berechnen, die aus dem NEWTONschen Attraktionsgesetz folgen, und zwar so genau, daß die berechneten Örter dieser Himmelskörper innerhalb der durch die unvermeidlichen zufälligen Beobachtungsfehler gegebenen Grenzen dargestellt werden. Zwei Ausnahmen hiervon bestätigen nur die Regel. Die eine betrifft die Bewegung des Erdmondes. Dieser Himmelskörper ist der Erde so nahe, und seine Bahngeschwindigkeit so groß, daß die bei der Formulierung der

theoretischen Ansätze notwendige Idealisierung der Bedingungen, unter denen die Bewegung des Mondes zustandekommt, zu gewissen systematischen Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung führt. Insbesondere spielt, worauf schon hingewiesen wurde, bei der Theorie der Mondbewegung die Massenverteilung im Erdinnern eine wichtige Rolle. Da indessen unsere Kenntnisse vom Aufbau des Erdkörpers beschränkt sind, darf man nicht erwarten, daß Theorie und Beobachtung völlig miteinander in Einklang gebracht werden können. Auch die schon früher (Abschn. 18) erwähnte Unregelmäßigkeit der Erdrotation ruft Abweichungen dieser Art hervor, deren Beseitigung allerdings durch Vervollkommnung der Zeitmessungstechnik erwartet werden darf. Die andere Ausnahme betrifft die Bewegung des Planeten *Merkur*. Wie in der Theorie der Störungen (Band III) gezeigt werden wird, bewirken die „säkularen Störungen" durch die übrigen Planeten eine langsame Drehung der Apsidenlinie einer Planetenbahn. Nun ist die beobachtete Apsidenbewegung des Merkur um einen geringen Betrag (rund 43″ im Jahrhundert) rascher, als die aus dem Newtonschen Gesetz folgende Theorie verlangt. Diese Lücke in der Naturgesetzlichkeit der Planetenbewegungen ist durch die allgemeine Relativitätstheorie von Albert Einstein geschlossen worden, aus der sich folgern läßt, daß das Attraktionsgesetz geringfügig von der ihm durch Newton gegebenen Form abweicht, und zwar um gewisse in der Nähe großer Massen nicht mehr zu vernachlässigende Terme, durch deren Berücksichtigung die beobachtete Apsidenbewegung der sonnennahen Planeten zahlenmäßig genau dargestellt wird.

Andererseits befinden sich die *Fixsterne* in so großen räumlichen Abständen jenseits der Grenzen des Planetensystems, daß es a priori nicht unbedingt sicher ist, ob das Newtonsche Gesetz auch dort noch in der gleichen Form gültig ist, obwohl gegen die Annahme der universellen Gültigkeit eines Naturgesetzes, das sich in der näheren Umgebung der Sonne so glänzend bewährt hat, stichhaltige Gründe kaum geltend gemacht werden können. Eine Möglichkeit, diese grundsätzlich bedeutsame Frage zu beantworten, bieten die zahlreichen *visuellen Doppelsterne*, deren Bahnen man durch Beobachtung verfolgen konnte. Innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit erfüllen die Bewegungen dieser Gestirne folgende beiden Regeln:

1. Die scheinbare Bahn des Begleiters um den Hauptstern ist eine Ellipse, in deren Innern sich der Hauptstern irgendwo befindet.

2. Der vom Hauptstern zum Begleiter führende Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Diese beiden Regeln sind notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit des Newtonschen Attraktionsgesetzes in den Doppelsternsystemen. Aus diesem Gesetz würde folgen, daß die wahre Bahn des Begleiters um den Hauptstern eine Ellipse ist, in deren einem Brennpunkt der Hauptstern sich befindet. Projiziert man diese Bahn auf die durch den Ort des Hauptsterns gelegte Tangentialebene der Sphäre, so erhält man als „scheinbare Bahn" wiederum eine Ellipse, doch kann im Innern dieser Ellipse der Hauptstern einen beliebigen Platz einnehmen, je nach der Exzentrizität der wahren Bahn und der Lage der Bahnebene in bezug auf die Projektionsebene. Da ferner für

die wahre Bahn, falls diese durch das Wirken einer Zentralkraft hervorgerufen wird, der Flächensatz gilt, so hat er ebenfalls für die scheinbare Bahn Gültigkeit. Projiziert man nämlich (Abb. 34) eine ebene geschlossene Fläche mit dem Inhalt f, deren räumliche Lage durch den auf ihr senkrecht stehenden Einheitsvektor $\mathfrak{m}$ gekennzeichnet ist, auf die Tangentialebene, deren Lage durch den zu ihr normalen Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ bestimmt wird, so ist der Flächeninhalt der Projektion

$$g = f \cos(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}),$$

wenn $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ den von den Vektoren $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ eingeschlossenen Winkel bedeutet. Sei nun f insbesondere der Flächeninhalt des vom Fahrstrahl des Begleiters in der wahren Bahn überstrichenen Ellipsensektors, so folgt aus dem Flächensatz $f = \text{const}$ und aus der Konstanz der beiden Vektoren auch $g = \text{const}$, d.h., der Flächensatz gilt auch in der scheinbaren Bahn. Es gilt aber auch die Umkehrung dieses Satzes, d.h., da für die scheinbare Bahn der Flächensatz erfahrungsgemäß erfüllt ist, so ist dies notwendig auch für die wahre Bahn der Fall. Daraus folgt aber, daß die Kraft, mit der der Begleiter vom Hauptstern angezogen wird, eine *Zentralkraft* ist.

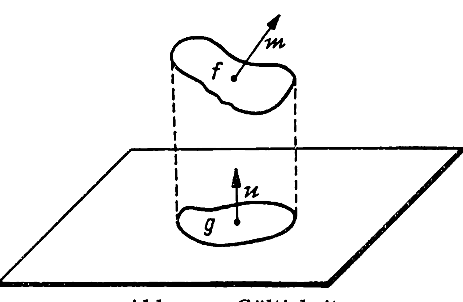


Abb. 34. Gültigkeit des Flächensatzes für Projektionen.

Ob diese Zentralkraft jedoch mit der NEWTONschen Gravitationskraft identisch ist, kann aus den Beobachtungen nicht ohne weiteres geschlossen werden. Zwar ist die wahre Bahn sicher eine Ellipse (oder ein Kreis), es ist aber noch unentschieden, ob sich der Hauptstern wie in der KEPLERschen Bewegung in einem der Brennpunkte der wahren Ellipse oder an irgendeiner anderen Stelle im Innern dieser Kurve befindet.

Um diesen Sachverhalt zu klären, erinnern wir uns der Gleichung (II; 39) im Abschn. 16:

$$R(u, \varphi) = m c^2 u^2 (u'' + u); \quad u = \frac{1}{r}; \quad u'' = \frac{d^2 u}{d\varphi^2},$$

die für jede Zentralkraft erfüllt ist und in der R eine beliebige Funktion von u und dem Richtungswinkel φ des vom Zentralkörper zum Begleiter führenden Fahrstrahls sein kann. Es ist also zu untersuchen, wie der Betrag der Zentralkraft als Funktion von u und φ beschaffen sein muß, damit die Bahn eine Ellipse sei.

In einem durch die Hauptachsen der Ellipse definierten rechtwinkligen Koordinatensystem lautet die Bahngleichung

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Sei (Abb. 35) $S(\alpha, \beta)$ der Ort des Hauptsterns innerhalb der Ellipse und seien

$\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$ die auf S bezogenen relativen Koordinaten des Begleiters P, so gilt

$$b^2(\alpha + r\cos\varphi)^2 + a^2(\beta + r\sin\varphi)^2 = a^2b^2$$

oder

$$r^2(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi) + 2r(\alpha b^2\cos\varphi + \beta a^2\sin\varphi) = C^2 =$$
$$= a^2b^2 - (\alpha^2b^2 + \beta^2a^2) > 0.$$

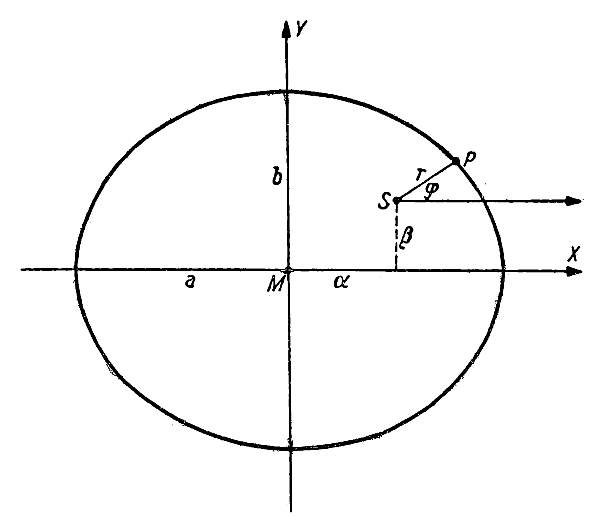


Abb. 35. Gültigkeit des Gravitationsgesetzes für Doppelsternbahnen.

Setzen wir nun

$$\Phi = \frac{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}{C^2} = \frac{1}{C^2}\left[\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2\varphi\right] = A - B\cos 2\varphi,$$

$$\Psi = \frac{\alpha b^2\cos\varphi + \beta a^2\sin\varphi}{C^2} = M\cos\varphi + N\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{r} = u,$$

so läßt sich die Bahngleichung auch in der Form

$$\text{(III; 104)} \qquad u^2 - 2u\Psi = \Phi;\quad u = \Psi \pm \sqrt{\Psi^2 + \Phi} = \Psi \pm \Theta$$

schreiben, wo

$$\Theta^2 = \Psi^2 + \Phi = F + G\cos 2\varphi + H\sin 2\varphi$$

mit

$$F = \frac{M^2 + N^2}{2} + A, \quad G = \frac{M^2 - N^2}{2} - B, \quad H = MN$$

gesetzt ist. Differenziert man (III; 104) zweimal nach φ und addiert u hinzu, so erhält man

$$u'' + u = \Psi'' + \Psi \pm \frac{2\Theta\Theta'' - \Theta'^2 + 4\Theta^2}{\Theta\sqrt{\Theta}}.$$

Da nun

$$\Psi'' = -\Psi, \quad \Theta'' = -4(\Theta - F), \quad \Theta'^2 = 4[(G^2 + H^2) - (\Theta - F)^2],$$

so folgt nach einfacher Rechnung

$$u'' + u = \pm\frac{F^2 - (G^2 + H^2)}{\Theta\sqrt{\Theta}} = \frac{F^2 - (G^2 + H^2)}{(u - \Psi)^3}.$$

Der Betrag R der Zentralkraft läßt sich demnach, je nachdem man die erste oder die zweite Darstellungsart von $u'' + u$ wählt, durch

(III; 105)
$$\frac{F^2 - (G^2 + H^2)}{(F + G\cos 2\varphi + H\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R}{mc^2u^2} = \frac{F^2 - (G^2 + H^2)}{(u - M\cos\varphi - N\sin\varphi)^3}$$

ausdrücken. Machen wir nun die plausible Annahme, daß R von der Lage des Koordinatensystems unabhängig, also eine Funktion von u allein sei, so gibt es zwei Möglichkeiten dazu, je nachdem wir die linke oder die rechte Seite der Formel (III; 105) der Darstellung von $R(u)$ zugrundelegen. Man erhält für diese beiden Möglichkeiten

$$1)\quad G = H = 0; \quad R = mc^2u^2\sqrt{F} = mc^2\frac{\sqrt{F}}{r^2}, \qquad \text{(III; 106)}$$

$$2)\quad M = N = 0; \quad R = mc^2\frac{F^2 - (G^2 + H^2)}{u} = mc^2(F^2 - G^2 - H^2)\,r.$$

Im ersten Falle ist die Kraft dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional, wie beim NEWTONschen Gesetz, womit eigentlich schon gezeigt ist, daß die Bewegung wirklich nach diesem Gesetz verläuft. Wir können dieses Ergebnis aber noch durch folgende Überlegungen erhärten: Wegen $H = 0 = MN$ wird eine der beiden Größen M oder N verschwinden – nicht beide, da sonst wegen $G = 0$ auch $B = 0$ wäre, was nur im Falle einer Kreisbewegung ($a = b$) zuträfe, denn es wäre dann nach (III; 104) $u^2 = A =$ const. Andererseits kann aber die Kreisbewegung nur eine *spezielle* Form der Bewegung sein, da der Hauptstern dann im Mittelpunkt des Kreises, in der Projektion also im Mittel-

punkt der scheinbaren Ellipse läge, was erfahrungsgemäß nur in seltenen Ausnahmefällen zutrifft. Aus $G = 0$ folgt also

$$\frac{M^2 - N^2}{2} = B = \frac{a^2 - b^2}{2C^2},$$

so daß also, wenn nur eine der beiden Größen M oder N verschwinden soll, dies nicht M sein kann, da dann $a^2 - b^2 < 0$ wäre. Wir haben daher $N = 0$ und daher auch $\beta = 0$ zu setzen, d.h., der Hauptstern befindet sich irgendwo auf der großen Achse der Ellipse. Mit $\beta = 0$ erhält man dann

$$C^2 = b^2(a^2 - \alpha^2), \quad M = \frac{\alpha b^2}{C^2} = \frac{\alpha}{a^2 - \alpha^2}$$

und aus $2B = M^2$

$$\frac{a^2 - b^2}{C^2} = \frac{a^2 e^2}{C^2} = \frac{\alpha^2 b^4}{C^4} \quad \text{oder} \quad \alpha = \pm ae,$$

d.h., der Ort des Hauptsterns ist einer der beiden Brennpunkte der wahren Bahnellipse. Schließlich findet man

$$F = \frac{M^2}{2} + A = \frac{\alpha^2 b^4}{2C^4} + \frac{a^2 + b^2}{2C^2}$$

oder, mit $\alpha^2 = a^2 e^2$, $C^2 = a^2 b^2(1 - e^2) = b^4$,

$$F = \frac{a^2 e^2 + a^2(2 - e^2)}{2b^4} = \frac{a^2}{b^4} = \frac{1}{p^2}.$$

Der Ausdruck für die Größe der Zentralkraft wird demnach

$$R = \frac{mc^2}{pr^2} = \varkappa^2 \frac{m}{r^2},$$

wenn $c = \varkappa \sqrt{p}$ gesetzt wird.

Im zweiten Fall (III; 106) ist $\alpha = \beta = 0$. Der Hauptstern befindet sich demnach im Mittelpunkt der elliptischen Bahn, und es ist, wegen $C^2 = a^2 b^2$,

$$F^2 - (G^2 + H^2) = A^2 - B^2 = 2\frac{a^2 b^2}{C^2} = 2$$

und daher

$$R = 2mc^2 r$$

der Betrag der Zentralkraft, die dem Abstand der beiden Himmelskörper direkt proportional ist. In der Physik treten Zentralkräfte dieser Art bei elastischen und Pendelschwingungen kleiner Amplitude auf (harmonische Bewegung, siehe auch Abschn. 89). Im Falle der Doppelsternbahnen ist diese Möglichkeit aus demselben Grunde ausgeschlossen, aus dem wir weiter oben ausschließen mußten, daß es sich *nur* um Kreisbahnen handelt. Denn auch hier müßte der Hauptstern stets im Mittelpunkt der scheinbaren Ellipse zu finden sein, was den Beobachtungen widerspricht. Das NEWTONsche Gesetz ist also das einzige, das die Bewegungen der Doppelsterne zu erklären vermag, und es besteht somit kein Grund, an seiner universellen Gültigkeit zu zweifeln.

KAPITEL IV

DIE BERECHNUNG UNGESTÖRTER EPHEMERIDEN

30. *Koordinatensysteme und Örter*

Die Bewegung eines Massenpunktes um einen anderen oder um den gemeinsamen Schwerpunkt beider wird, als Lösung einer vektoriellen Differentialgleichung 2. Ordnung, durch sechs unabhängige Konstanten, die *Bahnelemente*, eindeutig bestimmt, sofern man annimmt, daß außer diesen beiden Massen – etwa Sonne und Planet – keine anderen Körper vorhanden sind, die merkliche Anziehungskräfte (störende Kräfte) ausüben. Setzt man die Elemente einer solchen ungestörten Bahn als bekannt voraus, so ermöglichen die im vorigen Kapitel abgeleiteten Beziehungen in jedem Fall, die in irgendeinem räumlichen Koordinatensystem definierten Örter des Himmelskörpers als Funktionen der Zeit zu berechnen.

Eine Liste, in der Örter von Himmelskörpern – handle es sich um ungestörte Bahnen auf Grund der KEPLERschen Gesetze oder um exakte Bahnen unter Berücksichtigung aller störenden Kräfte – für eine beliebig lange Reihe von gleichabständigen Zeitpunkten verzeichnet sind, heißt *„Ephemeride“* (ἐφημερίς = Tagebuch). Die Bedeutung des Wortes weist auf eintägige Zeitintervalle hin, und in der Tat enthalten viele Ephemeriden, die in den astronomischen Jahrbüchern zu finden sind, die Koordinaten der Himmelskörper (Sonne, Mond und die Planeten bis einschließlich Saturn) für jeden Tag des Jahres (meistens für 0^h Weltzeit). Daneben kommen auch andere Intervalle vor: so einstündige des Mondes in nautischen Jahrbüchern (Nautical Almanac!), viertägige für die Planeten Uranus, Neptun und Pluto, deren scheinbare Bewegung langsam erfolgt, und zehntägige für die scheinbaren Örter einer Auswahl hellerer Fixsterne (Fundamentalsterne). Schließlich werden bei der ephemeridenmäßigen Berechnung der „speziellen Störungen“ der Planeten- und Kometenbahnen, die im Band II behandelt werden sollen, auch längere Intervalle (20, 40 und 80 Tage) benutzt.

Die Berechnung von ungestörten Ephemeriden ebenso wie die von einzelnen Örtern, die sich auf bestimmte vorgegebene Zeitpunkte beziehen, erfolgt teils nach strengen Formeln, teils auf Grund von Reihenentwicklungen. Die hierbei verwendeten Methoden sind äußerst vielgestaltig, und ihr Formalismus gewährt tiefe Einblicke in die Natur des Zweikörperproblems. Es ist daher gerechtfertigt, ihnen einen breiten Raum in dieser Darstellung zu gewähren, um so mehr, als sie auch die Grundlage des umgekehrten Problems bilden, das eine sehr große praktische Bedeutung hat: der Aufgabe nämlich, die Bahnelemente eines Himmelskörpers aus einzelnen gegebenen oder beobachteten Örtern zu bestimmen (Kapitel VIII und IX).

Bevor wir an das Problem der Ephemeridenrechnung selbst herangehen, muß einiges über die Koordinatensysteme gesagt werden, die in der Astronomie be-

nutzt werden. Diese Dinge werden in der „*Sphärischen Astronomie*" behandelt und müssen hier als bekannt vorausgesetzt werden. Es genügt daher, an dieser Stelle eine kurze Zusammenfassung zu geben.

Die Mannigfaltigkeit der verwendeten Koordinatensysteme ist ziemlich groß. Man unterscheidet:

1. *nach der Lage des Koordinatenursprungs*
   a) *heliozentrische* Systeme (Ursprung im Sonnenmittelpunkt),
   b) *geozentrische* Systeme (Ursprung im Erdmittelpunkt),
   c) *topozentrische* Systeme (Ursprung im Beobachtungsort),
   d) *baryzentrische* Systeme (Ursprung im Schwerpunkt Sonne–Planet oder Erde–Mond, mitunter auch im Schwerpunkt des gesamten Planetensystems).

Die baryzentrischen Systeme haben in der Ephemeridenrechnung geringere Bedeutung, sie werden aber häufig in der Astronomie der Doppelsterne benutzt. Die Systeme, deren Ursprung im Schwerpunkt Erde–Mond liegen, werden mitunter bei der Bestimmung von Planetenbahnen verwendet, da das Baryzentrum des Systems Erde–Mond mit weit größerer Annäherung eine KEPLERsche Ellipse beschreibt, als dies für den Erdmittelpunkt (oder gar den auf der Erdoberfläche liegenden Beobachtungsort) der Fall ist, und da man aus diesem Grunde die einfachen Gesetzmäßigkeiten der Zweikörperbewegung für die Bewegung des Baryzentrums (als Koordinatenanfangspunkt) mit der gleichen Berechtigung in Anspruch nehmen kann wie für die des beobachteten Planeten oder Kometen. In der Stellarastronomie werden auch, wie hier nur am Rande vermerkt sei, *galaktozentrische* Systeme (Ursprung im Mittelpunkt des Milchstraßensystems) verwendet.

Ferner unterscheidet man

2. *nach der Lage der Hauptkoordinatenebene*
   a) *ekliptikale* Systeme (Hauptkoordinatenebene der Ekliptik parallel),
   b) *äquatoreale* Systeme (Hauptkoordinatenebene der Ebene des Erdäquators parallel).

(In der Stellarastronomie benutzt man auch *galaktische* Systeme, deren Hauptkoordinatenebene der Ebene des Milchstraßensystems parallel ist.)

Da Ekliptik und Äquator ihre Lage im Raume infolge der Planetenstörungen und der Präzession und Nutation ständig verändern, ist es nötig, zwecks genauer Definition dieser Systeme einen Zeitpunkt, die *Epoche*, anzugeben, auf den sich die Orientierung der Koordinatenachsen beziehen soll. Einzelne Örter pflegt man häufig auf die *instantane* Lage der Ebenen zu beziehen, eine zusammenhängende Folge von Örtern (etwa eine Ephemeride oder die für eine Bahnbestimmung erforderlichen Ortsangaben eines Himmelskörpers für verschiedene Beobachtungszeiten) meist auf die *mittlere* Lage von Ekliptik, Äquator und Frühlingspunkt am Jahresanfang oder zu einer *Normalepoche* (1925.0, 1950.0, 1975.0 usw.). Unter der mittleren Lage versteht man dabei die Lage der Ebenen ohne Rücksicht auf die periodischen Schwankungen infolge der Nu-

tation. Die Hauptkoordinatenrichtung (die positive X-Achse) ist dabei stets nach dem (instantanen bzw. mittleren) Frühlingspunkt gerichtet, der als Schnittpunkt zwischen Ekliptik und Himmelsäquator an der Sphäre beiden Systemen gemeinsam ist.

3. *Nach der Art des Systems* unterscheidet man

a) *rechtwinklige Koordinatensysteme,*
b) *Polarkoordinatensysteme.*

Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, wollen wir für die Koordinaten stets folgende Bezeichnungen verwenden:

A. *Rechtwinklige Koordinaten:*

a) heliozentrisch im Ekliptiksystem: x, y, z,
b) heliozentrisch im Äquatorsystem: $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$,
c) geozentrisch im Ekliptiksystem: ξ, η, ζ,
d) geozentrisch im Äquatorsystem: $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$.

Den Querstrich über den Äquatorkoordinaten wollen wir nur da gebrauchen, wo eine Unterscheidung gegenüber den Ekliptikkoordinaten nötig ist. Wo ein Zweifel oder eine Verwechslung ausgeschlossen ist oder wo es auf die Orientierung des Systems nicht ankommt, wird der Strich fortgelassen. Die kleinen parallaktischen Korrektionen, die an topozentrische Örter angebracht werden müssen, um geozentrische zu erhalten, werden mit $\Delta\xi$, $\Delta\bar{\xi}$; ... bezeichnet.

B. *Polarkoordinaten:*

a) heliozentrisch im Ekliptiksystem: r, l, b
(r = heliozentrische Distanz, l = heliozentrische Länge, b = heliozentrische Breite),
b) heliozentrisch im Äquatorsystem: r, $\bar{l}$, $\bar{b}$,
c) geozentrisch im Ekliptiksystem: ϱ, λ, β
(ϱ = geozentrische Distanz, λ = geozentrische Länge, β = geozentrische Breite),
d) geozentrisch im Äquatorsystem: ϱ, α, δ
(α = Rektaszension, δ = Deklination).

C. *Geozentrische Koordinaten der Sonne:*

Für die geozentrischen Koordinaten der Sonne benutzt man große lateinische Buchstaben:

a) *rechtwinklige Koordinaten:* X, Y, Z (Ekliptik), $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ (Äquator).
b) *Polarkoordinaten:* R, L, B (Ekliptik), R, A, D (Äquator).

Diese Koordinaten werden im folgenden stets als gegeben vorausgesetzt, da sie aus den Sonnenephemeriden der astronomischen Jahrbücher für jeden beliebigen Zeitpunkt durch Interpolation entnommen werden können. Hierbei ist

zu bemerken, daß B (die Sonnenbreite) stets sehr klein ist und im Maximum 1″ nur wenig überschreitet. Mit den geozentrischen Koordinaten der Sonne sind natürlich gleichzeitig auch die *heliozentrischen Koordinaten der Erde* (des Erdmittelpunkts) gegeben. Die ekliptikalen Koordinaten der Erde sind

$$-X,\ -Y,\ -Z \text{ (rechtwinklig) bzw. } R,\ L+\pi,\ -B \text{ (polar)}.$$

Entsprechendes gilt für das Äquatorsystem.

Der Übergang von rechtwinkligen zu Polarkoordinaten vollzieht sich nach einfachen Formeln. So gelten zwischen x, y, z einerseits und r, l, b andererseits die aus der analytischen Geometrie bekannten Formeln

$$\begin{aligned} x &= r\cos b\cos l, & r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ y &= r\cos b\sin l, & \operatorname{tg} l &= \frac{y}{x}, \\ z &= r\sin b, & \operatorname{tg} b &= \frac{z}{x}\cos l = \frac{z}{y}\sin l, \end{aligned} \tag{IV; 1}$$

entsprechende Formeln für die übrigen zusammenhängenden Koordinatentripel. Insbesondere findet man für die ekliptikalen Koordinaten der Sonne

$$\begin{aligned} X &= R\cos B\cos L, \\ Y &= R\cos B\sin L, \\ Z &= R\sin B \end{aligned} \tag{IV; 2}$$

oder, da B sehr klein ist, so daß stets $\cos B = 1$ und $\sin B = B = B''\sin 1''$ gesetzt werden darf,

$$\begin{aligned} X &= R\cos L, \\ Y &= R\sin L, \\ Z &= RB \end{aligned} \tag{IV; 2a}$$

und für viele Zwecke auch $B = 0$ und $Z = 0$.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{g}$ den geozentrischen Ortsvektor eines Planeten, mit $\mathfrak{p}$ seinen heliozentrischen Ortsvektor und mit $\mathfrak{s}$ den geozentrischen Ortsvektor der Sonne, so ist

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + \mathfrak{s}.$$

Es gelten also die Koordinatengleichungen

$$\begin{aligned} \xi &= x + X, & \bar{\xi} &= \bar{x} + \bar{X}, \\ \eta &= y + Y, & \bar{\eta} &= \bar{y} + \bar{Y}, \\ \zeta &= z + Z, & \bar{\zeta} &= \bar{z} + \bar{Z} \end{aligned} \tag{IV; 3}$$

für den Übergang von den heliozentrischen auf die geozentrischen Koordinaten eines Himmelskörpers.

Beim Übergang vom System der Ekliptik auf das des Äquators wird das Koordinatensystem um die beiden Systemen gemeinsame X-Achse gedreht, und zwar um den Winkel ε (mittlere Schiefe der Ekliptik) im negativen Sinne vom positiven Ende der X-Achse (Frühlingspunkt) aus gesehen. Infolge der „Präzession in Schiefe" ist der Winkel ε schwach veränderlich:

$$\varepsilon = 23^\circ\, 26'\, 44''.84 - 0''.4685\,(t - 1950.0),$$

wobei t in tropischen Jahren auszudrücken ist. Die Drehungstransformation ergibt in rechtwinkligen Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}, & \bar{x} &= x, \\ y &= \bar{y}\cos\varepsilon + \bar{z}\sin\varepsilon, \quad \text{bzw.} & \bar{y} &= y\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon, \\ z &= \bar{z}\cos\varepsilon - \bar{y}\sin\varepsilon, & \bar{z} &= z\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon. \end{aligned} \tag{IV; 4}$$

Die kleinen Korrektionen, die man an die topozentrischen Örter anzubringen hat, um geozentrische zu erhalten, ergeben sich am einfachsten im System des Äquators. Sei (Abb. 36) M der Mittelpunkt der Erde, B ein Beobachtungsort mit der geozentrischen Breite φ', sei ferner die X-Achse des rechtwinkligen geozentrischen Koordinatensystems nach dem Frühlingspunkt, die Z-Achse nach dem Nordpol des Himmels gerichtet und sei Δ der Abstand MB, α' die Rektaszension und δ' die Deklination des geozentrischen Zenits von B, ferner Θ die Ortssternzeit der Beobachtung, so ist[1]) nach den Definitionen der Sphärischen Astronomie $\alpha' = \Theta$, $\delta' = \varphi'$, und man findet (IV; 5)

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\xi} &= \Delta \cdot \cos\varphi' \cos\Theta = C\cos\Theta, \\ \Delta\bar{\eta} &= \Delta \cdot \cos\varphi' \sin\Theta = C\sin\Theta, \\ \Delta\bar{\zeta} &= \Delta \cdot \sin\varphi' \qquad\quad = S, \end{aligned}$$

als geozentrische Koordinaten von B, wo C und S zwei Größen darstellen, die für jeden Beobachtungsort konstant sind. Im Anhang A (Tafel I) sind diese Größen als Funktionen der geographischen Breite φ gegeben, die sich von der

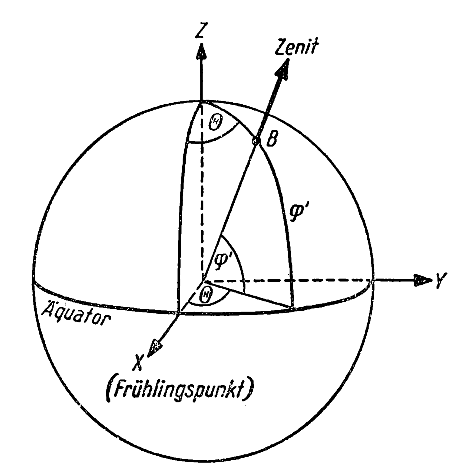


Abb. 36. Korrektion der rechtwinkligen äquatorialen Koordinaten wegen der täglichen Parallaxe.

[1]) Siehe K. Stumpff: Geographische Ortsbestimmungen. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955.

geozentrischen um den stets kleinen Winkel $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$ unterscheidet. Es sind dann $\Delta\bar{\xi}, \Delta\bar{\eta}, \Delta\bar{\zeta}$ die Unterschiede „geozentrische minus topozentrische Koordinaten" des Himmelskörpers.

Durch Anwendung der Formeln (IV; 4) erhält man aus (IV; 5) die Korrektionen auf das Geozentrum im System der Ekliptik:

$$\Delta\xi = C\cos\Theta,$$

$$\Delta\eta = C\sin\Theta\cos\varepsilon + S\sin\varepsilon,$$

$$\Delta\zeta = S\cos\varepsilon - C\sin\Theta\cos\varepsilon.$$

31. *Die Bahnelemente*

Die sechs Integrationskonstanten des Zweikörperproblems, die als *Bahnelemente* die Grundlage der Ephemeridenrechnung bilden, erhielten wir in Abschn. 19 zunächst in folgender Form: die ersten drei als Koordinaten des räumlichen Vektors der Flächengeschwindigkeit $\mathfrak{g}$, also etwa als dessen rechtwinklige Koordinaten c_1, c_2, c_3 in einem vorgeschriebenen Koordinatensystem; zwei weitere als die Koordinaten d_1, d_2 des ebenen Vektors $\mathfrak{f}$ (des LAPLACEschen Vektors) in der durch den Flächensatz bereits festgelegten Bahnebene; die sechste und letzte Konstante schließlich als die durch das Anomalieintegral (die KEPLERsche Gleichung bzw. ihre Analoga) definierte Periheldurchgangszeit T.

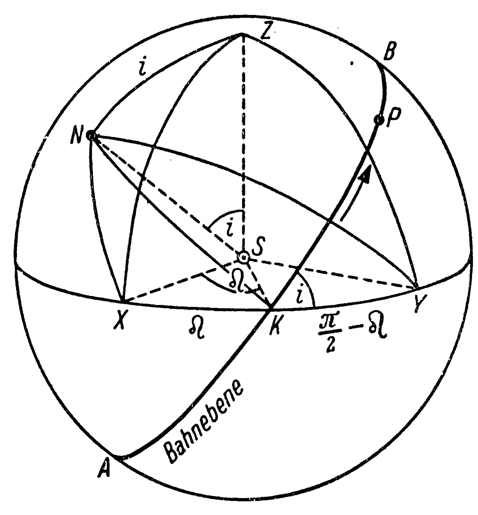


Abb. 37. Lage der Bahnebene.

Anstatt dieser sechs Konstanten kann man auch beliebige Systeme von Funktionen

$$e_i = e_i(c_1, c_2, c_3;\ d_1, d_2;\ T)$$
$$[i = 1, 2, \ldots 6]$$

dieser Konstanten als Bahnelemente benutzen, sofern die gegenseitige Zuordnung der beiden Systeme umkehrbar eindeutig ist. Aus der unbegrenzten Mannigfaltigkeit solcher Möglichkeiten heben wir hier die wichtigste und gebräuchlichste hervor: das System der gewöhnlichen (elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen) *Kegelschnittelemente*.

Wir benutzen ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung im Mittelpunkt der Sonne. Die XY-Ebene sei die der (instantanen oder mittleren) Ekliptik zu irgendeiner Epoche, die positive X-Richtung die nach dem Frühlingspunkt. Die Lage der durch den Koordinatenanfang gehenden *Bahnebene*

ist dann durch die Richtung des Flächengeschwindigkeitsvektors $\mathfrak{g}$ (c_1, c_2, c_3) gegeben. Die Gleichung der Bahnebene lautet (III; 77)

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0.$$

In der Astronomie beschreibt man die Lage einer durch den Koordinatenanfang gehenden Ebene durch zwei Winkelgrößen: die Länge des Knotens und die Neigung der Ebene bezüglich der Hauptkoordinatenebene. In Abb. 37 sind die Hauptkoordinatenebene XY (Ekliptik) und die Bahnebene AKB durch die größten Kreise dargestellt, in denen sie die um den Koordinatenursprung S (Sonne) beschriebene Sphäre schneiden. Der Bewegungssinn des Himmelskörpers P ist durch einen Pfeil gekennzeichnet. Zeigt die Z-Achse nach dem Nordpol der Ekliptik, so stellt SK die Richtung nach dem *aufsteigenden Knoten* der Bahn dar, d.h. nach demjenigen Punkt der Bahn, in dem der Himmelskörper die Ekliptik von Süden nach Norden durchschreitet. Der Winkel XSK bzw. der Bogen XK heißt die *Länge* ☊ *des aufsteigenden Knotens* (kurz „Knotenlänge“) und wird vom Frühlingspunkt X aus im positiven Sinne (d.h. von Z aus gesehen dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt) auf der Ekliptik von 0 bis 2π gezählt. Die *Neigung* i der Bahnebene gegen die Ekliptik wird durch den sphärischen Winkel BKY bzw. durch den Winkel ZSN der Bahnnormale SN gegen die Z-Achse oder durch den Bogen ZN angezeigt und kann also alle Werte zwischen 0 und π annehmen. Die positive Richtung der Normale der Bahnebene ist diejenige, von der aus die Bewegung des Planeten in der Bahn positiv, also dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt (rechtläufig) erscheint. Schreibt man den Vektor der Flächengeschwindigkeit in der Form

$$\mathfrak{g} = c_1 \mathfrak{i} + c_2 \mathfrak{j} + c_3 \mathfrak{k}; \quad |\mathfrak{g}| = c,$$

wo $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren in den Richtungen der positiven Koordinatenachsen bedeuten, so ist offenbar

$$\begin{aligned} c_1 &= (\mathfrak{g}\mathfrak{i}) = c \cos(NX), \\ c_2 &= (\mathfrak{g}\mathfrak{j}) = c \cos(NY), \\ c_3 &= (\mathfrak{g}\mathfrak{k}) = c \cos(NZ). \end{aligned}$$

Man erhält dann nach dem Cosinussatz aus den Dreiecken NKX und NKY, in denen die Seite $NK = \frac{\pi}{2}$ ist,

$$\cos(NX) = \sin i \sin \Omega, \quad \cos(NY) = -\sin i \cos \Omega,$$

außerdem direkt $\cos(NZ) = \cos i$. Damit ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} c_1 &= c \sin i \sin \Omega, \\ c_2 &= -c \sin i \cos \Omega, \\ c_3 &= c \cos i. \end{aligned} \tag{IV; 6}$$

Andererseits ist der Betrag der Flächengeschwindigkeit nach (II; 49)

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \varkappa \sqrt{p}$$

und daher der Bahnparameter

$$p = \frac{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}{\varkappa^2}.$$

In der Bahnebene (Abb. 38) sei nun SK die Richtung nach dem aufsteigenden Knoten, die gleichzeitig als Anfangsrichtung eines ebenen Polarkoordi-

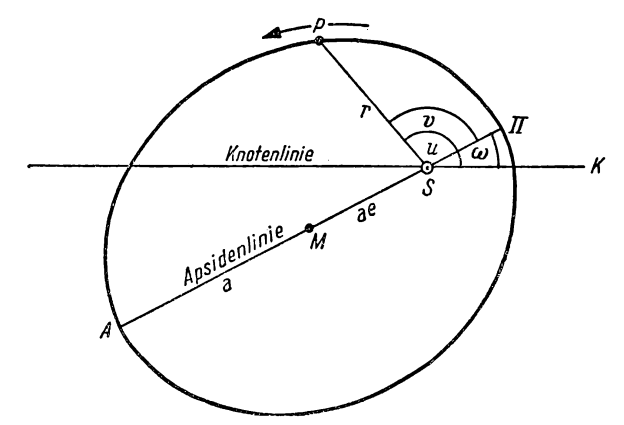


Abb. 38. Form und Lage der Bahn in der Bahnebene.

natensystems oder als positive Abszissenrichtung eines rechtwinkligen Systems diene. Nach S. 93 ist dann der LAPLACEsche Vektor $\mathfrak{f}$ mit den rechtwinkligen Koordinaten d_1, d_2 bzw. den Polarkoordinaten d, ω nach dem *Perihel* Π gerichtet, und es ist

$$\text{(IV; 7)} \qquad d_1 = d \cos \omega, \quad d_2 = d \sin \omega.$$

Der Richtungswinkel ω, der die Lage der großen Achse und damit die Orientierung des Kegelschnitts in der Bahnebene angibt, und der in (III; 18) mit φ_0 bezeichnet wurde, wird *Perihelabstand vom Knoten* genannt. Der Betrag des Vektors $\mathfrak{f}$, nach (III; 18)

$$d = \varkappa^2 e,$$

bestimmt die *Exzentrizität* e der Bahn.

Im Zusammenhang ergeben sich also für die Umwandlung der Systeme $(c_1, c_2, c_3; d_1, d_2; T)$ und $(i, \Omega; p, e, \omega; T)$ ineinander die Transformationsformeln

$$\text{(IV; 8)} \qquad \begin{aligned} c_1 &= \varkappa \sqrt{p} \sin i \sin \Omega, & d_1 &= \varkappa^2 e \cos \omega, \\ c_2 &= -\varkappa \sqrt{p} \sin i \cos \Omega, & d_2 &= \varkappa^2 e \sin \omega, \\ c_3 &= \varkappa \sqrt{p} \cos i, & T &= T. \end{aligned}$$

In der astronomischen Praxis sind noch folgende weiteren Bezeichnungen üblich:

1. Die Richtungskoordinate u des Planetenorts in der Bahnebene (Abb. 38), die in der Richtung der Bahnbewegung vom aufsteigenden Knoten aus gezählt wird, heißt *Argument der Breite*, da die Breite b des Planeten, die in den Knoten null ist, in einfacher Weise von u abhängt: Es ist nämlich (Abb. 39) in dem rechtwinkligen Dreieck KPQ [siehe auch (IV; 11)]

$$\sin b = \sin i \sin u .$$

Der Richtungsunterschied zwischen dem Ortsvektor des Planeten und der Perihelrichtung ist (Abb. 38 u. 39) die *wahre Anomalie*

$$v = u - \omega .$$

2. Neben der numerischen Exzentrizität e ist, wie schon früher (II; 3) bemerkt wurde, bei elliptischen Bahnen der *Exzentrizitätswinkel*

$$\varphi = \arcsin e$$

gebräuchlich, unter dem von den Endpunkten der kleinen Achse aus der Abstand Mittelpunkt–Brennpunkt (lineare Exzentrizität ae) erscheint.

3. Anstatt des Parameters p wird gebraucht:

a) die *große Halbachse*

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = p \sec^2 \varphi \quad \text{(für elliptische Bahnen)}$$

oder ihr Logarithmus. Für Hyperbeln ist a negativ; man setzt dann

$$\alpha = |a| = \frac{p}{e^2 - 1} .$$

b) Bei Parabelbahnen, für die $a = \infty$ wird, benutzt man statt p häufig die *Periheldistanz* q. Wie aus der Parabelgleichung $r = p/(1 + \cos v)$ für das Perihel $(v = 0)$ unmittelbar folgt, ist

$$q = \frac{1}{2} p .$$

c) Bei Ellipsen ist statt p oder a auch die *mittlere Bewegung in der Zeiteinheit*

$$n = \frac{\varkappa}{\sqrt{a^3}}$$

gebräuchlich, die man vielfach auch in Bogensekunden ausdrückt:

$$n'' = \frac{\varkappa}{\sqrt{a^3}\sin 1''}.$$

4. Anstatt der *Perihelzeit* T wird bei elliptischen Bahnen oft die *mittlere Anomalie*

$$M(t_0) = n(t_0 - T)$$

zu einer vorgegebenen *Epoche* t_0 eingeführt.

Nur bei *elliptischen* und *hyperbolischen* Bahnen ist zu deren vollständigen Beschreibung die Angabe aller sechs Elemente, also von i, ☊, a, e, ω, T, erforderlich. Bei *Parabeln* braucht $e = 1$ nicht besonders angegeben zu werden. Von den sechs Elementen (IV; 8) gilt dann zwischen d_1 und d_2 für $e = 1$ die identische Beziehung $d_1^2 + d_2^2 = \varkappa^4$; beide Konstanten sind durch ω völlig bestimmt. Eine parabolische Bahn ist deshalb bereits durch fünf Elemente (i, ☊, q, ω, T) völlig gesichert.

Bei *Kreisbahnen* ist $e = 0$ und, da ein Perihel nicht existiert, auch ω überflüssig. In (IV; 8) entfallen daher die beiden Konstanten $d_1 = d_2 = 0$. Die Stelle der Perihelzeit T vertritt hier das Argument der Breite u_0 zur Epoche t_0. Eine Kreisbahn erfordert also vier Elemente (i, ☊, a, u_0).

Bei Bahnen mit kleiner oder verschwindender Neigung ist die Lage des Knotens schlecht oder gar nicht bestimmbar. In diesen Fällen ist es vorteilhaft, statt des Perihelabstands vom Knoten die *Länge des Perihels* ($\tilde{\omega}$ = ☊ $+ \omega$) zur Kennzeichnung der Perihellage zu benutzen. Dieser Winkel wird vom Frühlingspunkt bis zum aufsteigenden Knoten auf der Ekliptik, von dort an bis zum Perihel auf der Bahn gezählt; die Unsicherheit der Knotenlage fällt dabei heraus. Ebenso wird in solchen Fällen das Argument der Breite u durch die *Länge des Planeten in der Bahn*

(IV; 9) $$s = ☊ + u = ☊ + \omega + v = \tilde{\omega} + v$$

ersetzt.

Auch die *geradlinige Bahn* wird durch vier Elemente bestimmt, nämlich durch die *Länge und Breite des Fallstrahls* (l, b), die *halbe Fallstrecke* (a) bzw. bei dem hyperbolischen Typ die Geschwindigkeit im Unendlichen $\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{\alpha}}\right)$, schließlich die Zeit T des idealen Aufsturzes, die der Perihelzeit bei normalen Bahnen entspricht.

Die Kegelschnittelemente zerfallen in zwei Gruppen: die drei Elemente i, ☊, ω, die von der Wahl des Koordinatensystems abhängen, also andere Zahlenwerte annehmen, wenn wir etwa statt der Ekliptik den Äquator als Hauptkoordinatenebene einführen, und in die Gruppe der übrigen drei, die gegen Transformationen des Koordinatensystems *invariant* sind.

Als Beispiel für das vollständige Elementensystem der Bahn eines Himmelskörpers sei hier das der elliptischen Bahn des Planetoiden (1106) CYDONIA aufgeführt, wie es sich nach einer Bahnbestimmung auf Grund der ersten Beobachtungen nach seiner im Jahre 1929 erfolgten Entdeckung ergeben hatte:

(1106) CYDONIA
Ekliptik und Äquinoktium 1929.0
Epoche: 1929 März 7, $21^h\,50^m\,56\overset{s}{.}9$ Weltzeit

$$\begin{aligned} M &= 338^\circ \;\; 0' \;\; 4\overset{''}{.}0 \\ i &= \;\; 13 \;\;\; 9 \;\; 36.7 \\ \Omega &= 328 \;\; 35 \;\; 26.9 \\ \omega &= 226 \;\; 23 \;\;\; 0.7 \\ \varphi &= \;\;\; 7 \;\;\; 4 \;\; 55.4 \\ n'' &= 877\overset{''}{.}384 \; (a = 2.597870 \text{ A.E.}) \end{aligned}$$

32. *Berechnung heliozentrischer und geozentrischer Örter aus den Kegelschnittelementen*

Die Ergebnisse des vorigen Kapitels liefern alle Mittel, um die Aufgabe der Berechnung von ungestörten Planeten- oder Kometenörtern aus den Bahnelementen im Prinzip zu lösen.

Gegeben seien die Kegelschnittelemente der Bahn, die auf Ekliptik (oder Äquator) und Äquinoktium irgendeiner Epoche bezogen sein mögen, gesucht zunächst die rechtwinkligen heliozentrischen Koordinaten (x, y, z bzw. $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$) des Himmelskörpers zu einer vorgegebenen Zeit t. Diese Aufgabe läßt sich in fünf Schritten lösen:

1. Berechnung der *exzentrischen Anomalie E* (Ellipse) bzw. des Hilfswinkels H (Hyperbel) aus der KEPLERschen Gleichung (III; 44)

$$E - e \sin E = n(t - T) = M(t_0) + n(t - t_0),$$

bzw. ihres hyperbolischen Analogons (III; 51)

$$e \operatorname{tg} H + \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{H}{2}\right) = \frac{\varkappa}{\sqrt{\alpha^3}}(t - T)$$

nach Methoden, über die in Abschn. 35 berichtet werden wird.

2. Berechnung des *Radiusvektors r* und der *wahren Anomalie v* nach (II; 10, 14) bzw. (III; 47, 50):

$$r = a(1 - e \cos E); \quad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\frac{E}{2} \quad \text{(Ellipse)},$$

$$r = \alpha(e \sec H - 1); \quad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg}\frac{H}{2} \quad \text{(Hyperbel)}.$$

Ist die Bahn eine *Parabel,* so findet man die wahre Anomalie, unter Umgehung von Schritt 1, direkt aus der Zeit t durch Auflösung der kubischen Gleichung (III; 43)

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2} = \frac{\varkappa}{\sqrt{2q^3}}(t - T)$$

nach Methoden, die in Abschn. 34 behandelt werden sollen. Der Radiusvektor ergibt sich dann aus der Bahngleichung

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} = q \sec^2 \frac{v}{2}. \qquad \text{(IV; 10)}$$

3. Das *Argument der Breite* u wird durch die Beziehung

$$u = v + \omega$$

erhalten.

4. Berechnung der *heliozentrischen Polarkoordinaten* r, l, b. In Abb. 39 sind die Spuren der Ekliptik und der Planetenbahnebene auf der (von außen gesehenen) heliozentrischen Sphäre gezeichnet. X sei der Frühlingspunkt, K der aufsteigende Knoten. Auf der Bahnspur bezeichne Π die Perihelrichtung, P die Richtung nach dem Ort des Planeten zur Zeit t. Der Abstand $PQ = b$ des Punktes P von der Ekliptik ist dann die Breite, $XQ = l$ die Länge des Planetenorts. Ferner ist $XK = \Omega$ die Länge des aufsteigenden Knotens, $K\Pi = \omega$ der Abstand des Perihels vom Knoten, $\Pi P = v$ die wahre Anomalie, $KP = u = \omega + v$ das Argument der Breite und der Winkel $PKQ = i$ die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik. Im rechtwinkligen Dreieck PKQ ist dann nach bekannten Sätzen der Sphärischen Trigonometrie

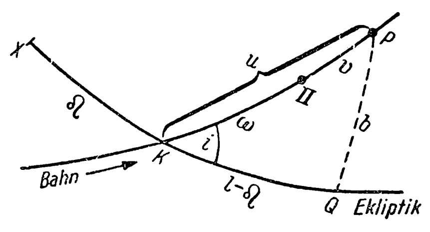


Abb. 39. Bahnebene und Ekliptik.

		(I)	(II)	(III)
	$\cos b \cos(l - \Omega) = \cos u$	$\cos \Omega$	$\sin \Omega$	0
(IV; 11)	$\cos b \sin(l - \Omega) = \sin u \cos i$	$-\sin \Omega$	$\cos \Omega$	0
	$\sin b = \sin u \sin i$	0	0	1

Multipliziert man die Gleichungen (IV; 11) mit den Faktoren (I) bis (III) und addiert, so ergibt sich das Formelsystem

$$\begin{aligned} \cos b \cos l &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\ \cos b \sin l &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\ \sin b &= \sin u \sin i, \end{aligned} \qquad \text{(IV; 12)}$$

aus dem man Länge und Breite des Planetenorts bestimmen kann. Zusammen mit dem bereits berechneten Radiusvektor r sind dann die heliozentrischen Polarkoordinaten des Planeten bekannt.

5. Bestimmung der *rechtwinkligen heliozentrischen Koordinaten* x, y, z. Die Transformationsformeln (IV; 1) ergeben mit (IV; 12) unmittelbar

$$
\begin{aligned}
x &= r\,(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i)\,,\\
y &= r\,(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i)\,,\\
z &= r \sin u \sin i\,.
\end{aligned}
\tag{IV; 13}
$$

Hieraus folgt auch das häufig gebrauchte Formelsystem

$$
\begin{aligned}
x \cos \Omega + y \sin \Omega &= r \cos u\,,\\
y \cos \Omega - x \sin \Omega &= r \sin u \cos i\,,\\
z &= r \sin u \sin i\,,
\end{aligned}
\tag{IV; 14}
$$

das man auch erhält, wenn man in (IV; 11) die Ausdrücke $\frac{\cos}{\sin}(l - \Omega)$ auflöst und (IV; 1) berücksichtigt.

Die Bestimmung der *geozentrischen Koordinaten* erfolgt dann nach den in Abschn. 30 gegebenen Richtlinien. Am besten ermittelt man zunächst die äquatorealen heliozentrischen Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ nach (IV; 4), sodann nach (IV; 3) die geozentrischen Äquatorkoordinaten

$$\bar{\xi} = \bar{x} + \bar{X}, \quad \bar{\eta} = \bar{y} + \bar{Y}, \quad \bar{\zeta} = \bar{z} + \bar{Z},$$

wobei die Sonnenkoordinaten $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ dem Jahrbuch entnommen werden. Schließlich findet man dann die geozentrischen Polarkoordinaten ϱ, α, δ aus

$$
\begin{aligned}
\varrho \cos \delta \cos \alpha &= \bar{\xi}\,,\\
\varrho \cos \delta \sin \alpha &= \bar{\eta}\,,\\
\varrho \sin \delta &= \bar{\zeta}\,.
\end{aligned}
\tag{IV; 15}
$$

33. *Die GAUSSschen Konstanten*

Wenn es sich darum handelt, die ungestörte Ephemeride eines Himmelskörpers für eine Folge gleichabständiger Zeitpunkte aufzustellen, ist es unzweckmäßig, die meist zahlreichen Örter einzeln nach den im vorigen Abschnitt gegebenen Formeln zu berechnen. C. F. GAUSS hat ein Verfahren eingeführt, nach dem wenigstens für den vierten bzw. fünften Schritt der oben entwickelten Rechenvorschrift wesentliche Ersparnisse an Zeit und Mühe erzielt werden.

Da die rechtwinkligen ekliptikalen Koordinaten, wie (IV; 13) zeigt, von den Variablen $r \cos u$ und $r \sin u$ linear abhängen und dasselbe auch, wovon man sich durch Anwendung der Transformation (IV; 4) überzeugt, für die

äquatorealen Koordinaten gilt, so liegt es nahe, diese letzteren gleich in der Form

$$\bar{x} = r(p_x \cos u + q_x \sin u) = r\alpha \sin(A + u),$$
(IV; 16)
$$\bar{y} = r(p_y \cos u + q_y \sin u) = r\beta \sin(B + u),$$
$$\bar{z} = r(p_z \cos u + q_z \sin u) = r\gamma \sin(C + u)$$

aufzuschreiben, wo

$$p_x = \alpha \sin A, \quad q_x = \alpha \cos A,$$
(IV; 17)
$$p_y = \beta \sin B, \quad q_y = \beta \cos B,$$
$$p_z = \gamma \sin C, \quad q_z = \gamma \cos C$$

konstante Größen sind, die nur von i, Ω und ε abhängen. Tatsächlich findet man, wenn man (IV; 4) auf (IV; 13) anwendet,

$$\bar{x} = r[\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i],$$
$$\bar{y} = r[(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \cos \varepsilon - \sin u \sin i \sin \varepsilon],$$
$$\bar{z} = r[\sin u \sin i \cos \varepsilon + (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \sin \varepsilon],$$

also

$$p_x = \cos \Omega, \qquad q_x = -\sin \Omega \cos i,$$
(IV; 18)
$$p_y = \sin \Omega \cos \varepsilon, \quad q_y = \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon,$$
$$p_z = \sin \Omega \sin \varepsilon, \quad q_z = \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon.$$

Will man im System der Ekliptik bleiben, so hat man nur $\varepsilon = 0$ zu setzen und erhält dann x, y, z ebenfalls in der Form (IV; 16), aber mit

$$p_x = \cos \Omega, \quad q_x = -\sin \Omega \cos i,$$
(IV; 19)
$$p_y = \sin \Omega, \quad q_y = \cos \Omega \cos i,$$
$$p_z = 0, \qquad q_z = \sin i.$$

Die sechs Größen $p_x, \ldots q_z$ bzw. die aus ihnen nach (IV; 17) abzuleitenden Konstanten $\alpha, \beta, \gamma; A, B, C$ heißen die *Gaussschen Konstanten*. Sie werden vor der Ephemeridenrechnung aus den gegebenen Bahnelementen ein für allemal berechnet und führen (IV; 13) auf die bequemere Form (IV; 16) zurück. Zudem wird, wenn Äquatorealkoordinaten zu berechnen sind, die lästige Transformation (IV; 4) nur einmal, nämlich bei der Berechnung der Konstanten (IV; 18), durchzuführen sein, die man zweckmäßig für die Maschinenrechnung benutzt, während für logarithmische Rechnung die Verwendung von $\alpha \ldots C$ vorteilhafter ist. Dabei ist zu beachten, daß die Größen α, β, γ ohne Einschränkung der Allgemeinheit als nicht negativ betrachtet werden dürfen, während die Vorzeichen der $p_x, \ldots q_z$ die Quadranten bestimmen, in denen A, B, C liegen.

Sind die Bahnen nur wenig gegen die Ekliptik geneigt, was bei den großen Planeten (außer Pluto) stets, bei Planetoiden sehr häufig zutrifft, so kann man

nach einer Bemerkung von K. BODA[1]) die GAUSSschen Formeln so umwandeln, daß die durch diesen Umstand gegebenen Möglichkeiten, die Rechengenauigkeit zu erhöhen, voll ausgeschöpft werden. Setzt man nämlich in (IV; 13) $u = s - \Omega$, wo s die wahre Länge in der Bahn (IV; 9) bedeutet, ferner $\cos i = 1 - 2\sin^2\frac{i}{2}$, so findet man nach einfacher Rechnung

$$x = r\cos s + r\lambda\sin u, \qquad \lambda = 2\sin^2\frac{i}{2}\sin\Omega,$$

$$y = r\sin s + r\mu\sin u, \quad \text{mit} \quad \mu = 2\sin^2\frac{i}{2}\cos\Omega,$$

$$z = r\nu\sin u, \qquad \nu = \sin i,$$

wo die Konstanten λ, μ von der 2., ν von der 1. Ordnung in der kleinen Größe i sind.

In allen bisherigen Formeln ist angenommen worden, daß sich i, Ω, u stets auf das System der Ekliptik beziehen. Sind diese Größen auf das System des Äquators bezogen ($\bar{i}$, $\bar{\Omega}$, $\bar{u}$), so erhält man natürlich die rechtwinkligen Äquatorkoordinaten in der Form

$$\bar{x} = r(p_x\cos\bar{u} + q_x\sin\bar{u}) \quad \text{usw.}$$

mit den gemäß (IV; 19) gebildeten Konstanten

$$p_x = \cos\bar{\Omega}, \quad p_y = \sin\bar{\Omega}, \quad p_z = 0, \quad \text{usw.}$$

Auch für die ephemeridenmäßige Berechnung der *Geschwindigkeitskoordinaten* eines Himmelskörpers, die für besondere Zwecke nützlich sein kann, lassen sich die GAUSSschen Konstanten entsprechend verwenden. Die Unterscheidung zwischen x und $\bar{x}$ usw. lassen wir jetzt fallen, da ja die Formeln (IV; 16) für beide Systeme gelten, wenn man die $p_x, \ldots, q_z$, den Umständen entsprechend, nach (IV; 18 bzw. 19) berechnet.

Differenziert man die erste Gleichung (IV; 16) nach der Zeit, so erhält man

$$\dot{x} = \dot{r}\alpha\sin(A + u) + r\dot{u}\alpha\cos(A + u)$$

oder, nach (II; 33, 32), mit $c = \varkappa\sqrt{p}$ und $\dot{u} = \dot{v}$,

$$\dot{x} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\alpha\left[e\sin v\sin(A + u) + \frac{p}{r}\cos(A + u)\right].$$

Setzt man dann

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos v, \quad u - v = \omega,$$

---

[1]) Astron. Nachr. *175*, 207 (1910).

so ergibt sich

$$\dot{x} = \alpha \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} [\cos(A + u) + e \cos(A + \omega)], \quad \text{ebenso}$$

(IV; 20)
$$\dot{y} = \beta \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} [\cos(B + u) + e \cos(B + \omega)],$$

$$\dot{z} = \gamma \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} [\cos(C + u) + e \cos(C + \omega)],$$

wobei zu beachten ist, daß die Größen $e \cos(A + \omega), \ldots$ Konstante sind. Für $i = \Omega = 0$, $u = v$, d.h., für ein nach den Hauptachsen der Bahn ausgerichtetes ebenes Koordinatensystem, gehen diese Formeln in (III; 37) über.

Für *Parabel*bahnen erhält man wegen $e = 1$, $p = 2q$

$$\dot{x} = \frac{\varkappa}{\sqrt{2q}} \cdot 2\alpha \cos\left(A + \frac{u + \omega}{2}\right) \cos\frac{u - \omega}{2} =$$
$$= \alpha\varkappa \sqrt{\frac{2}{q}} \cos\left(A + \omega + \frac{v}{2}\right) \cos\frac{v}{2}$$

usw., und wenn man nach (IV; 10) $\cos\frac{v}{2}$ durch $\sqrt{\frac{q}{r}}$ ersetzt,

$$\dot{x} = \alpha\varkappa \sqrt{\frac{2}{r}} \cos\left(A + \omega + \frac{v}{2}\right), \quad \text{ebenso}$$

(IV; 21)
$$\dot{y} = \beta\varkappa \sqrt{\frac{2}{r}} \cos\left(B + \omega + \frac{v}{2}\right),$$

$$\dot{z} = \gamma\varkappa \sqrt{\frac{2}{r}} \cos\left(C + \omega + \frac{v}{2}\right).$$

Die Gleichungen (IV; 16, 20) lassen sich sowohl für Ellipsen als auch für Hyperbeln auf eine Form bringen, die auch die Berechnung von v (Schritt 2 im Rechenschema des Abschn. 32) überflüssig macht, indem man die nach Schritt 1 schon bekannte exzentrische Anomalie wieder einführt. Setzt man in (IV; 16) $u = v + \omega$, so erhält man

(IV; 22)
$$x = r\alpha \sin(A + \omega + v) =$$
$$= r\alpha [\sin(A + \omega) \cos v + \cos(A + \omega) \sin v].$$

Nun ist für *Ellipsen* nach (III; 52)

$$r \cos v = a(\cos E - e); \quad r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

Setzt man dies in (IV; 22) ein, so ergibt sich

$$\text{(IV; 23)} \qquad \begin{aligned} x &= P_x (\cos E - e) + Q_x \sin E, \quad \text{ebenso} \\ y &= P_y (\cos E - e) + Q_y \sin E, \\ z &= P_z (\cos E - e) + Q_z \sin E \end{aligned}$$

mit den Konstanten

$$\text{(IV; 24)} \qquad \begin{aligned} P_x &= a\alpha \sin (A + \omega), \quad Q_x = a\sqrt{1 - e^2}\, \alpha \cos (A + \omega), \\ P_y &= a\beta \sin (B + \omega), \quad Q_y = a\sqrt{1 - e^2}\, \beta \cos (B + \omega), \\ P_z &= a\gamma \sin (C + \omega), \quad Q_z = a\sqrt{1 - e^2}\, \gamma \cos (C + \omega). \end{aligned}$$

Für Hyperbeln benutzt man nach (III; 52)

$$r \cos v = -a(e - \sec H); \quad r \sin v = -a\sqrt{e^2 - 1} \sin H$$

und findet entsprechend

$$\text{(IV; 25)} \qquad \begin{aligned} x &= P_x(e - \sec H) + Q_x \operatorname{tg} H, \\ y &= P_y(e - \sec H) + Q_y \operatorname{tg} H, \\ z &= P_z(e - \sec H) + Q_z \operatorname{tg} H \end{aligned}$$

mit

$$\text{(IV; 26)} \qquad \begin{aligned} P_x &= -a\alpha \sin (A + \omega), \quad Q_x = -a\sqrt{e^2 - 1}\, \alpha \cos (A + \omega), \\ P_y &= -a\beta \sin (B + \omega), \quad Q_y = -a\sqrt{e^2 - 1}\, \beta \cos (B + \omega), \\ P_z &= -a\gamma \sin (C + \omega), \quad Q_z = -a\sqrt{e^2 - 1}\, \gamma \cos (C + \omega). \end{aligned}$$

Für die Geschwindigkeitskoordinaten erhält man, wenn man (IV; 23) und (IV; 25) nach der Zeit differenziert,

$$\dot{x} = \dot{E}(Q_x \cos E - P_x \sin E) \quad \text{(Ellipse)},$$

$$\dot{x} = \dot{H} \sec H \, (Q_x \sec H - P_x \operatorname{tg} H) \quad \text{(Hyperbel)}.$$

Andererseits folgt durch Differenzieren der KEPLERschen Gleichung bzw. ihres hyperbolischen Analogons

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E} = \frac{n a}{r} \quad \text{bzw.} \quad \dot{H} \sec H = \frac{\nu}{e \sec H - 1} = -\frac{\nu a}{r},$$

wenn man $n = \dfrac{\varkappa}{\sqrt{a^3}}$, $\nu = \dfrac{\varkappa}{\sqrt{(-a)^3}}$ setzt. So entstehen die Geschwindigkeits-

formeln

$$\dot{x} = \frac{n\,a}{r}\,(Q_x \cos E - P_x \sin E) \quad \text{(Ellipse)},$$

(IV; 27)

$$\dot{x} = -\frac{\nu\,a}{r}\,(Q_x \sec H - P_x \operatorname{tg} H) \quad \text{(Hyperbel)}.$$

Für Bahnen mit Exzentrizitäten nahe eins (parabelnahe Ellipsen oder Hyperbeln) sind die Formelsysteme (IV; 23–27) ungeeignet, für Parabeln verlieren sie ihren Sinn ganz. Die Lösung der Aufgaben der Ephemeridenrechnung für parabelnahe Kegelschnittbahnen wird in den Abschnitten 36 und 37 besonders behandelt.

34. *Die Bestimmung der wahren Anomalie bei Parabelbahnen*

Um die wahre Anomalie eines in einer Parabelbahn laufenden Himmelskörpers (Kometen) als Funktion der Zeit zu bestimmen, hat man die kubische Gleichung (III; 43) nach $\operatorname{tg}\frac{v}{2}$ aufzulösen. Sie ist von der Form

$$y^3 + a\,y = b \quad \left(y = \operatorname{tg}\frac{v}{2}\right)$$

mit $a = 3$ und $b = \dfrac{3\varkappa(t-T)}{\sqrt{2\,q^3}}$ und hat, da $a > 0$, eine einzige reelle Lösung

$$\text{(IV; 28)} \qquad y = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}\,.$$

Setzt man $b = 2 \operatorname{ctg} \psi$, so wird, da $a = 3$, die Diskriminante

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 1 + \operatorname{ctg}^2 \psi = \frac{1}{\sin^2 \psi}.$$

Mithin ist

$$y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}\psi + \operatorname{cosec}\psi} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}\psi - \operatorname{cosec}\psi} = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}} - \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}.$$

Setzt man ferner $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, so ergibt sich

$$y = \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 2 \operatorname{ctg} \gamma\,.$$

Die Lösung von (III; 43) erfolgt daher streng und auf eine für logarithmische Rechnung sehr bequeme Weise nach dem Formelsatz

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{3\varkappa(t-T)}{\sqrt{8q^3}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}, \qquad \text{(IV; 29)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = 2\operatorname{ctg}\gamma.$$

Nach einer Bemerkung von B. KULASCHKO[1]) läßt sich die letzte dieser drei Gleichungen durch eine noch einfachere ersetzen. Aus

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

folgt nämlich

$$\operatorname{tg}\frac{\psi+v}{2} = \frac{\operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}^4\frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}^4\frac{\gamma}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi-\gamma}{2},$$

da die Funktion $1 - x + x^2$ keine reellen Nullstellen besitzt und demnach der Bruch in obiger Formel unter allen Umständen den Wert eins hat. Damit ist gezeigt, daß

$$\psi + v + \gamma = 180°,$$

die drei Winkel ψ, v, γ daher als Winkel eines ebenen Dreiecks aufgefaßt werden dürfen. Die letzte der drei Gleichungen (IV; 29) kann also durch die einfachere

$$v = \pi - (\psi + \gamma) \qquad \text{(IV; 30)}$$

ersetzt werden. Das genannte Dreieck hat übrigens eine einfache geometrische Bedeutung. Setzt man in der Identität

$$\sin(v+\gamma) = \sin\gamma\,(\sin v \operatorname{ctg}\gamma + \cos v)$$

rechts nach der dritten Gleichung (IV; 29)

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{v}{2},$$

[1]) Astron. Nachr. *274*, 217 (1944).

ferner

$$\sin v = 2 \sin \frac{v}{2} \cos \frac{v}{2}, \quad \cos v = \cos^2 \frac{v}{2} - \sin^2 \frac{v}{2},$$

und setzt man links wegen (IV; 30) $\sin (v + \gamma) = \sin \psi$, so erhält man

$$\frac{\sin \psi}{\sin \gamma} = \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{q}{r}.$$

Das ist aber nichts anderes als der Sinussatz der ebenen Trigonometrie, angewandt auf das Dreieck $S\Pi K$ (Abb. 40), das von Sonne, Perihel und Kometen-

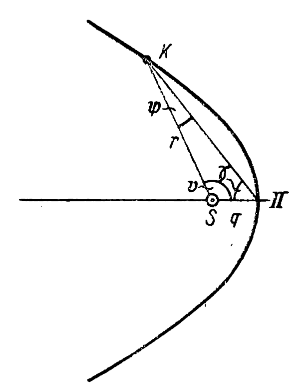


Abb. 40. Parabolische Bahn.

ort gebildet wird, wenn man den Winkel am Perihel mit γ und den am Kometen mit ψ bezeichnet. Da der dritte Winkel bei der Sonne die wahre Anomalie v darstellt, so gilt für dieses Dreieck in der Tat die Beziehung (IV; 30).

Für das Maschinenrechnen ist statt (IV; 29, 30) eine andere Form der Lösung (IV; 28) geeigneter. Setzt man

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{b^2}}},$$

so ergibt sich aus (IV; 28), da $\frac{a}{3} = 1$,

$$y = \sqrt[3]{\frac{b}{2x}} \left\{ \sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x} \right\} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{b}{2x}} \frac{2x}{\sqrt[3]{(1 + x)^2} + \sqrt[3]{1 - x^2} + \sqrt[3]{(1 - x)^2}}.$$

Es ist aber $1 - x^2 = 1 - \frac{1}{1 + \frac{4}{b^2}} = 4\frac{x^2}{b^2}$, also

$$\frac{b}{2x} = (1 - x^2)\left(\frac{b}{2x}\right)^3; \quad \sqrt[3]{\frac{b}{2x}} = \frac{b}{2x}\sqrt[3]{1 - x^2}.$$

Setzt man daher $m = \sqrt[3]{\frac{1 - x}{1 + x}}$, so folgt $y = \frac{bm}{1 + m + m^2}$.

Die Lösung der kubischen Gleichung wird also durch den Formelsatz

$$b = \frac{3\varkappa(t - T)}{\sqrt{2q^3}}; \quad x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{b^2}}};$$

(IV; 31)

$$m = \sqrt[3]{\frac{1 - x}{1 + x}}; \quad y = b\frac{m}{1 + m + m^2}$$

erhalten.

Da die Gleichung (III; 43) $\operatorname{tg}\frac{v}{2}$ in Abhängigkeit von nur einem Parameter $Q = \frac{\varkappa^2(t - T)}{\sqrt{2q^3}}$ liefert, ist es möglich, ihre Lösung v mit dem Argument Q zu tabulieren. Die „BARKERsche Tafel", die dies leistet, findet man in den Lehrbüchern und Tafelwerken zur Bahnbestimmung, z.B. bei BAUSCHINGER, OPPOLZER u.a.

35. *Auflösung der KEPLERschen Gleichung*

Im Falle elliptischer Bahnen werden die Polarkoordinaten des Himmelskörpers auf dem Wege über die exzentrische Anomalie erhalten, die ihrerseits durch die *KEPLERsche Gleichung*

(IV; 32) $$E - e\sin E = M = n(t - T)$$

als Funktion der Zeit und der Bahnkonstanten e, $n = \varkappa a^{-\frac{3}{2}}$, T bestimmt ist. Diese Gleichung, die das Kernstück der Ephemeridenrechnung darstellt, ist transzendent und läßt sich nur durch Näherungsverfahren lösen.

Angenommen, es liege ein Näherungswert E_0 für die Lösung von (IV; 32) vor. Dann ist

(IV; 33) $$E_0 - e\sin E_0 = M_0$$

von M verschieden, und subtrahiert man (IV; 33) von (IV; 32), so erhält man, wenn $E = E_0 + \lambda$ gesetzt wird, die kleine Größe

$$\lambda - e[\sin(E_0 + \lambda) - \sin E_0] = M - M_0 = \Delta M_0$$

oder, nach einfacher Umformung,

$$\Delta M_0 = \lambda(1 - e\cos E_0) + e\sin E_0(1 - \cos\lambda) + e\cos E_0\,(\lambda - \sin\lambda).$$

Führt man für bekannte Größen die Bezeichnungen

$$\xi = \frac{\Delta M_0}{1 - e\cos E_0}, \quad \eta = \frac{e\sin E_0}{1 - e\cos E_0}, \quad \zeta = \frac{e\cos E_0}{1 - e\cos E_0}$$

ein, so ergibt sich für die gesuchte Verbesserung $E - E_0 = \lambda$ die Gleichung

$$\xi = \lambda + \frac{1 - \cos\lambda}{\lambda^2}\,\eta\lambda^2 + \frac{\lambda - \sin\lambda}{\lambda^3}\,\zeta\lambda^3$$

oder, wenn man die von λ^2 abhängigen Funktionen

$$\text{(IV; 34)} \qquad \begin{aligned} c_2(\lambda^2) &= \frac{1}{2!} - \frac{\lambda^2}{4!} + \frac{\lambda^4}{6!} - \cdots, \\ c_3(\lambda^2) &= \frac{1}{3!} - \frac{\lambda^2}{5!} + \frac{\lambda^4}{7!} - \cdots \end{aligned}$$

einführt, die in der Theorie der Zweikörperbewegung eine bedeutende Rolle spielen (siehe Kapitel V) und für die im Anhang B eine sechsstellige Tafel mit dem Argument λ^2 gegeben ist,

$$\lambda + c_2(\lambda^2)\,\eta\lambda^2 + c_3(\lambda^2)\,\zeta\lambda^3 = \xi.$$

Man kann nun offenbar statt der Reihen (IV; 34) ihre konstanten Glieder setzen, wenn für n-stellige Rechnung die Bedingung

$$\frac{\lambda^4}{24}\,\eta_{\max} < \frac{1}{2}\,10^{-n}$$

erfüllt ist, d.h., da η den Maximalwert $\dfrac{e}{\sqrt{1 - e^2}}$ für $\cos E_0 = e$ erreicht, für

$$\lambda < \sqrt[4]{\frac{12\sqrt{1 - e^2}}{10^n e}}.$$

Das bedeutet, wenn nicht gerade e sehr nahe an eins liegt, einen beträchtlichen Spielraum für λ. So erhält man z.B. für $e = 0.5$ und $n = 6$ die Abschätzung

$$\lambda < 0.06752 \equiv 3^\circ\!.87,$$

d. h. also, daß bei sechsstelliger Rechnung der Ausgangswert E_0 von der exakten Lösung um nahezu 4° abweichen darf, wenn die Lösung der kubischen Gleichung

$$\lambda + \frac{1}{2}\eta\lambda^2 + \frac{1}{6}\zeta\lambda^3 = \xi \tag{IV; 35}$$

bereits zu dem endgültigen $E = E_0 + \lambda$ führen soll. Da λ klein ist, läßt sich diese Gleichung leicht durch Näherungen lösen. Die Ausgangshypothese $\lambda = \lambda_0$ entnimmt man etwa der Umkehrung von (IV; 35)

$$\lambda = \xi - \frac{1}{2}\eta\xi^2 + \frac{1}{6}(3\eta^2 - \zeta)\xi^3 - \frac{5}{24}(3\eta^2 - 2\zeta)\eta\xi^4 + \cdots,$$

indem man, je nach den Umständen,

$$\lambda_0 = \xi \quad \text{oder} \quad \lambda_0 = \xi\left(1 - \frac{1}{2}\eta\xi\right)$$

setzt. Mit diesem Wert berechnet man

$$\xi_0 = \lambda_0 + \frac{1}{2}\eta\lambda_0^2 + \frac{1}{6}\zeta\lambda_0^3$$

und erhält dann nach dem NEWTONschen Näherungsverfahren aus

$$\Delta\lambda_0 = \frac{\xi - \xi_0}{1 + \eta\lambda_0 + \frac{1}{2}\zeta\lambda_0^2}, \quad \lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

eine neue Näherung λ_1, die meist schon mit dem Endwert λ identisch sein wird.

Bei kleinen und mäßigen Exzentrizitäten wird man immer mit $\lambda_0 = \xi$ beginnen und die Iteration

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = \frac{\Delta M_0}{1 - e\cos E_0}, \quad E_1 = E_0 + \lambda_0, \\ &M_1 = E_1 - e\sin E_1, \quad \Delta M_1 = M - M_1; \\ &\lambda_1 = \frac{\Delta M_1}{1 - e\cos E_1}, \quad E_2 = E_1 + \lambda_1, \quad M_2 = E_2 - e\sin E_2, \cdots \end{aligned} \tag{IV; 36}$$

durchführen, die so lange fortzusetzen ist, bis $M_n = M_{n-1}$, was fast immer schon nach wenigen Schritten erreicht wird.

Einfacher (und besonders für Maschinenrechnen geeignet) ist die Iteration

$$E_n = M + e\sin E_{n-1}, \tag{IV; 37}$$

die man mit einer Ausgangsnäherung E_0 (bei kleinem e mit $E_0 = M$) beginnt und so lange fortsetzt, bis $\sin E_n = \sin E_{n-1}$. Dieses Verfahren konvergiert unter Umständen, besonders bei großem e und kleinem $\sin E$, erheblich lang-

samer als das unter (IV; 36) beschriebene. Es läßt sich aber zeigen, daß man spätestens nach zwei Schritten durch Extrapolation der bisherigen Näherungen so dicht an die Endlösung herankommt, daß die Rechnung durch eine weitere differentielle Verbesserung abgeschlossen werden kann. Nach (IV; 37) haben die sukzessiven Näherungen die Form

$$E_1 = f(E_0), \quad E_2 = f(E_1), \quad \cdots \quad E_n = f(E_{n-1}).$$

Bildet man die Differenzen aufeinanderfolgender Näherungen, so findet man nach dem TAYLORschen Satz

$$E_2 - E_1 = f(E_1) - f(E_0) = (E_1 - E_0)\left[f'(E_1) + \frac{1}{2}(E_0 - E_1) f''(E_1) + \cdots\right],$$

$$E_3 - E_2 = f(E_2) - f(E_1) = (E_2 - E_1)\left[f'(E_1) + \frac{1}{2}(E_2 - E_1) f''(E_1) + \cdots\right]$$

und daher

$$\frac{E_3 - E_2}{E_2 - E_1} = \frac{E_2 - E_1}{E_1 - E_0} \cdot \frac{f'(E_1) + \frac{1}{2}(E_2 - E_1) f''(E_1) + \cdots}{f'(E_1) + \frac{1}{2}(E_0 - E_1) f''(E_1) + \cdots}.$$

Man kann nun zwei Fälle unterscheiden: 1. $f'(E)$ ist klein von der Größenordnung der Differenzen $E_n - E_{n-1}$. Dann konvergiert das Verfahren schnell, da jede folgende Differenz von der Größenordnung des Quadrates der vorhergehenden ist; 2. $f'(E)$ ist gegen die Differenzen groß, was im Falle (IV; 37) eintritt, wenn $e \cos E$ von eins wenig abweicht, also bei sehr langgestreckten Ellipsen in der Nähe des Perihels. Dann ist bis auf Glieder höherer Ordnung

$$\frac{E_3 - E_2}{E_2 - E_1} = \frac{E_2 - E_1}{E_1 - E_0} \quad \text{usw.},$$

d.h., es ist angenähert $q = \dfrac{E_n - E_{n-1}}{E_{n-1} - E_{n-2}}$ eine Konstante. Berechnet man also q aus dem Ausgangswert und den ersten beiden Näherungen:

$$q = \frac{E_2 - E_1}{E_1 - E_0},$$

so ist

$$E^* = E_0 + (E_1 - E_0)(1 + q + q^2 + \cdots) = E_0 + \frac{E_1 - E_0}{1 - q}$$

von E so wenig verschieden, daß man die Rechnung nach einer weiteren Iteration abschließen kann.

Diese Methode, auf die J. HARTMANN[1]) aufmerksam gemacht hat, läßt sich auf die KEPLERsche Gleichung mit Erfolg anwenden, wie folgendes extrem un-

---

[1]) Astron. Nachr. *205*, 309 (1918).

günstige Beispiel zeigt: Es sei $e = 0.7$, $M = 3^\circ\!.0355$. Die KEPLERsche Gleichung liefert dann die strenge Lösung $E = 10°$. Beginnt man die Iteration mit dem rohen Ausgangswert $E_0 = M$, so lauten die ersten Glieder der nur sehr langsam konvergierenden Folge E_n

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= 3^\circ\!.0355 \\ E_1 &= 5.1593 \\ E_2 &= 6.6421 \end{aligned}\right\} q = 0.69818,$$

und man erhält $E^* = 10^\circ\!.0720$. Setzt man diesen Wert in die KEPLERsche Gleichung ein, so findet man $M^* = 3^\circ\!.0578$, also $\Delta M = M - M^* = -0^\circ\!.0223$ und nach (IV; 36)

$$E - E^* = \frac{\Delta M}{1 - e\cos E^*} = -0^\circ\!.0718; \quad E = 10^\circ\!.0002,$$

einen Wert, der von dem exakten um weniger als eine Bogensekunde abweicht.

Natürlich ist es erwünscht, namentlich bei größeren Exzentrizitäten, die Iteration schon mit einem möglichst guten Näherungswert beginnen zu können. Zu ihm gelangt man auf verschiedene Weise:

1. Man benutzt *Tafeln*, die E_0 oder $E_0 - M$ mit zwei Eingängen (e, M) zu entnehmen gestatten. Die vorhandenen Tafeln dieser Art (ASTRANDsche Tafeln, Tafeln zu BAUSCHINGERS und STRACKES Lehrbüchern der Bahnbestimmung u.a.) liefern E auf $0^\circ\!.01$ bzw. $0^\circ\!.001$ genau. Im Anhang A, Tafel II, ist die STRACKEsche Tafel verkürzt wiedergegeben.

2. Weniger genau ist das *graphische* Verfahren, das durch Abb. 41 illustriert wird. Die Kurve $y = \sin x$ sei auf Koordinatenpapier vorgezeichnet. Die Abszissenachse gibt x von $0°$ bis $180°$ (für $x > 180°$ benutzt man $-x$ und $-M$) mit einer Genauigkeit von ganzen oder halben Graden. Trägt man auf der Abszissenachse den Punkt M mit der Abszisse M und den Punkt Q mit der Abszisse $M + e° = M + e \cdot 57^\circ\!.2958$ auf und zeichnet über Q den Punkt P mit der Ordinate 1, so gilt für den Winkel $PMQ = \alpha$ die Beziehung $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{e}$, und die Gleichung der Geraden PM lautet $y = \frac{x - M}{e}$. Die Abszisse des Schnittpunkts dieser Geraden mit der Sinus-

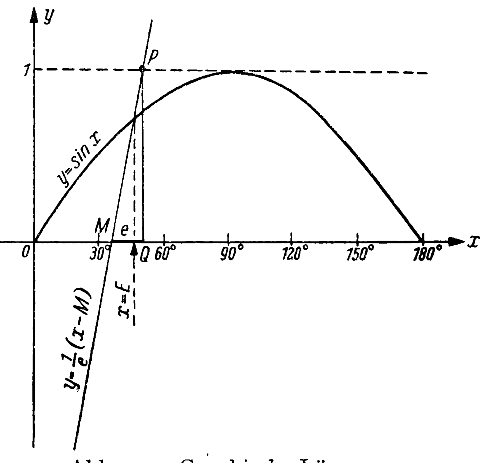


Abb. 41. Graphische Lösung der KEPLERschen Gleichung.

kurve ist dann die Lösung $x = E$ der KEPLERschen Gleichung. Andere graphische Lösungen beruhen auf der Konstruktion von *Nomogrammen.*

3. Sehr zahlreich sind die *rechnerischen* Methoden, die entwickelt worden sind, um mit möglichst geringem Aufwand zu einer brauchbaren Ausgangshypothese $E = E_0$ zu gelangen. Aus der Vielzahl der Vorschläge, zu denen fast jede Generation der letzten hundertfünfzig Jahre ihre Beiträge geleistet hat, können hier nur einige der interessantesten aufgeführt werden. Auf andere weist das Literaturverzeichnis hin. Am gebräuchlichsten ist wohl ein Verfahren, das auf ENCKE zurückgeht, aber im Laufe der Zeit mehrfach modifiziert worden ist. Es liefert für kleine und mittlere Exzentrizitäten verhältnismäßig rasch gute Näherungen.

Man führe $z = E - M$ als Unbekannte ein. Dann lautet die KEPLERsche Gleichung

$$z = e \sin (M + z). \tag{IV; 38}$$

Setzt man nun

$$\eta = \frac{e \sin M}{1 - e \cos M}, \quad \zeta = \frac{e \cos M}{1 - e \cos M}, \tag{IV; 39}$$

so erhält (IV; 38) die Form

$$z = \eta \cos z - \zeta (z - \sin z). \tag{IV; 40}$$

Für kleinere und mittlere Exzentrizitäten sind η, ζ und z von der Ordnung e, und da $z - \sin z$ von der 3. Ordnung ist, zerfällt (IV; 40) in zwei Summanden von der 1. und der 4. Ordnung. Setzt man demnach $z_0 = \eta \cos \eta$, so darf man im zweiten Gliede rechts $z - \sin z = \frac{1}{6} z_0^3$ setzen und erhält mit

$$z_1 = z_0 - \frac{1}{6} \zeta z_0^3 \tag{IV; 41}$$

eine weitere Näherung, die bis zur 4. Ordnung in e genau ist.

Führt man in (IV; 40) für $\cos z$ und $\sin z$ die Potenzreihenentwicklungen ein, so ist

$$\eta = z + \frac{1}{2} \eta z^2 + \frac{1}{6} \zeta z^3 - \frac{1}{24} \eta z^4 - \frac{1}{120} \zeta z^5 + \frac{1}{720} \eta z^6 + \cdots$$

eine Reihe, deren Umkehrung

$$z = \eta \left[1 - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{13}{24} \eta^4 - \frac{361}{720} \eta^6 + \cdots\right] -$$

$$- \frac{1}{6} \zeta \eta^3 \left[1 - \frac{51}{20} \eta^2 + \cdots\right] + \frac{1}{12} \zeta^2 \eta^5 + \cdots$$

bis zur 7. Ordnung in e ergibt. Dafür läßt sich genähert

$$(IV;42)\qquad z_1 = \eta\,\frac{1+\frac{1}{2}\eta^2}{1+\eta^2} - \frac{1}{6}\zeta\eta^3$$

schreiben. Diese Formel ist genauer als (IV; 41), da sie auch die Glieder 5. Ordnung bis auf einen kleinen Rest berücksichtigt. In der klassischen Literatur wird die Darstellung

$$(IV;43)\qquad \eta = \operatorname{tg} y;\quad z_1 = \sin y - \frac{1}{6}\frac{\zeta}{\eta}\eta^4\cos^3\eta \approx \sin y - \frac{\operatorname{ctg} M}{6}\sin^4 y$$

bevorzugt, in der die Glieder 5. Ordnung genauer als in (IV; 41), aber weniger gut als in (IV; 42) dargestellt werden.

Für große Exzentrizitäten kann (IV; 40) mit der Ausgangshypothese $z_0 = \eta\cos\eta$ als Rekursionsformel benutzt werden, wobei selbst in extremen Fällen, wie sie bei langgestreckten Kometenbahnen häufig vorkommen, wenige Iterationen zum Ziele führen. Auch hierbei kann das weiter oben beschriebene Extrapolationsverfahren mit Nutzen verwendet werden.

Von den sehr zahlreichen Verfahren, auch bei großem e durch direkte Rechnung gute Ausgangsnäherungen zu gewinnen, mögen hier nur drei genannt werden:

a) E. W. BROWN[1]) schlägt folgende hübsche Methode vor: Man setze

$$(IV;44)\qquad \begin{aligned} C\sin z_0 &= e\sin M,\\ C\cos z_0 &= 1 - e\cos M \end{aligned}$$

und berechne daraus z_0 und C. Multipliziert man die beiden Gleichungen (IV; 44) mit $\cos M$ bzw. $\sin M$ und addiert, so erhält man

$$C\sin(M+z_0) = \sin M = \frac{C}{e}\sin z_0$$

oder

$$(IV;45)\qquad \sin z_0 = e\sin(M+z_0).$$

Setzt man nun nach (IV; 38) $z = e\sin(M+z)$, so ist

$$\sin z - e\sin(M+z) = -\frac{1}{6}e^3\sin^3(M+z) + \frac{1}{120}e^5\sin^5(M+z) - \cdots.$$

Andererseits ist wegen (IV; 44)

$$\sin z - e\sin(M+z) = \sin z(1 - e\cos M) - \cos z\cdot e\sin M = C\sin(z - z_0).$$

[1]) Monthly Notices of the Roy. Astron. Soc. *92*, 104 (1932).

Bis auf Restglieder, deren größtes $\leqq \frac{1}{120} e^5$ ist, gilt also

(IV; 46) $$C \sin (z - z_0) = - \frac{1}{6} e^3 \sin^3 (M + z) + \cdots.$$

Da $C^2 = 1 - 2e \cos M + e^2$, ist $z - z_0$ von der Ordnung e^3. Führt man also in (IV; 46) rechts $z = z_0$ ein, so begeht man einen Fehler 6. Ordnung, dessen Betrag man folgendermaßen abschätzt: Setzt man $z - z_0 = \varDelta z$ und differenziert (IV; 46), so erhält man

$$C d \sin \varDelta z = C \cos \varDelta z \, d \varDelta z = - \frac{1}{2} e^3 \sin^3 (M + z) \cos (M + z) \, dz$$

oder, wenn man rechts $dz = \varDelta z = - \frac{e^3}{6C} \sin^3 (M + z)$, links $\cos \varDelta z = 1$ setzt,

$$d \varDelta z = \frac{e^6}{12C} \sin^5 (M + z) \cos (M + z).$$

Das Maximum dieser Funktion wird für $\operatorname{tg} (M + z) = \sqrt{5}$, $M + z = 65\overset{\circ}{.}9$ angenommen und beträgt 0.2586; der Fehler 6. Ordnung in der Bestimmung von $\varDelta z$ ist demnach $\leqq \frac{e^6}{46}$, der Gesamtfehler der Rechnung also $\leqq \max \left(\frac{e^5}{120}, \frac{e^6}{46} \right)$. Die sehr einfache Gleichung

$$\sin (z_1 - z_0) = - \frac{1}{6C} \sin^3 z_0,$$

die man erhält, wenn man (IV; 45) in (IV; 46) einsetzt, führt daher auf eine Näherung z_1, die merklich besser ist als die weiter oben gegebenen.

b) Einen Näherungswert, der bis zur 7. Ordnung in e genau ist und daher auch großen Ansprüchen genügt, gibt H. C. Plummer[1]) an. Es sei wieder z_0 der nach (IV; 44) berechnete Wert und $E_0 = M + z_0$. Aus der Keplerschen Gleichung

$$E - M = e \sin E$$

und aus der wegen (IV; 45) gültigen Beziehung

$$\sin (E_0 - M) = e \sin E_0$$

folgt durch Subtraktion

$$E - M - \sin (E_0 - M) = e (\sin E - \sin E_0).$$

Setzt man andererseits

(IV; 47) $$E_0 - M - \sin (E_0 - M) = -2\eta,$$

[1]) Monthly Notices of the Roy. Astron. Soc. *80*, 207 (1919).

so erhält man

$$E - E_0 = 2\eta + e(\sin E - \sin E_0) =$$

(IV; 48)

$$= 2\eta + e(E - E_0)\,\frac{\sin E - \sin E_0}{E - E_0}\,.$$

Nach (IV; 47) ist aber

$$2\eta = -\frac{1}{6}\,(E_0 - M)^3 + \cdots$$

von der 3. Ordnung in e, so daß man für $E - E_0$ bis auf Terme von der 4. Ordnung aufwärts die Näherung 2η benutzen darf. Aus (IV; 48) folgt nun

$$(E - E_0)\left[1 - e\,\frac{\sin E - \sin E_0}{E - E_0}\right] = 2\eta,$$

also streng

(IV; 49)
$$E - E_0 = \frac{2\eta}{1 - e\cos\left(E_0 + \frac{E - E_0}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{E - E_0}{2}}{\frac{E - E_0}{2}}}\,.$$

Setzt man im Nenner dieses Ausdrucks $E - E_0 = 2\eta$ und den Quotienten $\sin\frac{E - E_0}{2}\Big/\frac{E - E_0}{2}$, der von der Einheit nur um Glieder 6. Ordnung abweicht, gleich eins, so ergibt die Formel

$$E_1 - E_0 = \frac{2\eta}{1 - e\cos(E_0 + \eta)}$$

eine Näherung, die bis zur 7. Ordnung genau ist und selbst in sehr ungünstigen Fällen zur endgültigen Lösung führt, wenn man in der strengen Formel (IV; 49) rechts $E = E_1$ einführt.

c) A. WEDEMEYER[1]) geht in seinem Vorschlag zur Lösung unseres Problems ebenfalls von dem aus (IV; 44) berechneten z_0 aus, und es sei

$$z = E - M = z_0 + \varDelta z.$$

Aus (IV; 38):

$$z_0 + \varDelta z = e\sin(M + z_0 + \varDelta z) = e\,[\sin(M + z_0)\cos\varDelta z + \cos(M + z_0)\sin\varDelta z]$$

und (IV; 45) folgt dann

$$\varDelta z = -z_0 + \sin z_0\cos\varDelta z + e\cos(M + z_0)\sin\varDelta z =$$

$$= -z_0 + \sin z_0\left(1 - 2\sin^2\frac{\varDelta z}{2}\right) + e\cos(M + z_0)\,[\varDelta z - (\varDelta z - \sin\varDelta z)]$$

---

[1]) Astron. Nachr. *206*, 147 (1918).

oder

$$-\Delta z\,[1 - e\cos(M + z_0)] = (z_0 - \sin z_0) + 2\sin z_0 \sin^2\frac{\Delta z}{2} + $$
$$+ e\cos(M + z_0)\,(\Delta z - \sin\Delta z)\,.$$

Führt man zur Abkürzung

$$A = \frac{1}{1 - e\cos(M + z_0)}$$

ein, so erhält man streng

$$-\Delta z = A\,(z_0 - \sin z_0) + \frac{1}{2}A\sin z_0\cdot(\Delta z)^2\left(\frac{\sin\frac{\Delta z}{2}}{\frac{\Delta z}{2}}\right)^2 +$$
$$+ (A - 1)\,(\Delta z)^3\,\frac{\Delta z - \sin\Delta z}{(\Delta z)^3}\,.$$

Da nun Δz von der 3. Ordnung in e ist, kann man bis auf Restglieder von der 7. Ordnung

$$\Delta z_0 = -A\,(z_0 - \sin z_0)$$

schreiben und diesen genäherten Wert zur Berechnung der übrigen Glieder benutzen. Das letzte Glied ist übrigens von der 10. Ordnung und kann daher in den weitaus meisten Fällen vernachlässigt werden. Ebenso kann man im mittleren Gliede $\sin\frac{\Delta z}{2}\Big/\frac{\Delta z}{2} = 1$ setzen und erhält dann

$$\Delta z = -A\,(z_0 - \sin z_0) - \frac{1}{2}A\sin z_0\cdot(\Delta z_0)^2$$

oder, bis zur 9. Ordnung genau,

$$\Delta z = \Delta z_0\left(1 - \frac{1}{2}A\,\Delta z_0 \sin z_0\right);\quad E = M + z_0 + \Delta z\,.$$

Auf die Lösung der transzendenten Gleichung (III; 51), die die KEPLERsche Gleichung in der Theorie der Hyperbelbewegung vertritt, ist nicht annähernd so viel Mühe verwendet worden, wie auf die der KEPLERschen Gleichung selbst. Der Grund hierfür ist, daß (wenn wir von einer gewissen Klasse von Meteoren absehen) in der astronomischen Praxis Hyperbelbahnen nur gelegentlich bei Kometen vorkommen, daß aber die Exzentrizitäten dieser Bahnen stets nur geringfügig größer als eins sind. In diesem Falle wird aber die Gleichung (III; 51) genau so unbrauchbar wie die KEPLERsche Gleichung für Exzentrizitäten, die nur wenig kleiner als eins sind. Für $e \to 1$ geht nämlich die KEPLERsche Gleichung in die nichtssagende Form $0 = 0$, die Gleichung (III; 51) aber in die ebenfalls bedeutungslose Gestalt $\infty - \infty = 0$ über. Für alle Fälle, in

denen sich die Exzentrizität von der Einheit nur wenig nach der einen oder der anderen Seite unterscheidet, hat man daher andere Methoden der Ephemeridenrechnung entwickelt, von denen in den nächsten beiden Abschnitten die Rede sein soll.

36. *Parabelnahe Bahnen: GAUSSsche Methode*

Ist die Exzentrizität einer elliptischen Bahn nur wenig kleiner als eins, so treten, wie erwähnt, Schwierigkeiten auf, die darauf beruhen, daß die KEPLERsche Gleichung

$$E - e \sin E = M = \frac{\tau}{\sqrt{a^3}} = \tau \sqrt{\left(\frac{1-e}{q}\right)^3}; \quad \tau = \varkappa (t - T) \tag{IV; 50}$$

für $e \to 1$ degeneriert. Schließen wir nämlich den Fall $q = 0$ (geradlinige Bahnen) aus, so nimmt (IV; 50) für $e = 1$ die Form $E - \sin E = 0$ an, deren einzige Lösung $E = 0$ ist. Ist $1 - e$ zwar von null verschieden, aber klein, so zeigt die Differentialformel

$$dE = \frac{dM}{1 - e \cos E}, \tag{IV; 51}$$

daß die Bestimmung von E sehr unsicher wird, wenn $\cos E$ nahezu eins ist. Das trifft aber bei langgestreckten Bahnen immer in einem ausgedehnten Bogen um das Perihel zu, gerade in jenem Bereich also, der bei der Berechnung parabelähnlicher Kometenbahnen in der Praxis größte Aufmerksamkeit erfordert. Ist dagegen $\cos E$ hinreichend klein oder gar negativ (was in der sonnenfernen Bahnhälfte zutrifft), so macht die Auflösung der KEPLERschen Gleichung keine besondere Schwierigkeit.

Um die Aufgabe der Berechnung parabelnaher Bahnen in der Sonnennähe mit der erforderlichen Schärfe lösen zu können, sind besondere Methoden erforderlich. Die klassische Lösung dieser Aufgabe, die auch heute noch in der Praxis vielfach bevorzugt wird, verdanken wir GAUSS, der sie in seiner „Theoria motus corporum coelestium" beschrieben hat. Die linke Seite der Gleichung (IV; 50) läßt sich in der Form

$$(1 - e)\,[(1 - \beta)\,E + \beta \sin E] + (E - \sin E)\,[\beta + (1 - \beta)\,e]$$

schreiben, also, wenn E als klein von der 1. Ordnung angesehen wird, als Summe zweier kleiner Summanden. Dabei soll β eine Konstante bedeuten, über die noch in geeigneter Weise verfügt werden wird. Dividiert man die so umgeformte KEPLERsche Gleichung durch den ersten Summanden dieses Ausdrucks, so erhält man

$$1 + \frac{E - \sin E}{1 - e} \cdot \frac{\beta + (1 - \beta)\,e}{(1 - \beta)\,E + \beta \sin E} = \frac{\tau}{\sqrt{q^3}}\,\frac{\sqrt{1 - e}}{(1 - \beta)\,E + \beta \sin E}. \tag{IV; 52}$$

Setzt man nun

$$\operatorname{tg}^2 \frac{W}{2} = 3 \frac{E - \sin E}{1 - e} \cdot \frac{\beta + (1 - \beta) e}{(1 - \beta) E + \beta \sin E}$$

und multipliziert (IV; 52) mit $\operatorname{tg} \frac{W}{2}$, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} \frac{W}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{W}{2} =$$

$$= \frac{\tau}{\sqrt{q^3}} \frac{\sqrt{1 - e}}{(1 - \beta) E + \beta \sin E} \sqrt{3 \frac{E - \sin E}{1 - e} \cdot \frac{\beta + (1 - \beta) e}{(1 - \beta) E + \beta \sin E}} =$$

$$= \frac{\tau}{\sqrt{2 q^3}} \sqrt{\beta + (1 - \beta) e} \cdot \frac{2 \sqrt{\frac{3}{2} \frac{E - \sin E}{(1 - \beta) E + \beta \sin E}}}{(1 - \beta) E + \beta \sin E}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\text{(IV; 53)} \qquad A = \frac{3}{2} \frac{E - e \sin E}{(1 - \beta) E + \beta \sin E}, \qquad B = \frac{(1 - \beta) E + \beta \sin E}{2 \sqrt{A}}$$

gesetzt wird,

$$\text{(IV; 54)} \qquad \operatorname{tg} \frac{W}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{W}{2} = Q = \frac{\tau}{\sqrt{2 q^3}} \cdot \frac{\sqrt{\beta + (1 - \beta) e}}{B}.$$

Vorausgesetzt, daß B und damit Q bekannt ist, läßt sich W aus (IV; 54) nach den in Abschn. 34 beschriebenen Methoden berechnen oder aus einer Tafel (BARKERsche Tafel!) mit dem Argument Q entnehmen. Nun läßt sich aber zeigen, daß bei geeigneter Wahl von β die noch unbekannte Größe B von der Einheit so wenig abweicht, daß man mit der Ausgangshypothese $B = 1$ ein äußerst rasch förderndes Iterationsverfahren beginnen kann. Entwickelt man nämlich A und B in Potenzreihen nach E, so erhält man nach kurzer Rechnung

$$A = \frac{E^2}{4} \left[1 + \left(15 \beta - \frac{9}{2} \right) \frac{E^2}{90} + \left(105 \beta^2 - 63 \beta + \frac{9}{2} \right) \frac{E^4}{3780} + \cdots \right],$$

$$B = 1 - \left(\beta - \frac{1}{10} \right) \frac{E^2}{4} + \left(\beta^2 + \frac{3}{5} \beta + \frac{23}{700} \right) \frac{E^4}{96} - \cdots.$$

Es erweist sich also als zweckmäßig, $\beta = \frac{1}{10}$ zu setzen, und es wird dann

$$A = \frac{15\,(E - \sin E)}{9E + \sin E} = \frac{E^2}{4} - \frac{E^4}{120} - \frac{E^6}{20160} - \cdots,$$

$$B = 1 + \frac{3}{2800} E^4 + \cdots,$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{W}{2} = A \cdot \frac{1 + 9e}{5(1 - e)}.$$

B unterscheidet sich also von der Einheit nur um sehr kleine Glieder von der 4. und höherer Ordnung in E. Kehrt man die Reihe A um, so erhält man E^2 als Funktion von A und damit auch B als Funktion von

$$A = \frac{5(1 - e)}{1 + 9e} \operatorname{tg}^2 \frac{W}{2}, \tag{IV; 55}$$

die (oder deren Logarithmus) man in eine Tafel mit dem Argument A bringen kann, und zwar ist

$$B = 1 + \frac{3}{175} A^2 + \frac{2}{525} A^3 + \cdots.$$

Die Näherungsrechnung gestaltet sich dann folgendermaßen: Die mit $\beta = \frac{1}{10}$ gebildete Gleichung (IV; 54)

$$\operatorname{tg} \frac{W}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{W}{2} = Q = \frac{\tau}{\sqrt{2q^3}} \frac{\sqrt{\frac{1 + 9e}{10}}}{B}$$

löst man zunächst mit $B = 1$, berechnet dann A nach (IV; 55), verbessert damit B und wiederholt das Verfahren, bis sich W nicht mehr ändert, was in den meisten praktisch vorkommenden Fällen schon nach ein bis zwei Iterationen der Fall sein wird.

Mit Hilfe von W lassen sich dann die Polarkoordinaten r und v des Himmelskörpers leicht berechnen. Setzt man $\operatorname{tg}^2 \frac{E}{2} = \varepsilon$, so ist

$$E = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\varepsilon} = 2\sqrt{\varepsilon}\left(1 - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{5} - \frac{\varepsilon^3}{7} + \cdots\right),$$

$$\sin E = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1 + \varepsilon} = 2\sqrt{\varepsilon}\,(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \cdots),$$

also

$$A = 15 \frac{E - \sin E}{9E + \sin E} = \varepsilon - \frac{4}{5}\varepsilon^2 + \frac{24}{35}\varepsilon^3 - \frac{1592}{2625}\varepsilon^4 + \cdots,$$

eine Reihe, deren Umkehrung

$$\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2} = A\left(1 + \frac{4}{5} A + \frac{104}{175} A^2 + \cdots\right) = A \sigma^2$$

lautet. Nach (II; 14) ist dann

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sqrt{A}\, \sigma$$

oder, wenn man für A den Ausdruck (IV; 55) einsetzt,

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sigma \sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}} \operatorname{tg} \frac{W}{2},$$

wobei $\sigma = \sigma(A)$ eine von eins nur wenig verschiedene Funktion ist.

Schließlich findet man r aus der Kegelschnittgleichung oder aus der zweiten Gleichung (II; 13):

$$\text{(IV; 56)} \qquad r = a(1-e) \frac{1 + \cos E}{1 + \cos v} = q \frac{\cos^2 \frac{E}{2}}{\cos^2 \frac{v}{2}} = \frac{q}{\left(\nu \cos \frac{v}{2}\right)^2},$$

wo $\nu(A) = \sqrt{1 + \varepsilon}$ eine andere, ebenfalls von eins nur wenig abweichende Größe ist. Die Funktionen B, σ, ν oder deren Logarithmen werden aus Tafeln mit dem Argument A entnommen. Man findet sie im Anhang A (Tabelle III).

Die gleichen Formeln lassen sich auch für parabelnahe Hyperbeln verwenden, wenn man für A und ε auch negative Werte zuläßt, die sich ergeben, wenn E rein imaginär, also E^2 negativ wird.

57. *Parabelnahe Bahnen: Neuere Methoden*

Wie J. ILJINSKI[1]) gezeigt hat, läßt sich die Gleichung für $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$ im Falle parabelnaher Bahnen in der Form

$$\text{(IV; 57)} \qquad \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \alpha_0 \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} + \alpha_1 \operatorname{tg}^5 \frac{v}{2} + \alpha_2 \operatorname{tg}^7 \frac{v}{2} + \cdots = Q$$

schreiben, wo Q der seit dem Periheldurchgang verflossenen Zeit $t - T$ proportional ist und die Koeffizienten α_n von der n-ten Ordnung in der kleinen Größe $1 - e$ sind.

---

[1]) Astron. Nachr. *238*, 319 (1930).

Setzt man $e = 1 - (1 - e)$, so lautet die Bahngleichung für die Bewegung in einem parabelnahen Kegelschnitt

$$r = \frac{p}{1 + \cos v - (1 - e)\cos v} = \frac{p}{2\cos^2\frac{v}{2} - (1 - e)\cos v}$$

oder

$$2r\cos^2\frac{v}{2} = p + (1 - e)\, r\cos v\,.$$

Setzt man hierin wieder nach der Kegelschnittgleichung

$$r\cos v = \frac{p - r}{e},$$

so erhält man

$$r = \left(\frac{p}{2e} - \frac{1 - e}{2e}\, r\right)\sec^2\frac{v}{2}\,.$$

Man führe nun die konstanten Größen

$$\frac{p}{2e} = q_0, \quad \frac{1 - e}{2e} = \beta$$

ein, die für $e \to 1$ gegen q (Periheldistanz der Parabel) bzw. 0 streben, und es ist dann, mit

$$\gamma = \frac{\beta}{1 + \beta} = \frac{1 - e}{1 + e},$$

(IV; 58) $$r = \frac{q_0\sec^2\frac{v}{2}}{1 + \beta\sec^2\frac{v}{2}} = \frac{q_0}{1 + \beta}\cdot\frac{1 + \operatorname{tg}^2\frac{v}{2}}{1 + \gamma\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}}$$

Diese Formel gilt für alle Kegelschnitte, ist also in gleicher Weise für Ellipsen ($\beta, \gamma > 0$), Hyperbeln ($\beta, \gamma < 0$) und Parabeln ($\beta = \gamma = 0$) zu benutzen. Führt man nun (IV; 58) in das Anomalieintegral

$$\int_0^v r^2\, dv = \varkappa\sqrt{p}\,(t - T) = \varkappa\sqrt{2eq_0}\,(t - T)$$

ein, so erhält man mit $y = \operatorname{tg}\frac{v}{2}$, $dy = \frac{1}{2}dv\sec^2\frac{v}{2} = \frac{1}{2}dv\,(1 + y^2)$

$$\int_0^y \frac{(1 + y^2)\, dy}{(1 + \gamma y^2)^2} = Q = \varkappa\sqrt{\frac{e}{2q_0^3}}\,(1 + \beta)^2\,(t - T)$$

oder, wenn man den Integranden nach Potenzen von y^2 entwickelt und integriert,

$$y + \frac{1}{3} y^3 (1 - 2\gamma) - \frac{1}{5} y^5 \gamma (2 - 3\gamma) + \frac{1}{7} y^7 \gamma^2 (3 - 4\gamma) - \cdots = Q,$$

eine Formel von der Gestalt (IV; 57), die für $\beta = \gamma = 0$ in (III; 43) übergeht. Da in den praktisch vorkommenden Fällen γ stets sehr klein ist, genügt es fast immer, auf der linken Seite die Glieder mit γ und γ^2 zu berücksichtigen. Man wird die Hypothesenrechnung mit der Lösung von

$$y + \frac{1}{3} y^3 = Q$$

beginnen und diese Gleichung im zweiten Schritt mit

$$Q + 2\gamma\left(\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right) - 3\gamma^2\left(\frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7}\right) + \cdots$$

statt Q lösen, wobei es wegen der kleinen Faktoren ausreicht, für y den bereits bekannten ersten Näherungswert einzusetzen.

Von neueren Methoden, das Problem parabelnaher Kegelschnittbahnen zu lösen, verdient auch die von H. ANDOYER[1]) Beachtung, weil sie, anders als die GAUSSsche Methode, neben der BARKERschen Tafel nur noch ein einziges, sehr wenig umfangreiches Hilfstäfelchen erfordert, das zudem in vielen Fällen entbehrt werden kann.

Man führe statt der Exzentrizität e den bei parabelnahen Ellipsen stets kleinen Hilfswinkel ψ durch

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{1-e}{2}}, \quad \cos\psi = \sqrt{\frac{1+e}{2}} \quad (\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1)$$

ein. Dann ist nach (II; 14) und (IV; 56)

$$\text{(IV; 59)} \qquad \operatorname{tg}\frac{E}{2} = \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\frac{v}{2}; \quad r = q\cos^2\frac{E}{2}\sec^2\frac{v}{2}.$$

Die KEPLERsche Gleichung erhält dann die Form

$$\text{(IV; 60)} \qquad E - e\sin E = M = 4P\sin^3\psi,$$

wenn man

$$P = \frac{\tau}{\sqrt{2q^3}} = \frac{\tau}{\sqrt{2a^3(1-e)^3}}$$

setzt. Nun ist nach dem Flächensatz

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\sqrt{p}}{r^2} = \frac{\sqrt{q(1+e)}}{r^2} = 2\left(\frac{q}{r}\right)^2 \frac{\cos\psi}{\sqrt{2q^3}} = 2\frac{dP}{d\tau}\left(\frac{q}{r}\right)^2 \cos\psi,$$

[1]) Cours de mécanique céleste, Bd. I (1923).

also

$$dv = 2\,dP\cos^4\frac{v}{2}\sec^4\frac{E}{2}\cos\psi. \tag{IV; 61}$$

Schließlich folgt aus (IV; 60)

$$P = \frac{E - e\sin E}{4\sin^3\psi} = \frac{E - \sin E}{4\sin^3\psi} + \frac{(1 - e)\sin E}{4\sin^3\psi}$$

oder, mit

$$\lambda^3 = \frac{E - \sin E}{4\sin^3\frac{E}{2}}, \quad \sigma = \frac{\sin\frac{E}{2}}{\sin\psi} = \operatorname{tg}\frac{v}{2}\cos\frac{E}{2}\sec\psi, \tag{IV; 62}$$

$$(1 - e)\sin E = 4\sin^2\psi\sin\frac{E}{2}\cos\frac{E}{2}$$

die Formel

$$P = (\lambda\sigma)^3 + \sigma\cos\frac{E}{2}. \tag{IV; 63}$$

Da nun im perihelnahen Teil der Bahn die Bewegung eines Kometen von der in einer strengen Parabel nur wenig abweicht, erhält man aus

$$\operatorname{tg}\frac{v_0}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v_0}{2} = P \tag{IV; 64}$$

eine gute Näherung v_0 für die wahre Anomalie, mit dieser aus (IV; 59) den immer kleinen Näherungswert E_0 für die exzentrische Anomalie, sodann λ, σ nach (IV; 62) und schließlich aus (IV; 63) einen Kontrollwert P_0 für P. Dieser wird von dem gegebenen P um einen kleinen Betrag dP abweichen ($P = P_0 + dP$). Die Beziehung (IV; 61) liefert dann die dazugehörige Verbesserung dv für die wahre Anomalie.

Die rasche Konvergenz des Verfahrens beruht darauf, daß σ wegen der Kleinheit von E sehr scharf berechnet werden kann und daß ferner λ^3 von der Konstanten $\frac{1}{3}$ nur um Größen von der Ordnung E^2 abweicht. Es gilt nämlich die sehr rasch konvergente Entwicklung

$$\lambda^3 = \frac{E - \sin E}{4\sin^3\frac{E}{2}} = \tag{IV; 65}$$

$$= \sec^2\frac{E}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}\operatorname{tg}^2\frac{E}{4} - \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}\operatorname{tg}^4\frac{E}{4} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}\operatorname{tg}^6\frac{E}{4} - \cdots\right),$$

für die später (Abschn. 51) der Beweis erbracht werden wird, und die man, mit $t = \operatorname{tg}\frac{E}{4}$, in der Form

$$\lambda^3 = (1 + t^2)\left(\frac{1}{3} + \frac{t^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{t^4}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{t^6}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \cdots\right)$$

oder auch

$$\lambda^3 = \sec^2\frac{E}{4}\sec^{\frac{4}{5}}\left(\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\cdot g(t^2)$$

schreiben kann, wo der Faktor $g(t^2)$ eine von $\frac{1}{3}$ nur um Glieder 4. Ordnung in E abweichende Größe ist. Es genügt also in der Tat ein kleines Täfelchen (Anhang A, Tafel IV), aus dem $\log g$ mit dem Argument $E/4$ entnommen werden kann und das in den meisten vorkommenden Fällen überhaupt entbehrlich sein wird. Ist v gefunden, so ergibt sich r ohne weitere Hilfsmittel aus der zweiten Gleichung (IV; 59).

Diese Methode, deren Vorzüge Durchsichtigkeit und leichte Ausführung bei logarithmischer Rechnung sind, läßt sich auch auf parabelnahe Hyperbeln anwenden, wenn man geringfügige Umformungen vornimmt. Man setzt hier

$$\operatorname{tg}\psi' = \sqrt{\frac{e-1}{2}}, \quad \sec\psi' = \sqrt{\frac{e+1}{2}} \quad (\sec^2\psi' - \operatorname{tg}^2\psi' = 1).$$

Ferner definiert man, als Ersatz für das rein imaginäre E, den reellen Hilfswinkel E' durch

$$t' = \operatorname{tg}\frac{E'}{4} = -i\operatorname{tg}\frac{E}{4} = -it,$$

setzt also $t = it'$, $t^2 = -t'^2$, ferner

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2it'}{1+t'^2} = i\sin\frac{E'}{2},$$

$$\sec\frac{E}{2} = \frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{1-t'^2}{1+t'^2} = \cos\frac{E'}{2};$$

$$\sec^2\frac{E}{4} = 1 + t^2 = 1 - t'^2 = \cos\frac{E'}{2}\sec^2\frac{E'}{4}.$$

Damit erhält das Formelsystem für Hyperbeln die Gestalt

$$\sin\frac{E'}{2} = \sin\psi'\operatorname{tg}\frac{v}{2}; \quad r = q\sec^2\frac{E'}{2}\sec^2\frac{v}{2},$$

$$\sigma = \operatorname{tg}\frac{v}{2}\sec\frac{E'}{2}\cos\psi'$$

$$\lambda^3 = \cos\frac{E'}{2}\sec^2\frac{E'}{4}\cos^{\frac{4}{5}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{t'}{\sqrt{2}}\right)\cdot g'(t'^2),$$

$$P = (\lambda\sigma)^3 + \sigma\sec\frac{E'}{2}; \quad dv = 2\,dP\sec^4\frac{E'}{2}\sec^4\frac{v}{2}\sec\psi',$$

wo $g'(t'^2)$ im Anhang A, Tafel IV, mit dem Argument $E'/4$ gegeben ist. In beiden Fällen ist das Iterationsverfahren abgeschlossen, wenn $dP = 0$ wird. Die Koordinaten r und v aus der letzten Hypothese sind dann endgültig.[1])

Eine weitere Methode zur ephemeridenmäßigen Berechnung parabelnaher Bahnen, bei der die Unterscheidung zwischen elliptischer und hyperbolischer Bahnform ganz unwesentlich ist, beruht auf der Benutzung der schon im Abschn. 35 (IV; 34) erwähnten Restfunktionen des Sinus und Cosinus

$$c_1(\lambda^2) = \frac{\sin\lambda}{\lambda} = 1 - \frac{\lambda^2}{3!} + \frac{\lambda^4}{5!} - \cdots,$$

(IV; 67)
$$c_2(\lambda^2) = \frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{2!} - \frac{\lambda^2}{4!} + \frac{\lambda^4}{6!} - \cdots,$$

$$c_3(\lambda^2) = \frac{\lambda - \sin\lambda}{\lambda^3} = \frac{1}{3!} - \frac{\lambda^2}{5!} + \frac{\lambda^4}{7!} - \cdots,$$

die im Anhang B aufgeschlagen werden können.

Schreibt man die KEPLERsche Gleichung in der Form

$$E(1-e) + e(E - \sin E) = M = \frac{\tau}{\sqrt{q^3}}\sqrt{(1-e)^3},$$

so ergibt sich daraus, wenn man $c_3 = c_3(E^2)$ einführt,

$$\frac{1-e}{M}E + c_3\frac{e}{M}E^3 = 1.$$

Führt man nun statt E die neue Variable

(IV; 68)
$$z = \frac{1-e}{M}E = \frac{E}{\tau}\sqrt{\frac{q^3}{1-e}}$$

---

[1]) Eine Variante dieser Methode, die aber keine wesentlich neuen Gesichtspunkte erkennen läßt, wurde von T. SUBBOTIN [Astron. Nachr. *234*, 287 (1928)] gegeben.

ein, so erhält man nach einfacher Umformung die Gleichung

$$\text{(IV; 69)} \qquad z + c_3(E^2) \cdot \zeta z^3 = 1 \quad \text{mit} \quad \zeta = \frac{eM^2}{(1-e)^3} = \frac{e}{q^3}\tau^2.$$

Diese Gleichung wird sich als spezielle Form einer allgemeineren Beziehung erweisen, die in den Überlegungen des nächsten Kapitels eine zentrale Stellung einnehmen wird und die ich daher als *Hauptgleichung* des Zweikörperproblems bezeichnen will.

Für kleine E ist $c_3(E^2)$ nahezu konstant $= \frac{1}{6}$, und die kubische Gleichung

$$\text{(IV; 70)} \qquad z_0 + \frac{1}{6}\zeta z_0^3 = 1,$$

die für $e = 1$, $E = 0$ streng gilt und mit (III; 43) wesensgleich ist, vermittelt einen brauchbaren Näherungswert $z = z_0$. Mit diesem läßt sich das Argument der Funktion c_3,

$$E^2 = \frac{1-e}{q^3}(z\tau)^2 = \chi z^2, \quad \left(\chi = \frac{1-e}{q^3}\tau^2\right)$$

genauer berechnen, so daß man mit diesem Argument den Faktor c_3 der Tafel entnehmen und in (IV; 69) einführen kann. Hat man nach Beendigung dieses Iterationsverfahrens die endgültige Lösung z der Gleichung (IV; 69) gefunden, so ergibt sich nach (II; 14)

$$\text{(IV; 71)} \qquad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{1-\cos E}{\sin E} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{c_2}{c_1}E =$$

$$= \sqrt{\frac{1+e}{q^3}} \cdot \frac{c_2}{c_1} z\tau$$

und nach (II; 10)

$$r = a(1 - e\cos E) = \frac{q}{1-e}[1 - e + e(1-\cos E)] =$$

$$\text{(IV; 72)} \qquad = q\left(1 + \frac{eE^2}{1-e}c_2\right) = q\,(1 + c_2\zeta z^2).$$

Die Hauptgleichung (IV; 69) kann man auflösen, indem man sie auf die Form (IV; 54) bringt. Multipliziert man (IV; 69) mit $\sqrt{3c_3\zeta}$, so ergibt sich

$$z\sqrt{3c_3\zeta} + z^3\sqrt{3c_3^3\zeta^3} = \sqrt{3c_3\zeta}$$

oder, wenn $z\sqrt{3c_3\zeta} = y$ gesetzt wird,

$$\text{(IV; 73)} \qquad y + \frac{1}{3}y^3 = Q = \sqrt{3c_3\zeta}.$$

Die Lösung dieser Gleichung entnimmt man mit dem Näherungswert $c_3 = \frac{1}{6}$ der BARKERschen Tafel und berechnet dann c_3 mit

$$E^2 = \chi \frac{y^2}{3 c_3 \zeta} \approx \chi \frac{2 y^2}{\zeta}$$

neu. Schneller gelangt man mit dem NEWTONschen Näherungsverfahren zum Ziel. Mit der Näherung z_0, die man gemäß (IV; 70) einem Täfelchen mit dem Eingang ζ (Anhang A, Tab. X) entnehmen kann, ergibt die Hauptgleichung $f(z) = 0$

$$f(z_0) = z_0 + c_3 \zeta z_0^3 - 1 = dH, \tag{IV; 74}$$

wo dH eine von null nur wenig verschiedene Größe sein wird. Sei nun $z = z_0 + dz$, so bestimmt man dz, indem man (IV; 74) differenziert und

$$df = dz \left[1 + \frac{dc_3}{dz} \zeta z^3 + 3 c_3 \zeta z^2\right]_{z = z_0} = -dH$$

setzt. Da nun aus (IV; 67), mit $\lambda = E = z\sqrt{\chi}$,

$$\frac{dc_3}{dE} = \frac{1}{E}(c_2 - 3c_3); \quad \frac{dE}{dz} = \sqrt{\chi} = \frac{E}{z}; \quad \frac{dc_3}{dz} = \frac{1}{z}(c_2 - 3c_3)$$

folgt, so erhält man

$$dz(1 + c_2 \zeta z^2)_{z = z_0} = -dH$$

oder nach (IV; 72)

$$dz = -\frac{q}{r_0} dH, \quad z = z_0 + dz.$$

Man bemerkt, daß nach Einführung der c-Funktionen keine imaginären Größen mehr auftreten, da diese Funktionen auch für imaginäre E reell bleiben. Man wird also die hyperbolischen Fälle mit erledigen, wenn man dafür sorgt, daß die Tafeln der c-Funktionen auch auf negative E^2 ausgedehnt werden. Die Variable z ist, wie (IV; 68) lehrt, stets reell, da E und M immer nur gleichzeitig reell, null oder imaginär sind. Im Falle strenger Parabelbewegung wird

$$c_\nu = \frac{1}{\nu!}, \quad \chi = 0, \quad \zeta = \frac{\tau^2}{q^3}$$

und nach (IV; 71)

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{2}{q^3}} \cdot \frac{z\tau}{2} = \frac{z\tau}{\sqrt{2q^3}} = y.$$

(IV; 73) geht dann in die bekannte kubische Gleichung (III; 43) über.

Die Konvergenz aller hier beschriebenen Iterationsverfahren wird schlechter, wenn sich der Himmelskörper auf der sonnenfernen Hälfte einer stark exzen-

trischen Ellipse befindet, insbesondere in der Umgebung des Aphels, in dem $\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \pm\infty$ wird. Man kann in diesen Fällen die KEPLERsche Gleichung in ihrer ursprünglichen Form verwenden. Es gibt aber auch eine Variante der zuletzt beschriebenen Methode, die für sonnenferne Örter langgestreckter Kometenbahnen brauchbar ist und darauf beruht, daß man die Anomalien und die Zeiten statt vom Perihel vom *Aphel* aus zählt. Sei T' die Durchgangszeit durch das Aphel, so setze man

$$\tau = k(t - T'), \quad E' = E - \pi, \quad M' = M - \pi, \quad v' = v - \pi.$$

Dann läßt sich die KEPLERsche Gleichung in der Form

$$E'(1 + e) - e(E' - \sin E') = M' = \frac{\tau'}{\sqrt{s^3}}\sqrt{(1 + e)^3}$$

schreiben, wo $s = a(1 + e) = q\frac{1 + e}{1 - e}$ die Apheldistanz des Himmelskörpers bedeutet. Sei nun

$$z = \frac{1 + e}{M'}E' = \frac{E'}{\tau'}\sqrt{\frac{s^3}{1 + e}},$$

so ist die Gleichung (IV; 69) mit

$$\zeta = -\frac{e}{s^3}\tau'^2, \quad \chi = \left(\frac{E'}{z}\right)^2 = \frac{1 + e}{s^3}\tau'^2$$

erfüllt. Da ferner

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = -\operatorname{ctg}\frac{E'}{2}; \quad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = -\operatorname{ctg}\frac{v'}{2},$$

so erhält man

$$\operatorname{tg}\frac{v'}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\operatorname{tg}\frac{E'}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\,\frac{1 - \cos E'}{\sin E'} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\,\frac{c_2(E'^2)}{c_1(E'^2)}E' =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - e}{s^3}} \cdot \frac{c_2}{c_1}z\tau'$$

und schließlich

$$r = \frac{s}{1 + e}[1 + e - e(1 - \cos E')] = s\left(1 - \frac{eE'^2}{1 + e}c_2\right) = s(1 + c_2\zeta z^2).$$

Nach einem Vorschlag von S. HERRICK[1]) lassen sich aphelnahe Örter durch ein rasch förderndes Näherungsverfahren berechnen, wenn man die Bewegung in erster Näherung als geradlinig ansieht. Von einem weit entfernten Stand-

[1]) Astron. Journ. *51*, 123 (1946).

punkt aus gesehen, erscheint ja die Bewegung in einer sehr langgestreckten Ellipse einer geradlinigen Bewegung des elliptischen Typs ähnlich, und man darf wenigstens in der weiteren Umgebung des Aphels die Bewegung des Körpers in der Abszisse (also in Richtung der Apsidenlinie) angenähert als freien Fall von der Ruhelage (Aphel) aus betrachten. Für den freien Fall ist ja (siehe Abschn. 26) $e = 1$ und a endlich; die rechtwinkligen Koordinaten in der Bahnebene sind dann

$$x = r\cos v = a(\cos E - 1)\,; \quad y = r\sin v = 0,$$

und es ist

$$E - \sin E = M = \frac{\tau}{\sqrt{a^3}}.$$

Die Lösung dieser Gleichung, die man im Anhang A, Tab. II in der Rubrik $e = 1$ genähert findet, liefert den Ausgangswert E_0, mit dem man die Iteration zur Auflösung der strengen KEPLERschen Gleichung

$$E - \sin E = M^* = \frac{M}{e} - \frac{1-e}{e}E$$

beginnt. Nach Abschluß dieses Verfahrens erhält man dann für die Koordinaten des Kometen die strengen Werte

$$x = a(\cos E - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2}\sin E,$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{y}{x}, \quad r = a(1 - e\cos E).$$

KAPITEL V

DIE ZWEIKÖRPERBEWEGUNG ALS ANFANGSWERTPROBLEM

38. *Das Wurfproblem. Die Anfangswerte als lokale Elemente*

Die ungestörte Bahn eines Himmelskörpers um die Zentralmasse ist räumlich und zeitlich bestimmt durch sechs Bahnkonstanten (Elemente) und eine Zeitangabe (Epoche). Wir bezeichnen ganz allgemein, d.h. für jeden Bahntyp passend, die Konstanten

$$i, \Omega, \omega; \quad q, e, \tau_0 \tag{V; 1}$$

als die Kegelschnittselemente der Bahn. Sie zerfallen in zwei Gruppen: Die ersten drei bestimmen die Lage der Bahn im Raum und sind daher von der Wahl des Koordinatensystems abhängig; die letzten drei dagegen bestimmen die Bahnform und den Ort des Himmelskörpers in der Bahn zu der vorgegebenen Epoche – sie sind gegen Koordinatentransformationen invariant. Ist die Bahn parabolisch, so wird $e = 1$; Ellipsen und Hyperbeln unterscheiden sich durch $e \lessgtr 1$. Das Element $\tau_0 = \varkappa(t_0 - T)$ ist die zur Epoche t_0 seit der Zeit T des letzten Periheldurchgangs verflossene, in Einheiten von $1/k$ mittleren Tagen ausgedrückte Zeitspanne. Bei Kreisbahnen wird $e = 0$ und ω unbestimmt. Es ist dann zweckmäßig, unter T die Zeit des Durchgangs durch den aufsteigenden Knoten der Bahn zu verstehen, d.h. τ_0 durch das Argument der Breite u_0 des Planeten zur Zeit t_0 zu ersetzen. Ist die Neigung i der Bahn klein oder null, so wird die Knotenlänge Ω unsicher bzw. unbestimmt. Man kann diese Schwierigkeit durch den Übergang auf ein anderes Koordinatensystem (von der Ekliptik auf den Äquator als Hauptkoordinatenebene oder umgekehrt) vermeiden, oder man wird, falls dies nicht erwünscht ist, die Lage des Perihels durch die „Perihellänge" $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$ ausdrücken, durch jenen gebrochenen Winkel also, der vom Frühlingspunkt längs der Ekliptik (bzw. des Äquators) bis zum aufsteigenden Knoten, von da ab längs der Bahn bis zum Perihel gezählt wird. Ist die Bahn außerdem ein Kreis, so wird man statt u_0 die „Länge in der Bahn" s_0 des Planeten zur Epoche benutzen, die gleich $\Omega + u_0$ ist.

Zu einer ganz anderen Form der Bahnelemente gelangt man, wenn man die Bewegung des Himmelskörpers durch ihren Anfangszustand zu der vorgegebenen Epoche $t = t_0$ beschreibt, d.h. durch die Koordinaten des Ortsvektors $\mathfrak{p}_0$ und des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\mathfrak{p}}_0 = \dfrac{d\mathfrak{p}}{d\tau}_{(t=t_0)}$ in diesem Zeitpunkt. Diese sechs Größen, die in einem beliebig vorgegebenen rechtwinkligen Koordinatensystem mit

$$x_0, y_0, z_0; \quad \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0 \tag{V; 2}$$

bezeichnet werden mögen, stellen die Anfangsbedingungen dar, unter denen die Differentialgleichungen der Bewegung diejenige Lösung liefern, die der Bahn des Himmelskörpers in dem betrachteten konkreten Fall entspricht.

Die Elemente (V; 2) bezeichnet man sinngemäß als „lokale Elemente", da sie den Bewegungszustand des Himmelskörpers an einem bestimmten Ort der Bahn definieren. Das Problem, aus Ort und Geschwindigkeit zur Epoche auf Ort und Geschwindigkeit zu einer beliebigen Zeit t überzugehen, d.h., also mit Hilfe der lokalen Elemente eine Ephemeride zu berechnen, kann man auch als das *Anfangswertproblem* oder *Wurfproblem* bezeichnen: Es wird gefordert, die Bahn zu berechnen, die ein Körper im Gravitationsfeld der Zentralmasse beschreibt, der von einem vorgegebenen Ort $\mathfrak{p}_0$ mit der nach Größe und Richtung vorgegebenen Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{p}}_0$ startet (geworfen wird).

Bei vielen Aufgaben der praktischen Astronomie, z.B. bei der Bahnbestimmung der Himmelskörper aus beobachteten sphärischen Örtern (Kap. VIII und IX) oder in der Störungstheorie spielt das Wurfproblem eine wichtige Rolle. Man kann es z.B. lösen, indem man die vektorielle Ortsfunktion $\mathfrak{p}(\tau)$ um die Epoche t_0 herum in eine TAYLORsche Reihe

$$(V;3) \qquad \mathfrak{p}(\tau) = \mathfrak{p}_0 + \tau\dot{\mathfrak{p}}_0 + \frac{\tau^2}{2!}\ddot{\mathfrak{p}}_0 + \frac{\tau^3}{3!}\dddot{\mathfrak{p}}_0 + \cdots \quad [\tau = \varkappa(t - t_0)]$$

entwickelt und mit Hilfe der Differentialgleichung 2. Ordnung, die der Bewegung zugrunde liegt, die zweite und die höheren Ableitungen des Ortsvektors zur Epoche eliminiert. Man wird dann die Koordinaten von $\mathfrak{p}$ als Funktionen der lokalen Elemente (V; 2) und der „Zwischenzeit" τ in Form von Potenzreihen erhalten. Wir wollen in der Folge immer, wenn es nicht ausdrücklich anders vermerkt wird, den in den früheren Formeln auftretenden Faktor $\varkappa = k\sqrt{1+m}$ gleich eins setzen, also nicht nur als Zeiteinheit $1/k = 58.13244$ Tage einführen, sondern auch annehmen, daß die Masse m des bewegten Körpers gegen die der Sonne als Zentralkörper ($M = 1$) vernachlässigt werden darf, was bei Kometen und Planetoiden, um die es sich in der Praxis fast ausschließlich handeln wird, immer zutrifft. Wir können dann die vektorielle Differentialgleichung der Bewegung immer in der einfachen Form

$$(V;4) \qquad \ddot{\mathfrak{p}} = -\mu\mathfrak{p} \quad \left(\mu = \frac{1}{r^3};\quad r = |\mathfrak{p}|\right)$$

schreiben. Ist die Elimination von $\ddot{\mathfrak{p}}_0$, $\dddot{\mathfrak{p}}_0$, ... durchgeführt, so wird auf der rechten Seite von (V; 3) eine Potenzreihe nach τ stehen, deren Koeffizienten von den lokalen Elementen allein abhängen und die, wenn τ genügend klein ist, ziemlich rasch konvergiert. Ist dagegen die „Zwischenzeit" τ größer als eine gewisse von Fall zu Fall verschiedene Schranke, so konvergiert diese Reihe, deren Glieder mit wachsender Ordnung bald sehr kompliziert und für die numerische Rechnung unbequem werden, nur langsam oder gar nicht. Man wird dann die Aufgabe durch strenge Formeln zu lösen versuchen und kann dabei zwei verschiedene Wege beschreiten:

1. Man berechnet aus den lokalen Elementen (V; 2) die Kegelschnittelemente (V; 1) nach dem im nächsten Abschnitt zu entwickelnden Verfahren und führt die Ephemeridenrechnung dann mit Hilfe der früher (Kap. IV) beschriebenen Methoden durch.

2. Man sucht nach Wegen, aus den lokalen Elementen direkt, d.h. ohne den zeitraubenden Umweg über die Kegelschnittelemente, die Ortskoordinaten und, wenn erforderlich, auch die Geschwindigkeitskoordinaten des Himmelskörpers für beliebige Zwischenzeiten auf Grund strenger und geschlossener Formeln zu ermitteln. Diese Methode, der die Abschn. 40–46 dieses Kapitels gewidmet werden sollen, führt zu einer neuen Lösung des Ephemeridenproblems, die nicht nur für viele praktische Anwendungen brauchbar ist, sondern auch vom mathematischen Standpunkt aus befriedigt, weil bei ihr die lästigen Fallunterscheidungen, unter denen alle bisher besprochenen Methoden der Ephemeridenrechnung leiden, ganz fortfallen oder dort, wo sie doch erscheinen, eine untergeordnete Rolle spielen.

39. *Beziehungen zwischen den lokalen und den Kegelschnittelementen*

Die Berechnung der lokalen Elemente, d.h. also der Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten eines Himmelskörpers für einen vorgegebenen Zeitpunkt aus den Kegelschnittelementen, geschieht nach den in Abschn. 32–37 gegebenen Formeln. Die umgekehrte Aufgabe, die Kegelschnittelemente einer Bahn aus den lokalen Elementen einer Epoche abzuleiten, wird folgendermaßen gelöst:

Seien $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren in Richtung der positiven Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Frühlingspunkt, Ekliptik oder Äquator), so ist für irgendeine Zeit t

$$\mathfrak{p} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}; \quad \dot{\mathfrak{p}} = \dot{x}\mathfrak{i} + \dot{y}\mathfrak{j} + \dot{z}\mathfrak{k},$$

und die Vektoren $\mathfrak{g}$ (Flächengeschwindigkeitsvektor) und $\mathfrak{f}$ (LAPLACEscher Vektor) haben die Form

$$\mathfrak{g} = c_1\mathfrak{i} + c_2\mathfrak{j} + c_3\mathfrak{k}; \quad \mathfrak{f} = d_1\mathfrak{i} + d_2\mathfrak{j} + d_3\mathfrak{k}$$

mit konstanten Koordinaten. Nach den Regeln der Vektorrechnung findet man dann aus (III; 13)

$$\text{(V; 5)} \quad \mathfrak{g} = [\mathfrak{p}\dot{\mathfrak{p}}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = (y\dot{z} - z\dot{y})\,\mathfrak{i} + (z\dot{x} - x\dot{z})\,\mathfrak{j} + (x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathfrak{k}$$

und aus (III; 16) mit $\varkappa = k\sqrt{1 + m} = 1$

$$\text{(V; 6)} \quad \mathfrak{f} = [\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{g}] - \frac{1}{r}\mathfrak{p} = (\dot{\mathfrak{p}}\dot{\mathfrak{p}})\,\mathfrak{p} - (\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{p})\,\dot{\mathfrak{p}} - \frac{1}{r}\mathfrak{p} = \left(V^2 - \frac{1}{r}\right)\mathfrak{p} - r\dot{r}\dot{\mathfrak{p}},$$

da ja $(\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}) = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = r\dot{r}$.

Aus (IV; 8) und (V; 5) folgt zunächst

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \sqrt{p}\,\sin i\,\sin \Omega = y\dot{z} - z\dot{y}, \\
c_2 &= -\sqrt{p}\,\sin i\,\cos \Omega = z\dot{x} - x\dot{z}, \\
c_3 &= \sqrt{p}\,\cos i = x\dot{y} - y\dot{x},
\end{aligned}
\tag{V; 7}
$$

ein System, aus dem die Größen i, Ω, p leicht berechnet werden können.

In Abb. 42 seien X, Y, Z die Punkte, in denen die Achsen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Sphäre durchstoßen (X = Frühlingspunkt, Z = Nordpol des Äquators bzw. der Eklip-

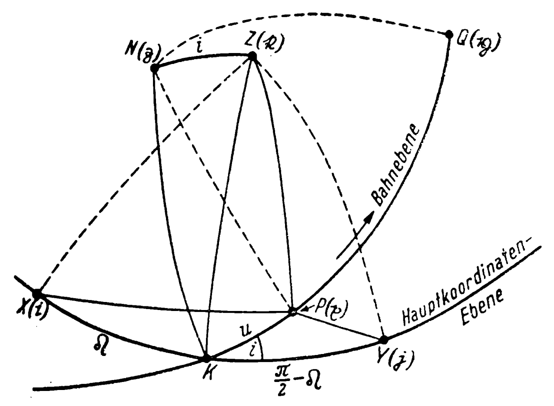


Abb. 42. Lage der Bahnebene.

tik). Ferner sei KP die Spur der Bahn, K ihr aufsteigender Knoten und P der Ort des Himmelskörpers an der Sphäre. Dann erhält man, wenn u das Argument der Breite ist, aus den sphärischen Dreiecken KPX, KPY und KPZ

$$
\begin{aligned}
\cos(PX) &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i = \frac{x}{r}, \\
\cos(PY) &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i = \frac{y}{r}, \\
\cos(PZ) &= \sin u \sin i = \frac{z}{r}
\end{aligned}
\tag{V; 8}
$$

als Richtungscosinus des Ortes P und, da für das Perihel $u = \omega$ gilt,

$$
\begin{aligned}
\cos(\Pi X) &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\
\cos(\Pi Y) &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\
\cos(\Pi Z) &= \sin \omega \sin i
\end{aligned}
\tag{V; 9}
$$

als Richtungscosinus des Perihels.

Da nun der LAPLACEsche Vektor $\mathfrak{f}$ nach dem Perihel zeigt und den Betrag $\varkappa^2 e = e$ hat, so erhält man für seine Koordinaten nach (V; 6, 9)

$$
\begin{aligned}
d_1 &= e\cos(\Pi X) = \left(V^2 - \frac{1}{r}\right)x - r\dot{r}\dot{x} = f\cos\Omega - g\sin\Omega\cos i,\\
d_2 &= e\cos(\Pi Y) = \left(V^2 - \frac{1}{r}\right)y - r\dot{r}\dot{y} = f\sin\Omega + g\cos\Omega\cos i, \qquad \text{(V; 10)}\\
d_3 &= e\cos(\Pi Z) = \left(V^2 - \frac{1}{r}\right)z - r\dot{r}\dot{z} = g\sin i,
\end{aligned}
$$

wobei

$$f = e\cos\omega, \quad g = e\sin\omega$$

gesetzt wurde. Die drei Gleichungen (V; 10) liefern f, g und damit e und ω. Eine der Gleichungen ist entbehrlich, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{f}$ senkrecht aufeinander stehen und daher die Beziehung (III; 17) gilt, die zur Kontrolle der Rechnung benutzt werden kann.

Vorteilhafter ist es, statt (V; 10) durchzurechnen, zunächst e und die wahre Anomalie v aus den Beziehungen

$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1; \quad e\sin v = \dot{r}\sqrt{p} = \frac{\sqrt{p}}{r}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})$$

abzuleiten, die aus der Kegelschnittgleichung (II; 1) und aus (II; 33) folgen, sodann das Argument der Breite u aus (IV; 14) zu bestimmen, wobei sich r und i noch einmal als Kontrollwerte ergeben. Man erhält dann den Perihelabstand vom Knoten aus

$$\omega = u - v\,.$$

Nunmehr sind die fünf Elemente i, Ω, ω; e, $q = \frac{p}{1+e}$ bzw. $a = \frac{p}{1-e^2}$ bekannt, außerdem v. Das noch fehlende Element $\tau_0 = k(t_0 - T)$ bzw. die Periheldurchgangszeit T ergibt sich dann aus der KEPLERschen Gleichung oder den ihr analogen Beziehungen. Die Methode der Ermittlung von T hängt daher von der Bahnform ab. Für *parabolische* Bahnen ist

$$\tau_0 = \sqrt{2q^3}\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}\right),$$

für *elliptische*

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}; \quad \tau_0 = \sqrt{a^3}\,(E - e\sin E)$$

und für *hyperbolische*

$$\operatorname{tg}\frac{H}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}; \quad \tau_0 = \sqrt{-a^3}\left[e\operatorname{tg}H + \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{H}{2}\right)\right].$$

In allen drei Fällen ist dann

$$T = t_0 - \frac{1}{k}\tau_0.$$

Ist die Bahn ein Kreis, so ist die Berechnung der Elemente mit der Bestimmung der vier Größen

$$i, \quad \Omega, \quad p = a, \quad u_0 = u(t_0)$$

abgeschlossen.

40. *Die lokalen Invarianten*

Die sechs lokalen Elemente (V; 2) sind sämtlich von der Wahl des Koordinatensystems abhängig. Von den sechs Kegelschnittelementen (V; 1) gilt dies nur für die drei ersten, während die übrigen, nämlich q, e und τ_0, gegen Koordinatentransformationen invariant sind. Daraus kann man schließen, daß es drei voneinander unabhängige Funktionen der lokalen Elemente geben muß, die ebenfalls invariant in diesem Sinne sind. In der Tat lassen sich alle Größen, die allein durch die geometrische Form, nicht aber durch die räumliche Orientierung der Bahn bestimmt sind, durch solche invarianten Ausdrücke darstellen. Drei Invarianten, die voneinander unabhängig sind und zur vollständigen Charakterisierung der Bahngeometrie genügen, erhält man aus der Figur, die von den beiden Vektoren des Ortes und der Geschwindigkeit des Himmelskörpers zur Zeit der Epoche t_0 gebildet wird. Diese Figur wird ihrer Form nach durch folgende drei Größen bestimmt: die Länge r_0 des Ortsvektors $\mathfrak{p}_0$, die Länge V_0 des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\mathfrak{p}}_0$ und den Winkel δ_0, den diese beiden Vektoren miteinander bilden. Statt dessen kann man auch die drei skalaren Produkte, die mit Hilfe von $\mathfrak{p}_0$ und $\dot{\mathfrak{p}}_0$ gebildet werden können, nämlich

$$\text{(V; 11)} \qquad \begin{aligned} p_{11} &= (\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_0) = r_0^2 &&= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ p_{12} &= (\mathfrak{p}_0\dot{\mathfrak{p}}_0) = r_0 V_0 \cos\delta_0 &&= x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0, \\ p_{22} &= (\dot{\mathfrak{p}}_0\dot{\mathfrak{p}}_0) = V_0^2 &&= \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 \end{aligned}$$

als ein System von unabhängigen Invarianten ansehen. Aus diesen elementaren Invarianten lassen sich alle übrigen Bahngrößen aufbauen, die von der Wahl des Koordinatensystems nicht abhängen. Das gilt z.B. für das Quadrat des Flächengeschwindigkeitsvektors

$$(\mathfrak{g}\mathfrak{g}) = p = [\mathfrak{p}_0\dot{\mathfrak{p}}_0]^2 = \begin{vmatrix} (\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_0) & (\mathfrak{p}_0\dot{\mathfrak{p}}_0) \\ (\dot{\mathfrak{p}}_0\mathfrak{p}_0) & (\dot{\mathfrak{p}}_0\dot{\mathfrak{p}}_0) \end{vmatrix} = p_{11}p_{22} - p_{12}^2$$

und das Quadrat des LAPLACEschen Vektors

$$(\mathfrak{f}\mathfrak{f}) = e^2 = 1 - \frac{p}{a} = 1 - p\left(\frac{2}{r} - V^2\right) = 1 - (p_{11}p_{22} - p_{12}^2)\left(\frac{2}{\sqrt{p_{11}}} - p_{22}\right).$$

Führt man die Reihenentwicklung (V; 3) aus, indem man die höheren Ableitungen des Ortsvektors durch die Differentialgleichung (V; 4) und ihre Ableitungen eliminiert, so ergibt sich der Ausdruck

$$\mathfrak{p}(\tau) = F\mathfrak{p}_0 + G\dot{\mathfrak{p}}_0, \tag{V; 12}$$

in dem F und G zwei Funktionen der Zwischenzeit τ und der lokalen Elemente bedeuten. Nach (V; 12) läßt sich also $\mathfrak{p}(\tau)$ als Resultante zweier Vektoren mit den Richtungen von $\mathfrak{p}_0$ bzw. $\dot{\mathfrak{p}}_0$ darstellen. Nach dem oben Gesagten ist klar, daß auch F und G von der speziellen Wahl des Koordinatensystems unabhängig sind und daher die lokalen Elemente nur in der Gestalt von Funktionen der elementaren Invarianten (V; 11) enthalten.

Nach einer Bemerkung von F. Kühnert, die später von C. V. L. Charlier aufgegriffen wurde, kommen diese Invarianten in F und G stets in der Form

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{r^3} = p_{11}^{-\frac{3}{2}}; \quad \sigma = \frac{\dot{r}}{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r^2} = \frac{p_{12}}{p_{11}}; \\ \omega &= \left(\frac{V}{r}\right)^2 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{r^2} = \frac{p_{22}}{p_{11}} \end{aligned} \tag{V; 13}$$

vor.[1]) Wir wollen diese drei Größen daher als die *fundamentalen Invarianten* des Zweikörperproblems bezeichnen. In der Tat: Wenn man (V; 4) fortgesetzt differenziert, wird man auf das Formelsystem

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= -3\frac{\dot{r}}{r^4} = -3\mu\sigma, \\ \dot{\sigma} &= \frac{\dot{x}^2 + x\ddot{x}}{r^2} + \frac{\dot{y}^2 + y\ddot{y}}{r^2} + \frac{\dot{z}^2 + z\ddot{z}}{r^2} - 2\frac{\dot{r}}{r^3}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = \omega - \mu - 2\sigma^2, \\ \dot{\omega} &= 2\frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{r^2} - 2\frac{\dot{r}}{r^3}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -2\sigma(\mu + \omega) \end{aligned} \tag{V; 14}$$

geführt, aus dem hervorgeht, daß die Differentialquotienten der Invarianten (V; 13) wiederum einfache Funktionen von μ, σ, ω sind, so daß auch in den Ableitungen beliebig hoher Ordnung von μ keine anderen Größen als diese drei, und zwar in Form von Polynomen, erscheinen werden.

Die Formeln (V; 14) stellen ein System von drei Differentialgleichungen 1. Ordnung dar, dessen Lösung die Bahnbewegung im ungestörten Zweikörperproblem ergeben muß, soweit die Orientierung der Bahn im Raum noch offen gelassen wird. Die Integration des Systems läßt sich äußerst einfach durchführen, wenn man nach Kombinationen x der fundamentalen Invarianten (V; 13) sucht, deren Ableitungen die Form

$$\dot{x} = -n\sigma x$$

---

[1]) Es ist darauf zu achten, daß die Invariante ω nicht mit dem Bahnelement ω (Perihelabstand vom Knoten) verwechselt werden darf.

haben, wo n einen Zahlenfaktor darstellt. Man findet leicht, daß es außer μ noch zwei weitere einfache Funktionen der Invarianten gibt, die diese Eigenschaft haben. Setzt man allgemein

$$x = a\mu + b\omega + c\sigma^2,$$

$$\dot{x} = a\dot{\mu} + b\dot{\omega} + 2c\sigma\dot{\sigma} = \sigma[-3\mu a - 2(\mu + \omega)\,b + 2(\omega - \mu - \sigma^2)\,c],$$

so wird zwischen $\dot{x}$ und x die Beziehung

$$\sigma[\mu(-3a - 2b - 2c) + \omega(-2b + 2c) - 4\sigma^2 c] = -n\sigma(a\mu + b\omega + c\sigma^2)$$

bestehen müssen. Vergleicht man beide Seiten dieser Identität, so ergeben sich die Bedingungen

$$(n-3)\,a - 2b - 2c = 0,$$
$$(n-2)\,b + 2c = 0,$$
$$(n-4)\,c = 0.$$

Lösungen dieses Systems von homogenen linearen Gleichungen für a, b, c bestehen, wenn die Determinante $(n-2)(n-3)(n-4)$ verschwindet, d.h. für $n = 2, 3, 4$. Solche Lösungen sind, wenn wir jeweils eine der Unbekannten willkürlich gleich 1 oder -1 setzen,

$$(n=2):\quad a = 2,\quad b = -1,\quad c = 0,$$
$$(n=3):\quad a = 1,\quad b = 0,\quad c = 0,$$
$$(n=4):\quad a = 0,\quad b = 1,\quad c = -1,$$

und man erhält für x die drei Invarianten

(V; 15) $$\varrho = 2\mu - \omega;\quad \mu = \mu;\quad \vartheta = \omega - \sigma^2,$$

zwischen denen die Identität

(V; 16) $$\sigma^2 = 2\mu - \varrho - \vartheta$$

besteht und deren Ableitungen nach der Zeit

(V; 17) $$\dot{\varrho} = -2\varrho\sigma$$
$$\dot{\mu} = -3\mu\sigma$$
$$\dot{\vartheta} = -4\vartheta\sigma$$

sind. Eliminiert man σ aus der ersten und dritten dieser Differentialgleichungen mittels der zweiten, so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = \frac{2}{3}\frac{\dot{\mu}}{\mu};\quad \frac{\dot{\vartheta}}{\vartheta} = \frac{4}{3}\frac{\dot{\mu}}{\mu},$$

deren Integrale mit den Konstanten α, β

$$\ln\varrho = \frac{2}{3}\ln\mu + \ln\alpha; \quad \varrho = \alpha\mu^{\frac{2}{3}} = \frac{\alpha}{r^2},$$

$$\ln\vartheta = \frac{4}{3}\ln\mu + \ln\beta; \quad \vartheta = \beta\mu^{\frac{4}{3}} = \frac{\beta}{r^4}$$

lauten. Die geometrische Bedeutung der neuen Invarianten ϱ und ϑ wird sichtbar, wenn man (V; 11, 13) in (V; 15) einsetzt:

$$\varrho = \frac{2}{r^3} - \left(\frac{V}{r}\right)^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{2}{r} - V^2\right) = \frac{1}{r^2 a}, \quad \text{da} \quad V^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \quad \text{(Energiesatz)},$$

(V; 18)

$$\vartheta = \left(\frac{V}{r}\right)^2 - \left(\frac{V}{r}\cos\delta\right)^2 = \left(\frac{V}{r}\sin\delta\right)^2 = \frac{p}{r^4}, \quad \text{da} \quad \sqrt{p} = V r \sin\delta \quad \text{(Flächensatz)}.$$

Die Integrationskonstanten sind demnach $\alpha = \frac{1}{a}$, $\beta = p$. Das dritte Integral folgt dann aus der zweiten Differentialgleichung (V; 17)

$$\dot{\mu} = -3\mu\sigma$$

oder aus der mit ihr gleichbedeutenden

(V; 19) $$\dot{r} = r\sigma.$$

Setzt man hierin nach (V; 16)

$$\sigma = \pm\sqrt{2\mu - \varrho - \vartheta},$$

so findet man, wenn man $\mu = 1/r^3$ und für ϱ, ϑ die Ausdrücke (V; 18) einführt,

(V; 20) $$\dot{r} = \pm r\sqrt{\frac{2}{r^3} - \frac{1}{a r^2} - \frac{p}{r^4}} = \pm\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2}}.$$

Es ist demnach

$$d\tau = \pm\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2}}}; \quad \tau_0 = k(t_0 - T) = \pm\int\limits_{a(1-e)}^{r_0}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2}}},$$

eine Formel, in der man unschwer (III; 83) wiedererkennt und die ja nichts anderes als die Integralform der KEPLERschen Gleichung darstellt. Damit ist gezeigt, daß man bei der Integration von (V; 17) tatsächlich die drei invarianten Kegelschnittelemente a, p, τ_0 bzw. q, e, τ_0 erhält.

Zur Ableitung der drei übrigen Kegelschnittelemente, der nichtinvarianten Lageintegrale i, Ω, ω, kann man außer der im vorigen Abschnitt gezeigten

Methode auch folgendes Verfahren einschlagen, das nicht zuletzt wegen der Symmetrie der Formeln, aber auch aus mancherlei praktischen Gründen den Vorzug verdient:

Bezeichnen (Abb. 42) die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ wieder die Achsenrichtungen des gewählten Koordinatensystems, etwa die des Äquatorsystems mit dem Frühlingspunkt (X) in der positiven $\mathfrak{i}$-Richtung, und sei ferner durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ein anderes rechtwinkliges System von gleichem Drehungssinn gegeben, das mit dem Vektorenpaar $\mathfrak{p}_0$, $\dot{\mathfrak{p}}_0$ fest verbunden ist und in dem $\mathfrak{x}$ die Richtung (P) von $\mathfrak{p}_0$, ferner $\mathfrak{y}$ die dazu senkrechte Richtung (Q) in der Bahnebene und im Sinne wachsender Anomalien und $\mathfrak{z}$ die Richtung (N) der Normale der Bahnebene, also die des Flächengeschwindigkeitsvektors bedeutet, dann ist offenbar, wenn wir kürzehalber den Index 0 bei den Koordinaten von $\mathfrak{p}_0$, $\dot{\mathfrak{p}}_0$ fortlassen,

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{r}\mathfrak{p} = \frac{1}{r}(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}),$$

$$\text{(V; 21)}\quad \mathfrak{y} = [\mathfrak{z}\mathfrak{x}] = \frac{1}{r\sqrt{p}}[(c_2 z - c_3 y)\mathfrak{i} + (c_3 x - c_1 z)\mathfrak{j} + (c_1 y - c_2 x)\mathfrak{k}],$$

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{\sqrt{p}}\mathfrak{g} = \frac{1}{\sqrt{p}}(c_1\mathfrak{i} + c_2\mathfrak{j} + c_3\mathfrak{k})$$

oder, wenn man nach (V; 7)

$$c_1 = y\dot{z} - z\dot{y};\quad c_2 = z\dot{x} - x\dot{z};\quad c_3 = x\dot{y} - y\dot{x},$$

ferner nach (V; 18) $\sqrt{p} = r^2\sqrt{\vartheta}$ und nach (V; 13) $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = r^2\sigma$ setzt,

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{r}(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}),$$

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{r\sqrt{\vartheta}}[(\dot{x} - x\sigma)\mathfrak{i} + (\dot{y} - y\sigma)\mathfrak{j} + (\dot{z} - z\sigma)\mathfrak{k}],$$

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{r^2\sqrt{\vartheta}}[(y\dot{z} - z\dot{y})\mathfrak{i} + (z\dot{x} - x\dot{z})\mathfrak{j} + (x\dot{y} - y\dot{x})\mathfrak{k}].$$

Andererseits folgt aus (V; 21) für die Richtungscosinus der Achsen des ersten Systems gegen die des zweiten

$$\text{(V; 22)}\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= (\mathfrak{x}\mathfrak{i}) = \frac{x}{r} = \cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i,\\ \beta_1 &= (\mathfrak{x}\mathfrak{j}) = \frac{y}{r} = \cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i,\\ \gamma_1 &= (\mathfrak{x}\mathfrak{k}) = \frac{z}{r} = \sin u\sin i.\end{aligned}\right\}\ \text{nach (IV; 13) oder (V; 8)}$$

$$
(\mathrm{V};\,22)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\alpha_2 &= (\mathfrak{y}\mathfrak{i}) = \frac{\dot{x} - x\sigma}{r\sqrt{\vartheta}} = -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i, \\
\beta_2 &= (\mathfrak{y}\mathfrak{j}) = \frac{\dot{y} - y\sigma}{r\sqrt{\vartheta}} = -\sin u \,\mathrm{in}\, \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i, \\
\gamma_2 &= (\mathfrak{y}\mathfrak{k}) = \frac{\dot{z} - z\sigma}{r\sqrt{\vartheta}} = \quad \cos u \sin i, \\
\alpha_3 &= (\mathfrak{z}\mathfrak{i}) = \frac{y\dot{z} - z\dot{y}}{r^2\sqrt{\vartheta}} = \quad \sin \Omega \sin i, \\
\beta_3 &= (\mathfrak{z}\mathfrak{j}) = \frac{z\dot{x} - x\dot{z}}{r^2\sqrt{\vartheta}} = -\cos \Omega \sin i, \\
\gamma_3 &= (\mathfrak{z}\mathfrak{k}) = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2\sqrt{\vartheta}} = \quad \cos i.
\end{aligned}
\right.
\quad (\alpha_3,\beta_3,\gamma_3 \text{ nach } (\mathrm{V};\,7))
$$

Das zweite Tripel dieser Formeln folgt aus dem ersten, indem man u mit $u + \frac{\pi}{2}$ vertauscht.

Nach einem Satz von EULER lassen sich die beiden Systeme ineinander überführen, indem man eine einzige Drehung ausführt. Sind A, B, C die Richtungscosinus der Drehungsachse gegen das $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k})$-System, und ist Φ der Drehwinkel, so bestehen nach diesem Satze die Gleichungen

$$
(\mathrm{V};\,23)\quad
\begin{aligned}
A \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} &= \frac{\beta_1 + \alpha_2}{\alpha_3 - \gamma_1} \equiv \frac{\alpha_3 + \gamma_1}{\beta_1 - \alpha_2} = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cos \frac{\Omega - u}{2} \sec \frac{\Omega + u}{2}, \\
B \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} &= \frac{\gamma_2 + \beta_3}{\beta_1 - \alpha_2} \equiv \frac{\beta_1 + \alpha_2}{\gamma_2 - \beta_3} = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin \frac{\Omega - u}{2} \sec \frac{\Omega + u}{2}, \\
C \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} &= \frac{\alpha_3 + \gamma_1}{\gamma_2 - \beta_3} \equiv \frac{\gamma_2 + \beta_3}{\alpha_3 - \gamma_1} = \operatorname{tg} \frac{\Omega + u}{2},
\end{aligned}
$$

aus denen i, Ω und u berechnet werden können, wenn die lokalen Elemente bekannt sind. Diese Formeln zeigen vollkommene Symmetrie, da die Ausdrücke in den Richtungscosinus ineinander übergehen, wenn man α, β, γ und gleichzeitig die Indices 1, 2, 3 zyklisch vertauscht. Die Identität der beiden Quotienten, die in jeder dieser drei Formeln auftreten, folgt unmittelbar aus den Orthogonalitätsbedingungen, die für die neun Größen (V; 22) gelten. Man wird jeweils denjenigen Quotienten wählen, dessen Zähler und Nenner die größeren Beträge haben. Wenn i, Ω, u bekannt sind, verläuft die weitere Rechnung so: Es ist

$$
p = r^4\vartheta = (x^2 + y^2 + z^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})^2;
$$

$$
\frac{1}{a} = r^2\varrho = \frac{2}{r} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),
$$

während die übrigen Größen, e, v, ω (oder $\tilde{\omega}$), τ_0, nach den im Abschn. 39 gegebenen Formeln berechnet werden.

Der Vorteil der Formeln (V; 23) zeigt sich besonders bei kleinen Bahnneigungen, wo wegen der unsicheren Lage des Knotens die Bestimmung von ☊ und u ungenau ist. Die Summe $s = ☊ + u$, die *Länge in der Bahn*, die aus der dritten Gleichung (V; 23) folgt, ist von dieser Unsicherheit frei, während die Ungenauigkeit der Differenz $☊ - u$ durch den kleinen Faktor $\operatorname{tg}\frac{i}{2}$ der ersten beiden Gleichungen ausgeglichen wird. Durch die sichere Feststellung der Länge in der Bahn wird vermieden, daß die in solchen Fällen unvermeidliche Ungenauigkeit der Knotenlänge sich auf den Bahnort überträgt, wie das geschehen kann, wenn man ☊ und u einzeln bestimmt.

Auch die Anomalien v und E lassen sich als Funktionen der lokalen Invarianten $\mu, \sigma, \omega; \varrho, \vartheta$ darstellen, denen man zweckmäßigerweise noch eine sechste

$$\text{(V; 24)} \qquad \varepsilon = \omega - \mu = \mu - \varrho; \quad \dot{\varepsilon} = -\sigma(2\omega - \mu) = -\sigma(\omega + \varepsilon)$$

hinzufügt. Aus

$$\text{(V; 25)} \qquad \begin{aligned} e\cos v &= \frac{p}{r} - 1 = \frac{\vartheta}{\mu} - 1; \quad & e\cos E &= 1 - \frac{r}{a} = 1 - \frac{\varrho}{\mu} = \frac{\varepsilon}{\mu}; \\ e\sin v &= \dot{r}\sqrt{p} = \frac{\sigma\sqrt{\vartheta}}{\mu}; & e\sin E &= \frac{r}{\sqrt{ap}}\sin v = \frac{\sigma\sqrt{\varrho}}{\mu} \end{aligned}$$

folgt

$$\text{(V; 26)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} v &= \frac{\sigma\sqrt{\vartheta}}{\vartheta - \mu}; \quad \operatorname{tg} E = \frac{\sigma\sqrt{\varrho}}{\varepsilon}; \\ e^2 &= 1 - \frac{p}{a} = 1 - \frac{\varrho\vartheta}{\mu^2} = \frac{\varepsilon^2 + \varrho\sigma^2}{\mu^2}. \end{aligned}$$

Bemerkenswert sind auch die Formeln

$$\text{(V; 27)} \qquad \dot{v} = \sqrt{\vartheta}; \quad \dot{E} = \sqrt{\varrho}; \quad n = a^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\varrho^3}}{\mu},$$

die aus dem Flächensatz $r^2\dot{v} = \sqrt{p}$ und aus (IV; 51): $\dot{E}(1 - e\cos E) = \dot{M} = \frac{\sqrt{\varrho^3}}{\mu}$ folgen.

Auf Grund aller dieser Beziehungen, die zwischen den lokalen Invarianten und den geometrischen Bahngrößen bestehen, erkennt man, daß diese Invarianten, die aus den lokalen Elementen (V; 2) (besonders mit Hilfe der Rechenmaschine) leicht gebildet werden können, dem Rechner bereits gewisse Informationen über die Art der Bahn und den Ort des Himmelskörpers in der Bahn liefern, ohne daß die Umwandlung in Kegelschnittelemente nötig wäre.

Es handelt sich um folgende Kriterien:

1. $\varrho = \frac{1}{ar^2}$ bestimmt die Form der Bahn, da $\varrho \gtreqless 0$, je nachdem eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel vorliegt.

2. $\vartheta = \frac{p}{r^4}$ ist stets $\geqq 0$. Ist $\vartheta = 0$ ($\omega = \sigma^2$), so ist $p = 0$, und es handelt sich um den singulären Fall einer geradlinigen Bahn.

3. Die Formel (V; 26) für e^2 zeigt, daß bei Kreisbahnen, für die ja, da sie dem elliptischen Typ angehören, $\varrho > 0$ ist, σ und ε beide stets null sind. Daraus folgt, daß diese Invarianten bei schwach exzentrischen Ellipsen während der ganzen Bahnbewegung klein von der Ordnung der Exzentrizität bleiben.

4. (V; 25) lehrt, daß σ für $v = 0, \pi$, also für die Apsiden, ε für $E = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$, also an den Endpunkten der kleinen Achse, verschwindet. Es ist $\sigma \gtrless 0$, je nachdem sich der Himmelskörper auf der dem Perihel folgenden oder auf der dem Perihel vorangehenden Bahnhälfte befindet. Es ist ferner, wenn die Bahn elliptisch ist, $\varepsilon > 0$ auf der sonnennahen, $\varepsilon < 0$ auf der sonnenfernen Hälfte der Bahn. Für Parabeln und Hyperbeln ist ε stets positiv.

Wegen der großen Bedeutung, die den lokalen Invarianten in den Ausführungen der folgenden Abschnitte zukommen wird, seien hier noch einmal die wichtigsten Formeln, die sie betreffen, zusammengestellt:

A. *Fundamentale Invarianten*

$$\mu = \frac{1}{r^3}; \quad \sigma = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r^2} = \frac{\dot{r}}{r}; \quad \omega = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{r^2} = \left(\frac{V}{r}\right)^2. \tag{V; 28}$$

B. *Abgeleitete Invarianten*

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{ar^2} = 2\mu - \omega, \\ \vartheta &= \frac{p}{r^4} = \omega - \sigma^2 = 2\mu - \varrho - \sigma^2, \\ \varepsilon &= \omega - \mu = \mu - \varrho. \end{aligned} \tag{V; 29}$$

C. *Differentialformeln*

$$\begin{aligned} &\dot{\varrho} = -2\varrho\sigma, & &\dot{\omega} = -2\sigma(\mu + \omega), \\ &\dot{\mu} = -3\mu\sigma, \quad (\dot{r} = r\sigma), & &\dot{\varepsilon} = -\sigma(2\omega - \mu) = -\sigma(2\varepsilon + \mu), \\ &\dot{\vartheta} = -4\vartheta\sigma, & &\dot{\sigma} = \varepsilon - 2\sigma^2. \end{aligned} \tag{V; 30}$$

41. *Die Hauptgleichung der Zweikörperbewegung*

Jedes Tripel aus den sechs Invarianten (V; 28, 29)

$$\mu \text{ (bzw. } r), \quad \sigma, \quad \omega \text{ (bzw. } V), \quad \varrho, \quad \vartheta, \quad \varepsilon,$$

für das keine der identischen Beziehungen

$$\varrho = 2\mu - \omega = \mu - \varepsilon; \quad \vartheta = \omega - \sigma^2, \quad \varepsilon = \omega - \mu = \frac{1}{2}(\omega - \varrho)$$

besteht, bildet ein unabhängiges Invariantensystem und genügt drei Differentialgleichungen 1. Ordnung, durch deren Integration die geometrische Form der Bewegung des Hinmelskörpers vollständig beschrieben wird. Daraus folgt, daß jede dieser Invarianten, für sich allein genommen, einer Differentialgleichung 3. Ordnung genügt. So leitet man die Differentialgleichung (III; 20) für den Radiusvektor r in sehr eleganter Weise folgendermaßen ab: Aus

$$\dot{r} = r\sigma$$

folgt durch zweimaliges Differenzieren

$$\ddot{r} = \dot{r}\sigma + r\dot{\sigma}; \quad \dddot{r} = \ddot{r}\sigma + 2\dot{r}\dot{\sigma} + r\ddot{\sigma}.$$

Bedenkt man nun, daß

$$\dot{\sigma} = \varepsilon - 2\sigma^2; \quad \ddot{\sigma} = \dot{\varepsilon} - 4\sigma\dot{\sigma} = \sigma(8\sigma^2 - 6\varepsilon - \mu),$$

so erhält man das System

$$\text{(V; 31)} \qquad \begin{aligned} \dot{r} &= r\sigma, \\ \ddot{r} &= r(\varepsilon - \sigma^2), \\ \dddot{r} &= -r\sigma[3(\varepsilon - \sigma^2) + \mu], \quad \mu = \frac{1}{r^3}, \end{aligned}$$

und eliminiert man hieraus σ und $\varepsilon - \sigma^2$, so folgt

$$\text{(V; 32)} \qquad \dddot{r} + 3\frac{\dot{r}\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{r}}{r^3} = 0,$$

übereinstimmend mit (III; 20), wenn man dort, unserer Gepflogenheit gemäß, $\varkappa = 1$ setzt.

Ähnliche Gleichungen lassen sich auch für die übrigen Invarianten aufstellen. Das gelingt besonders leicht für μ, ϱ, ϑ und σ; für ω und ε sowie für andere invariante Ausdrücke, wie z. B. die Größen F und G in (V; 12) oder für die Geschwindigkeit V, ist das Eliminationsverfahren schwieriger und führt auf algebraische Differentialgleichungen von verwickelter Gestalt, deren Ableitung hier übergangen werden darf, da sie kaum praktischen Nutzen haben.

Die Tatsache allein, daß solche Differentialgleichungen existieren, legt aber den Gedanken nahe, durch Einführung einer neuen Variablen $q(\tau)$ an Stelle der

Zeit τ diese Gleichungen auf eine einfachere und leicht integrable Form zu bringen.

Es sei irgendeine Invariante – nennen wir sie φ – als Funktion der Zeit durch die nach Potenzen der Zeit fortschreitende TAYLORsche Reihe

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0 \tau + \frac{1}{2!} \ddot{\varphi}_0 \tau^2 + \frac{1}{3!} \dddot{\varphi}_0 \tau^3 + \cdots$$

gegeben. Sei ferner $q = q(\tau)$ eine andere unabhängige Variable, und bezeichnen wir die Ableitungen von φ nach q durch φ', φ'', ..., so wird man eine entsprechende Entwicklung

$$\text{(V; 33)} \qquad \varphi(q) = \varphi_0 + \varphi_0' q + \frac{1}{2!} \varphi_0'' q^2 + \frac{1}{3!} \varphi_0''' q^3 + \cdots$$

ansetzen können. Damit q geeignet ist, die Zeit τ zu ersetzen, muß diese Variable, die wir allgemein als „Anomalie" bezeichnen wollen, folgende Eigenschaften besitzen:

1. Es soll q gleichzeitig mit τ verschwinden [$q(0) = 0$]. Diese Eigenschaft ist in der Form der Gleichung (V; 33) bereits berücksichtigt worden, da φ für $q = 0$ denselben Wert annimmt, wie für $\tau = 0$.

2. Es soll q monoton mit τ wachsen [$\dot{q}(\tau) > 0$ für alle τ].

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Forderungen erfüllt sind, ist, daß

$$\text{(V; 34)} \qquad q(\tau) = \int_0^\tau f(\xi)\, d\xi, \quad \text{wo} \quad f(\tau) = \dot{q}(\tau)$$

eine wesentlich positive Funktion der Zeit ist. Es läßt sich dann $q = q(\tau)$ eindeutig umkehren, und man darf schreiben

$$\text{(V; 35)} \qquad d\tau = \frac{dq}{f(q)}; \quad \tau = \int_0^q \frac{d\xi}{f(\xi)}.$$

Wir nennen diese Integralgleichung die *Hauptgleichung* des Problems.

Es sind nun zwei Wege denkbar, um die Invariante φ als Funktion einer Anomalie darzustellen. Der erste besteht darin, daß man nach (V; 34) q als Funktion von τ willkürlich durch Vorgabe irgendeiner wesentlich positiven „Quellfunktion" $f(\tau) = \dot{q}$ definiert. Dann folgt aus der Differentialgleichung 3. Ordnung, der $\varphi(\tau)$ genügt, durch Substitution von

$$\dot{\varphi} = \varphi' \dot{q}; \quad \ddot{\varphi} = \varphi'' \dot{q}^2 + \varphi' \ddot{q}; \quad \dddot{\varphi} = \varphi''' \dot{q}^3 + 3\varphi'' \dot{q}\ddot{q} + \varphi' \dddot{q}$$

eine Differentialgleichung 3. Ordnung nach q, deren Koeffizienten bekannte Funktionen der Zeit sind.

Diese Methode schließt ungezählte Möglichkeiten in sich ein; ihr Nachteil besteht darin, daß man nicht von vornherein übersehen kann, ob die gewählte

Quellfunktion zu einer Vereinfachung der Differentialgleichung und ihrer Integration führt. Man wäre also mehr oder weniger auf Versuche angewiesen. Sie hat dagegen den Vorteil, daß man die zu der gewählten Transformation gehörige Hauptgleichung (V; 35) sofort hinschreiben kann.

Gehen wir z.B. von der für die Invariante $\varphi = r$ bestehenden Differentialgleichung (V; 32) aus und setzen $\dot{q} = \frac{1}{r}$, so ist die Bedingung für die Quellfunktion erfüllt, da $f(\tau) = \frac{1}{r}$ gewiß immer positiv ist. Man erhält dann sukzessive

$$\dot{r} = r'\dot{q} = \frac{r'}{r},$$

$$\ddot{r} = \left(\frac{r''}{r} - \frac{r'^2}{r^2}\right)\dot{q} = \frac{r''}{r^2} - \frac{r'^2}{r^3},$$

$$\dddot{r} = \left(\frac{r'''}{r^2} - 4\frac{r'r''}{r^3} + 3\frac{r'^3}{r^4}\right)\dot{q} = \frac{r'''}{r^3} - 4\frac{r'r''}{r^4} + 3\frac{r'^3}{r^5},$$

und setzt man dies in (V; 32) ein, so folgt nach kurzer Rechnung

$$r''' - \frac{r'r''}{r} + \frac{r'}{r} = r''' + \frac{1 - r''}{r}r' = 0.$$

Da nun

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{1 - r''}{r}\right) = -\frac{1}{r}\left[r''' + \frac{1 - r''}{r}r'\right] = 0, \quad \text{also} \quad \frac{1 - r''}{r} = \alpha^2 = \text{const},$$

so erhält die Differentialgleichung für $r(q)$ die einfache Gestalt

$$r''' + \alpha^2 r' = 0, \tag{V; 36}$$

deren vollständiges Integral

$$\text{(V; 37)} \quad \begin{array}{ll} \text{für } \alpha^2 > 0 \ (\alpha \text{ reell}): & r = a + b\cos\alpha q + c\sin\alpha q, \\ \text{für } \alpha^2 = 0: & r = a + bq + cq^2, \\ \text{für } \alpha^2 = -\beta^2 < 0 \ (\alpha \text{ imaginär}): & r = a + b\,\mathrm{Cof}\,\beta q + c\,\mathrm{Sin}\,\beta q \end{array}$$

lautet. Mit Hilfe der Anomalie q ist demnach r in geschlossener Form darstellbar. Die Hauptgleichung (V; 35) läßt sich in der Gestalt

$$\tau = \int_0^q r(\xi)\,d\xi \tag{V; 38}$$

hinschreiben und führt in jedem der drei Sonderfälle ebenfalls auf geschlossene Ausdrücke, die man durch Integration von (V; 37) unmittelbar erhält.

Der zweite der obenerwähnten Wege zum Übergang auf eine neue unabhängige Variable ist der umgekehrte: Man gibt die Form der Differential-

gleichung 3. Ordnung, der die Invariante $\varphi = \varphi(q)$ genügen soll, vor. Die Quellfunktion $f(\tau)$ ist dann nicht mehr in demselben Maße willkürlich wie vorher, sondern ist, außer der Bedingung $f > 0$, noch der schärferen

$$f(\tau) = \dot{q} = \frac{\dot{\varphi}}{\varphi'} \tag{V; 39}$$

unterworfen. Es leuchtet ein, daß man diese Bedingung, wenn überhaupt, nur dann realisieren kann, wenn von den drei Integralen des Problems schon zwei bekannt sind, also wenn sowohl $\dot{\varphi}$ als auch φ' als Funktionen von φ und zwei Integrationskonstanten ausdrückbar sind. Es sieht also zunächst so aus, als ob dieses Verfahren keinen besonderen Nutzen bringt, da es keine wesentlichen Vorteile für die Integration selbst bietet. Wir werden aber sehen, daß es die sehr erwünschte Möglichkeit eröffnet, die Ergebnisse der Integration in geschlossener Form darzustellen, statt in unendlichen Reihen von der Form (V; 33), deren Konvergenz, soweit sie überhaupt garantiert ist, meist nur in sehr beschränkten Intervallen den Ansprüchen des Praktikers genügt.

Im Zweikörperproblem, dessen Integrale bekannt sind, lassen sich die hier angedeuteten Überlegungen durchführen. Wir können die Form der Quellfunktion nach (V; 39) hinschreiben, denn es ist ja in Abschn. 40 gezeigt worden, daß, wenn φ einem Tripel φ, ψ, χ von unabhängigen Invarianten angehört, $\dot{\varphi}$ als Funktion dieser drei Größen ausgedrückt werden kann. Die bekannten Integrale gestatten dann die Elimination von ψ und χ, so daß $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\varphi)$ bekannt ist. Ebenso ist natürlich auch $\varphi' = \varphi'(\varphi)$ bekannt, da man ja der Differentialgleichung für $\varphi(q)$ jede beliebige integrable Form geben kann.

Fordern wir etwa, daß $\varphi(q)$ der linearen Differentialgleichung 3. Ordnung

$$\varphi''' + \alpha^2 \varphi' = 0 \tag{V; 40}$$

genügen soll, und wählen wir, wie oben, als konkretes Beispiel $\varphi = r$, dann wird die gesuchte Quellfunktion

$$f(\tau) = \frac{\dot{r}}{r'}$$

lauten müssen. Aus der Differentialgleichung (V; 36) erhält man nach zweimaliger Integration, wenn A und B zwei willkürliche Konstanten darstellen,

$$r' = \pm \alpha \sqrt{B^2 - (r - A)^2}.$$

Andererseits folgt aus (V; 20)

$$\dot{r} = \pm r \sqrt{\frac{2}{r^3} - \frac{1}{a r^2} - \frac{p}{r^4}} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{2r - \frac{r^2}{a} - a(1 - e^2)}$$

oder

$$\dot{r} = \pm \frac{1}{r\sqrt{a}} \sqrt{(ae)^2 - (r - a)^2}.$$

Damit erhält die Bedingung (V; 39) die Form

$$f(\tau) = \dot{q} = \frac{1}{\alpha r \sqrt{a}} \sqrt{\frac{(ae)^2 - (r-a)^2}{B^2 - (r-A)^2}} .$$

Über die Konstanten A, B und α kann man noch frei verfügen, und man wird dies in der Weise tun, daß $f(\tau)$ für alle Zeiten wesentlich positiv bleibt. Das ist offenbar der Fall, wenn man

$$A = a, \quad B = ae, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

setzt, und man erhält dann, wie oben,

$$\dot{q} = \frac{1}{r} .$$

Die drei Fälle $\alpha^2 \gtreqless 0$, die eintreten, wenn $\frac{1}{a} \gtreqless 0$ ist, führen auf den elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Bahntyp. Es besteht aber die Möglichkeit, die Integrale (V; 37) – und dasselbe gilt auch für jede andere Invariante $\varphi(q)$ – auf eine andere, vom Bahntyp völlig unabhängige, Form zu bringen.

Die Differentialgleichung (V; 40) besitzt das partikuläre Integral

$$\varphi = \cos \alpha q, \tag{V; 41}$$

aus dem sich durch fortgesetzte Integration über q eine Folge von Hilfsfunktionen (die kurz als c-Funktionen bezeichnet werden mögen)

$$c_\nu = \frac{1}{q^\nu} \int_0^q \cdots \int_0^q \cos \alpha \xi \, (d\xi)^\nu \tag{V; 42}$$

erzeugen läßt. Diese Folge beginnt mit den Funktionen

$$c_0 = \cos \alpha q, \quad c_1 = \frac{\sin \alpha q}{\alpha q}, \quad c_2 = \frac{1 - \cos \alpha q}{(\alpha q)^2}, \quad c_3 = \frac{\alpha q - \sin \alpha q}{(\alpha q)^3}, \ldots,$$

auf die wir bereits früher – siehe (IV; 34, 67) – gestoßen sind, und die sich in Form der stets konvergenten Potenzreihen

$$c_\nu[(\alpha q)^2] = \frac{1}{\nu!} - \frac{(\alpha q)^2}{(\nu+2)!} + \frac{(\alpha q)^4}{(\nu+4)!} - \cdots \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{V; 43}$$

schreiben lassen. Sie hängen nur von dem auch für imaginäres α immer reellen Argument $(\alpha q)^2$ ab und beschränken sich für $\alpha = 0$ auf ihre von null verschie-

denen konstanten Glieder. Aus der Definition (V; 42) bzw. den Reihen (V; 43) folgt unmittelbar die Gültigkeit der Rekursionsformel

(V; 44) $$c_\nu + (\alpha q)^2 c_{\nu+2} = \frac{1}{\nu!}$$

sowie der Differentialformel

(V; 45) $$\frac{d}{dq}(c_{\nu+1} q^{\nu+1}) = c_\nu q^\nu .$$

Setzen wir nun für die Invariante $\varphi(q)$ die TAYLORsche Entwicklung (V; 33) an und eliminieren die Größen $\frac{1}{\nu!}$ durch (V; 44), so entsteht die Reihe

$$\varphi(q) = \varphi_0[c_0 + (\alpha q)^2 c_2] + \varphi_0'[c_1 + (\alpha q)^2 c_3]\, q + \varphi_0''[c_2 + (\alpha q)^2 c_4]\, q^2 + \cdots$$

oder, wenn wir erneut nach Potenzen von q ordnen,

$$\varphi(q) = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_0' q + c_2(\varphi_0'' + \alpha^2\varphi_0)\, q^2 + c_3(\varphi_0''' + \alpha^2\varphi_0')\, q^3 + \cdots .$$

Diese Reihe bricht aber nach dem Gliede 2. Ordnung ab, da wegen (V; 40) die Koeffizienten von der 3. Ordnung ab sämtlich verschwinden. Der geschlossene Ausdruck

(V; 46) $$\varphi(q) = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_0' q + c_2(\varphi_0'' + \alpha^2\varphi_0)\, q^2 = \varphi_0 + c_1\varphi_0' q + c_2\varphi_0'' q^2,$$

da nach (V; 44) $c_0 + (\alpha q)^2 c_2 = 1$, stellt also das vollständige Integral von (V; 40) mit den Konstanten φ_0, φ_0', φ_0'' dar.

Für $\varphi = r$ ergibt diese Formel

$$r(q) = r_0 + c_1 r_0' q + c_2 r_0'' q^2,$$

wobei die c-Funktionen mit dem Argument $\lambda^2 = (\alpha q)^2 = \frac{q^2}{a}$ aus Tafeln (siehe Anhang B) entnommen werden können. Es ist ferner, da $\dot{q} = \frac{1}{r}$,

(V; 47) $$r' = \frac{\dot{r}}{\dot{q}} = r\dot{r} = r^2\sigma, \qquad r'' = \frac{1}{\dot{q}}(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) = r^3\varepsilon$$

nach (V; 31) und somit, wenn r_0, σ_0, ε_0 die Werte der Invarianten für $\tau = q = 0$ bedeuten,

(V; 48) $$r(q) = r_0\,[1 + c_1\sigma_0\,(r_0 q) + c_2\varepsilon_0\,(r_0 q)^2]; \quad c_\nu = c_\nu[\varrho_0\,(r_0 q)^2] .$$

Die Form dieser geschlossenen Formel ist vom Typus der Bewegung ganz unabhängig, da dieser sich nur in dem Vorzeichen von ϱ_0 äußert, also in dem Vor-

zeichen des Arguments der c-Funktionen, die für alle reellen Argumente reelle Werte annehmen.

Die zugehörige „Hauptgleichung", die den Zusammenhang zwischen q und τ vermittelt, ergibt sich nach (V; 38) in der Form

(V; 49) $$\tau = \int_0^q r(\xi)\, d\xi = r_0 q\,[1 + c_2 \sigma_0\,(r_0 q) + c_3 \varepsilon_0\,(r_0 q)^2],$$

wenn man berücksichtigt, daß nach (V; 45)

$$\int_0^q c_\nu q^\nu\, dq = c_{\nu+1} q^{\nu+1}.$$

Es empfiehlt sich noch, statt q die Variable

(V; 50) $$z = \frac{r_0 q}{\tau}$$

einzuführen. Die Gleichungen (V; 49) und (V; 48) erhalten dann die Gestalt

(V; 51) $$\boxed{1 = z + c_2 \eta_0 z^2 + c_3 \zeta_0 z^3}$$

(V; 52) $$r = r_0\,[1 + c_1 \eta_0 z + c_2 \zeta_0 z^2]$$

mit

$$c_\nu = c_\nu(\chi_0 z^2),$$

wenn man zur Abkürzung

(V; 53) $$\xi_0 = \mu_0 \tau^2, \quad \eta_0 = \sigma_0 \tau, \quad \zeta_0 = \varepsilon_0 \tau^2, \quad \chi_0 = \varrho_0 \tau^2$$

setzt. (Die Größe $\xi = \mu \tau^2$, die später oft benutzt werden wird, sei hier gleichfalls schon definiert.)

Die Gleichungen (V; 51, 52) lassen sich in einer noch etwas symmetrischeren Form schreiben, wenn man wegen $\varepsilon = \mu - \varrho$

$$\zeta = \xi - \chi$$

setzt. Es ist dann

$$1 = z\,(1 - c_3 \chi_0 z^2) + c_2 \eta_0 z^2 + c_3 \xi_0 z^3,$$

$$r = r_0[(1 - c_2 \chi_0 z^2) + c_1 \eta_0 z + c_2 \xi_0 z^2]$$

oder, wenn man (V; 44) berücksichtigt,

(V; 54) $$\boxed{1 = c_1 z + c_2 \eta_0 z^2 + c_3 \xi_0 z^3},$$

(V; 55) $$r = r_0[c_0 + c_1 \eta_0 z + c_2 \xi_0 z^2].$$

Die Hauptgleichung (V; 51) bzw. (V; 54) bildet den Kern einer Theorie der Zweikörperbewegung, deren Formalismus die lästigen Fallunterscheidungen nicht enthält, die in der klassischen Theorie, insbesondere in der Ephemeridenrechnung, ständig beachtet werden müssen. Sie ist nicht nur unabhängig vom Bahntyp, sondern besitzt noch weitere bemerkenswerte Eigenschaften: Sie ist *dimensionslos*, und ihre Transzendenz ist schwach ausgeprägt, da die c-Funktionen (für nicht zu große Zwischenzeiten) nur schwach von z abhängen. Die Methoden, die Hauptgleichung nach z aufzulösen, werden im Abschn. 43 beschrieben werden. Mit Hilfe dieser Größe z, die von der Zwischenzeit $\tau = k(t - t_0)$ und den lokalen Invarianten zur Epoche t_0 abhängt, wird man, ebenso wie dies oben für r gezeigt worden ist, die Werte aller Invarianten für beliebige Zwischenzeiten bestimmen können, einschließlich der Funktionen F und G und ihrer Ableitungen, die nach (V; 12) die Entwicklung der rechtwinkligen Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten des Himmelskörpers nach τ ermöglichen. Der Beweis hierfür wird im nächsten Abschnitt erbracht werden.

42. *Die lokalen Invarianten als Funktionen der Lösung der Hauptgleichung*

Differenziert man (V; 48) zweimal nach q, so erhält man wegen (V; 45, 44)

$$r' = r_0(c_0\sigma_0 r_0 + c_1\varepsilon_0 r_0^2 q) = r_0^2[\sigma_0 + c_1\varepsilon_0 r_0 q - c_2\sigma_0\varrho_0 (r_0 q)^2],$$

$$r'' = r_0^2(c_0\varepsilon_0 r_0 - c_1\sigma_0\varrho_0 r_0^2 q) = r_0^3[\varepsilon_0 - c_1\sigma_0\varrho_0 r_0 q - c_2\varepsilon_0\varrho_0 (r_0 q)^2].$$

Setzt man wieder, nach (V; 50), $r_0 q = z\tau$, so ergibt sich

$$\text{(V; 56)}\quad \begin{aligned} r' &= r_0^2(c_0\sigma_0 + c_1\varepsilon_0\tau z) = r_0^2[\sigma_0 + c_1\varepsilon_0\tau z - c_2\sigma_0\varrho_0 (\tau z)^2],\\ r'' &= r_0^3(c_0\varepsilon_0 - c_1\sigma_0\varrho_0\tau z) = r_0^3[\varepsilon_0 - c_1\sigma_0\varrho_0\tau z - c_2\varepsilon_0\varrho_0 (\tau z)^2]. \end{aligned}$$

Andererseits ist nach (V; 47)

$$\sigma = \frac{r'}{r^2}, \quad \varepsilon = \frac{r''}{r^3},$$

und da nach (V; 52, 53)

$$r = r_0\varDelta \quad \text{mit} \quad \varDelta = 1 + c_1\sigma_0\tau z + c_2\varepsilon_0\tau^2 z^2,$$

so folgt

$$\text{(V; 57)}\quad \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{\varDelta^2}(c_0\sigma_0 + c_1\varepsilon_0\tau z) = \frac{1}{\varDelta^2}(\sigma_0 + c_1\varepsilon_0\tau z - c_2\sigma_0\varrho_0\tau^2 z^2),\\ \varepsilon &= \frac{1}{\varDelta^3}(c_0\varepsilon_0 - c_1\sigma_0\varrho_0 z\tau) = \frac{1}{\varDelta^3}[\varepsilon_0 - \varrho_0(\varDelta - 1)]. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\mu = \frac{1}{r^3}, \quad \mu_0 = \frac{1}{r_0^3}, \quad \text{also} \quad \mu = \frac{\mu_0}{\Delta^3},$$

(V; 58)
$$\varrho = \frac{1}{r^2 a}, \quad \varrho_0 = \frac{1}{r_0^2 a}, \quad \text{also} \quad \varrho = \frac{\varrho_0}{\Delta^2},$$

$$\vartheta = \frac{p}{r^4}, \quad \vartheta_0 = \frac{p}{r_0^4}, \quad \text{also} \quad \vartheta = \frac{\vartheta_0}{\Delta^4},$$

und schließlich

(V; 59)
$$\omega = \varepsilon + \mu = \frac{1}{\Delta^3}[\omega_0 - \varrho_0(\Delta - 1)].$$

Damit sind alle Invarianten als Funktionen von z bekannt, und führt man noch die Ausdrücke (V; 53) ein, so erhält man

$$\Delta = 1 + c_1\eta_0 z + c_2\zeta_0 z^2,$$

$$\eta = \sigma\tau = \frac{1}{\Delta^2}(c_0\eta_0 + c_1\zeta_0 z) = \frac{1}{\Delta^2}(\eta_0 + c_1\zeta_0 z - c_2\eta_0\chi_0 z^2),$$

(V; 60)
$$\zeta = \varepsilon\tau^2 = \frac{1}{\Delta^3}[\zeta_0 - \chi_0(\Delta - 1)],$$

$$\xi = \mu\tau^2 = \frac{1}{\Delta^3}\xi_0, \quad \vartheta = \frac{1}{\Delta^4}\vartheta_0,$$

$$\chi = \varrho\tau^2 = \frac{1}{\Delta^2}\chi_0, \quad \omega = \frac{1}{\Delta^3}[\omega_0 - \varrho_0(\Delta - 1)].$$

Es bleibt nun noch die Aufgabe zu lösen, auch für die Größen F und G sowie deren Ableitungen nach der Zeit entsprechende Formeln abzuleiten. Nach (V; 12) ist

(V; 61)
$$\mathfrak{p}(\tau) = \mathfrak{p}_0 F + \dot{\mathfrak{p}}_0 G,$$
$$\dot{\mathfrak{p}}(\tau) = \mathfrak{p}_0 \dot{F} + \dot{\mathfrak{p}}_0 \dot{G},$$
$$\ddot{\mathfrak{p}}(\tau) = \mathfrak{p}_0 \ddot{F} + \dot{\mathfrak{p}}_0 \ddot{G} \quad \text{usw.}$$

Diese Formeln bedeuten nichts anderes, als daß man die Vektoren des Ortes, der Geschwindigkeit, der Beschleunigung usw. und damit deren Koordinaten im gegebenen rechtwinkligen Koordinatensystem kennt, wenn man F, G und die Ableitungen dieser Größen als Funktionen der Zeit bzw. von z und den Größen (V; 53) kennt. Sie bedeuten ferner eine Zerlegung dieser Vektoren in ihre Komponenten bezüglich des konstanten Vektorenpaars $\mathfrak{p}_0$, $\dot{\mathfrak{p}}_0$. Diese beiden Vektoren definieren ein im allgemeinen schiefwinkliges Koordinatensystem in der Bahnebene: Die Größen $r_0 F$ und $V_0 G$, denen F und G proportional sind, stellen die schiefwinkligen Koordinaten des Himmelskörpers in diesem System dar.

Führen wir (V; 61) ein, so lauten die Bewegungsgleichungen (V; 4) in vektorieller Form

$$\ddot{\mathfrak{p}} + \mu\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0(\ddot{F} + \mu F) + \dot{\mathfrak{p}}_0(\ddot{G} + \mu G) = 0.$$

Da $\mathfrak{p}_0$ und $\dot{\mathfrak{p}}_0$, wenn wir den singulären Fall der geradlinigen Bewegung ausschließen, stets von null verschieden und nicht kollinear sind, ist diese Differentialgleichung nur dann identisch erfüllt, wenn

(V; 62)
$$\ddot{F} + \mu F = 0,$$
$$\ddot{G} + \mu G = 0.$$

Aus (V; 61) und (V; 62) liest man unmittelbar ab, daß für die Epoche $\tau = 0$

(V; 63)
$$F_0 = 1, \quad \dot{F}_0 = 0, \quad \ddot{F}_0 = -\mu_0,$$
$$G_0 = 0, \quad \dot{G}_0 = 1, \quad \ddot{G}_0 = 0$$

gilt. Eliminiert man μ aus (V; 62), so folgt

$$F\ddot{G} - G\ddot{F} = 0,$$

eine Differentialgleichung, deren Integral

(V; 64) $$F\dot{G} - G\dot{F} = 1$$

lautet – der numerische Wert der Integrationskonstanten ergibt sich, wenn man links die Epochenwerte (V; 63) einsetzt. Diese Gleichung stellt den *Flächensatz* in den Koordinaten F und G dar.

Führt man nun statt der Zwischenzeit τ die Anomalie q als unabhängige Variable ein und bedenkt, daß $\dot{q} = \frac{1}{r}$, so beweist man leicht, daß Δ, F, G ebenso wie r einer Differentialgleichung 3. Ordnung nach q von der Form (V; 40) genügen, daß also

(V; 65) $$\Delta''' + \alpha^2\Delta' = F''' + \alpha^2 F' = G''' + \alpha^2 G' = 0$$

mit

$$\alpha^2 = r^2\varrho = r_0^2\varrho_0 = \frac{1}{a}$$

gilt. Für Δ ist das selbstverständlich, da $\Delta = \frac{r}{r_0}$ proportional r ist. Für F und G zeigt man das folgendermaßen: Setzt man

$$\dot{F} = F'\dot{q} = \frac{F'}{r}; \quad \ddot{F} = \left(\frac{F''}{r} - \frac{F'r'}{r^2}\right)\dot{q} = \frac{F''}{r^2} - \frac{F'\sigma}{r},$$

so erhält man aus (V; 62)

(V; 66) $$rF'' - r^2\sigma F' + F = 0.$$

Differenziert man diese Gleichung noch einmal nach q, so findet man

$$rF''' + r'F'' - 2rr'\sigma F' - r^2\sigma' F' - r^2\sigma F'' + F' = 0$$

oder, da $r' = r^2\sigma$, $\sigma' = r\dot{\sigma} = r(\varepsilon - 2\sigma^2)$, $1 = r^3\mu$,

$$rF''' + r^3(\mu - \varepsilon)F' = r[F''' + r^2\varrho F'] = 0.$$

Für G gilt dasselbe. Damit sind die Gleichungen (V; 65) bewiesen.

Aus der Gültigkeit von (V; 65) folgt aber, daß man Δ, F und G, ebenso wie r, mit Hilfe der c-Funktionen in geschlossener Form nach (V; 46) darstellen kann:

$$\text{(V; 67)} \qquad \begin{aligned} \Delta(q) &= \Delta_0 + c_1\Delta_0' q + c_2\Delta_0'' q^2, \\ F(q) &= F_0 + c_1 F_0' q + c_2 F_0'' q^2, \\ G(q) &= G_0 + c_1 G_0' q + c_2 G_0'' q^2. \end{aligned}$$

Die Anfangswerte von

$$\Delta = \frac{r}{r_0}, \quad \Delta' = \frac{r'}{r_0}, \quad \Delta'' = \frac{r''}{r_0}$$

ergeben nach (V; 47)

$$\text{(V; 68)} \qquad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_0' = r_0\sigma_0, \quad \Delta_0'' = r_0^2\varepsilon_0.$$

Die Anfangswerte von $F, G, \ldots F'', G''$ lassen sich nach (V; 63) berechnen, denn es ist

$$F' = r\dot{F}, \quad F'' = r^2(\ddot{F} + \sigma\dot{F}); \quad G' = r\dot{G}, \quad G'' = r^2(\ddot{G} + \sigma\dot{G}),$$

also für $\tau = 0$

$$\text{(V; 69)} \qquad \begin{aligned} F_0 &= 1, \quad F_0' = 0, \quad F_0'' = -r_0^2\mu_0, \\ G_0 &= 0, \quad G_0' = r_0, \quad G_0'' = r_0^2\sigma_0. \end{aligned}$$

Damit erhält man aus (V; 67)

$$\begin{aligned} F(q) &= 1 - c_2\mu_0(r_0 q)^2, \\ G(q) &= c_1 r_0 q + c_2\sigma_0(r_0 q)^2 = r_0 q[1 + c_2\sigma_0 r_0 q - c_3\varrho_0(r_0 q)^2] \end{aligned}$$

und, wenn man nach q differenziert und (V; 45) berücksichtigt,

$$\begin{aligned} F'(q) &= -c_1\mu_0 r_0^2 q, \\ G'(q) &= c_0 r_0 + c_1\sigma_0 r_0^2 q = r_0[1 + c_1\sigma_0 r_0 q - c_2\varrho_0(r_0 q)^2]. \end{aligned}$$

Setzt man nun nach (V; 49) und (V; 48)

$$\begin{aligned} r_0 q + c_2\sigma_0(r_0 q)^2 &= \tau - c_3\varepsilon_0(r_0 q)^3, \\ r_0 + c_1\sigma_0 r_0^2 q &= r - c_2\varepsilon_0 r_0^3 q^2, \end{aligned}$$

so ergibt sich wegen $\varrho_0 + \varepsilon_0 = \mu_0$

$$G(q) = \tau - c_3\mu_0(r_0 q)^3; \quad G'(q) = r - c_2\mu_0 r_0^3 q^2.$$

Führt man, wie früher, $r_0 q = z\tau$ und die Ausdrücke (V; 53) ein und bedenkt man, daß

$$\dot F = \frac{F'}{r} = \frac{F'}{r_0 \varDelta}; \quad \dot G = \frac{G'}{r} = \frac{G'}{r_0 \varDelta},$$

so entstehen schließlich die einfachen Formeln

$$F = 1 - c_2 \xi_0 z^2, \quad G = \tau[1 - c_3 \xi_0 z^3], \quad [c_\nu = c_\nu(\chi_0 z^2)] \tag{V; 70}$$

und

$$\dot F = -c_1 \frac{\mu_0 z \tau}{\varDelta}; \quad \dot G = 1 - c_2 \frac{\xi_0 z^2}{\varDelta}.$$

Setzt man hierin nach (V; 70) $c_2 \xi_0 z^2 = 1 - F$ und nach (V; 54)

$$c_1 z = 1 - c_2 \eta_0 z^2 - c_3 \xi_0 z^3 = \frac{G}{\tau} - c_2 \sigma_0 \tau z^2,$$

so lassen sich die Ableitungen von F und G in der Form

$$\dot F = \frac{1}{\varDelta}[\sigma_0(1 - F) - \mu_0 G], \quad \dot G = 1 - \frac{1}{\varDelta}(1 - F) \tag{V; 71}$$

schreiben.

Mit Hilfe der von der Bahnform unabhängigen Ausdrücke (V; 70, 71) kann man nach (V; 61) Ort und Geschwindigkeit des Himmelskörpers in jedem beliebigen Koordinatensystem aus den lokalen Elementen und Invarianten der Ausgangsepoche und der Zwischenzeit τ berechnen, wenn man zuvor die Lösung der Hauptgleichung (V; 51) gefunden hat. Wenn x für eine der drei rechtwinkligen Koordinaten des Himmelskörpers steht, schreibt man zweckmäßig

$$x - x_0 = -x_0(1 - F) + \dot x_0 G, \quad \dot x - \dot x_0 = x_0 \dot F - \dot x_0(1 - \dot G), \tag{V; 72}$$

wobei

$$1 - F = c_2 \xi_0 z^2; \quad 1 - \dot G = \frac{1 - F}{\varDelta}$$

bei kleinen Zwischenzeiten kleine Größen 2. Ordnung darstellen, während $\dot F$ und G klein von der 1. Ordnung sind. Man wird also die Differenzen $x - x_0$, $\dot x - \dot x_0, \ldots$ genauer berechnen können, als dies für die Koordinaten $x, \dot x, \ldots$

selbst gefordert wird, und auf diese Weise bei der Berechnung einer Ephemeride mit kleinen Intervallen (Abschn. 46) Abrundungsfehler vermeiden.

Sind F und G bekannt, so kann man mit ihrer Hilfe auch einige der Formeln (V; 60) auf eine andere Form bringen. Wenn wir den parabolischen Fall $\varrho_0 = 0$, $\alpha = 0$ vorläufig ausschließen, so lauten die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen (V; 65)

$$\begin{aligned} \Delta &= \alpha_0 + \beta_0 \cos \alpha q + \gamma_0 \sin \alpha q, \\ F &= \alpha_1 + \beta_1 \cos \alpha q + \gamma_1 \sin \alpha q, \\ G &= \alpha_2 + \beta_2 \cos \alpha q + \gamma_2 \sin \alpha q, \end{aligned} \tag{V; 73}$$

wo $\alpha_0, \ldots, \gamma_2$ neun Integrationskonstanten sind. Wenn $\varrho_0 < 0$, also $\alpha = r_0 \sqrt{\varrho_0}$ rein imaginär ist, werden auch $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ rein imaginäre Werte annehmen. Seien nun x und y zwei noch unbestimmte Faktoren, so ist

$$\begin{aligned} \Delta + Fx + Gy &= \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y) + (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y) \cos \alpha q + \\ &\quad + (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y) \sin \alpha q, \end{aligned} \tag{V; 74}$$

und man kann nun über x und y so verfügen, daß dieser Ausdruck konstant wird. Das ist offenbar der Fall, wenn die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y &= 0, \\ \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind. Nun lassen sich die Konstanten $\alpha_0, \ldots, \gamma_2$ aus den Anfangswerten von Δ, F und G bestimmen. Aus

$$\begin{aligned} \Delta &= \alpha_0 + \beta_0 \cos \alpha q + \gamma_0 \sin \alpha q, \\ \Delta' &= \alpha [\gamma_0 \cos \alpha q - \beta_0 \sin \alpha q], \\ \Delta'' &= -\alpha^2 [\beta_0 \cos \alpha q + \gamma_0 \sin \alpha q] \end{aligned}$$

folgt, wenn $q = 0$ gesetzt wird,

$$\Delta_0 = \alpha_0 + \beta_0; \quad \Delta_0' = \alpha \gamma_0; \quad \Delta_0'' = -\alpha^2 \beta_0.$$

Entsprechendes gilt auch für F und G. Es ist daher

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \Delta_0 + \frac{1}{\alpha^2} \Delta_0'', & \beta_0 &= -\frac{1}{\alpha^2} \Delta_0'', & \gamma_0 &= \frac{1}{\alpha} \Delta_0', \\ \alpha_1 &= F_0 + \frac{1}{\alpha^2} F_0'', & \beta_1 &= -\frac{1}{\alpha^2} F_0'', & \gamma_1 &= \frac{1}{\alpha} F_0', \\ \alpha_2 &= G_0 + \frac{1}{\alpha^2} G_0'', & \beta_2 &= -\frac{1}{\alpha^2} G_0'', & \gamma_2 &= \frac{1}{\alpha} G_0'. \end{aligned}$$

Benutzt man nun die Anfangswerte (V; 68, 69) und setzt $\alpha^2 = r_0^2 \varrho_0$, so erhält man

$$\alpha_0 = 1 + \frac{\varepsilon_0}{\varrho_0} = \frac{\mu_0}{\varrho_0}, \qquad \beta_0 = -\frac{\varepsilon_0}{\varrho_0}, \quad \gamma_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\varrho_0}},$$

$$\alpha_1 = 1 - \frac{\mu_0}{\varrho_0} = -\frac{\varepsilon_0}{\varrho_0}, \quad \beta_1 = \frac{\mu_0}{\varrho_0}, \qquad \gamma_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_0}{\varrho_0}, \qquad \beta_2 = -\frac{\sigma_0}{\varrho_0}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}$$

und damit

$$\mu_0 x - \sigma_0 y = \varepsilon_0; \quad y = -\sigma_0,$$

d.h.

$$x = \frac{\varepsilon_0 - \sigma_0^2}{\mu_0} = \frac{\vartheta_0}{\mu_0} - 1; \quad y = -\sigma_0.$$

Die Gleichung (V; 74), deren rechte Seite sich mit diesen Werten für x, y auf das konstante Glied beschränkt, erhält dann die Form

$$\Delta + \left(\frac{\vartheta_0}{\mu_0} - 1\right) F - \sigma_0 G = \frac{\vartheta_0}{\mu_0} + \frac{1}{\varrho_0}(2\mu_0 - \varrho_0 - \sigma_0^2 - \vartheta_0)$$

oder, da ja $\vartheta \equiv 2\mu - \varrho - \sigma^2$,

$$\text{(V; 75)} \qquad \boxed{\Delta = F + \sigma_0 G + \frac{\vartheta_0}{\mu_0}(1 - F),}$$

und zwar gilt dies aus Gründen der Stetigkeit auch für den Fall $\varrho_0 = 0$, den wir vorsorglich ausgeschlossen hatten. (V; 75) geht nach leichter Reduktion, wenn man für F und G die Ausdrücke (V; 70) einsetzt, in die erste Gleichung (V; 60) über. Beide Gleichungen gelten auf Grund der dynamischen Beziehungen im Zweikörperproblem. Daneben leitet man aus

$$r^2 = (\mathfrak{p}\mathfrak{p}) = (\mathfrak{p}_0 F + \dot{\mathfrak{p}}_0 G)^2 = (\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_0) F^2 + 2(\mathfrak{p}_0\dot{\mathfrak{p}}_0) FG + (\dot{\mathfrak{p}}_0\dot{\mathfrak{p}}_0) G^2$$

die geometrische Formel

$$\text{(V; 76)} \qquad \boxed{\Delta^2 = F^2 + 2\sigma_0 FG + \omega_0 G^2}$$

ab. Eliminiert man Δ aus (V; 75, 76), so erhält man die quadratische Gleichung

$$\text{(V; 77)} \quad (2\mu_0 - \vartheta_0) F^2 + 2\sigma_0\mu_0 FG + \mu_0^2 G^2 + 2(\vartheta_0 - \mu_0) F - 2\sigma_0\mu_0 G = \vartheta_0,$$

die nichts anderes als die in den schiefwinkligen Koordinaten F und G geschriebene Bahngleichung des Himmelskörpers darstellt.

Aus den letzten beiden Gleichungen (V; 73), die nach Einsetzen der Werte für die Konstanten

$$\varrho_0 F = -\varepsilon_0 + \mu_0 \cos\alpha q,$$

$$\sqrt{\varrho_0}\, G = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\varrho_0}}(1 - \cos\alpha q) + \sin\alpha q$$

lauten, erhält man nach kurzer Rechnung

$$\cos\alpha q = \frac{1}{\mu_0}(\varrho_0 F + \varepsilon_0); \quad \sin\alpha q = \frac{\sqrt{\varrho_0}}{\mu_0}[\mu_0 G - \sigma_0(1 - F)]$$

und damit

$$\Delta' = \frac{r'}{r_0} = \frac{r^2\sigma}{r_0} = r_0 \Delta^2 \sigma = \alpha\,(\gamma_0 \cos\alpha q - \beta_0 \sin\alpha q) =$$

$$= \frac{\alpha}{\mu_0\sqrt{\varrho_0}}[\sigma_0(\varrho_0 + \varepsilon_0)\,F + \mu_0\varepsilon_0 G] = r_0\,[\sigma_0 F + \varepsilon_0 G]$$

und somit für σ die schöne Formel

$$\text{(V; 78)} \qquad \boxed{\sigma = \frac{\sigma_0 F + \varepsilon_0 G}{\Delta^2}}\,.$$

43. *Bedeutung und Auflösung der Hauptgleichung*

Daß die transzendente Hauptgleichung (V; 51) lediglich eine Umschreibung der KEPLERschen Gleichung und ihrer Analoga darstellt, ist leicht einzusehen. Das „Integral der Anomalie“

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2} = \frac{\tau}{\sqrt{p^3}}, \quad [\tau = k(t - t_0)],$$

das in (III; 41) übergeht, wenn für t_0 die Periheldurchgangszeit T und dementsprechend $v_0 = 0$ eingesetzt wird, stellt ja bereits eine für alle Bahntypen gültige Gleichung dar, aus der, wie in Abschn. 22 gezeigt worden ist, die KEPLERsche Gleichung und die ihr entsprechenden Formeln (III; 43) für den parabolischen und (III; 51) für den hyperbolischen Fall abgeleitet werden können. Diese Integralbeziehung nimmt aber, wenn wir

$$\frac{dv}{dq} = \frac{\dot v}{\dot q} = r\dot v = \frac{\sqrt{p}}{r}; \quad 1 + e\cos v = \frac{p}{r}; \quad q_0 = 0$$

setzen, die Form (V; 38)

$$\int_0^q r\,dq = \tau$$

an, aus der durch Ausführung der Integration die Hauptgleichung folgt.

Natürlich kann man die KEPLERsche Gleichung auch direkt in die Hauptgleichung überführen. Schreibt man für die Zeitpunkte t und t_0

$$E - e\sin E = M = k\frac{t - T}{\sqrt{a^3}},$$

$$E_0 - e\sin E_0 = M_0 = k\frac{t_0 - T}{\sqrt{a^3}},$$

so lautet, mit $E - E_0 = \lambda$, die Differenz dieser beiden Gleichungen

$$\lambda - e\,[\sin(E_0 + \lambda) - \sin E_0] = \frac{\tau}{\sqrt{a^3}}$$

oder

$$(1 - e\cos E_0)\sin\lambda + e\sin E_0\,(1 - \cos\lambda) + \lambda - \sin\lambda = \frac{\tau}{\sqrt{a^3}}.$$

Setzt man hierin $\frac{1}{\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt{\varrho_0^3}}{\mu_0}$, nach (V; 25)

$$e\sin E_0 = \frac{\sigma_0\sqrt{\varrho_0}}{\mu_0}, \quad 1 - e\cos E_0 = \frac{\varrho_0}{\mu_0},$$

und führt man ferner die c-Funktionen

$$c_1(\lambda^2) = \frac{\sin\lambda}{\lambda}, \quad c_2(\lambda^2) = \frac{1 - \cos\lambda}{\lambda^2}, \quad c_3(\lambda^2) = \frac{\lambda - \sin\lambda}{\lambda^3}$$

ein, so erhält man

$$c_1\frac{\varrho_0}{\mu_0}\lambda + c_2\sigma_0\frac{\sqrt{\varrho_0}}{\mu_0}\lambda^2 + c_3\lambda^3 = \frac{\tau\sqrt{\varrho_0^3}}{\mu_0}$$

oder, wenn man durch die rechte Seite dividiert und

$$\lambda = z\tau\sqrt{\varrho_0}$$

setzt,

$$c_1 z + c_2\sigma_0\tau z^2 + c_3\mu_0\tau^2 z^2 = 1; \quad c_\nu = c_\nu(\lambda^2) = c_\nu(\varrho_0\tau^2 z^2)$$

bzw., da nach (V; 44) $c_1 = 1 - \lambda^2 c_3 = 1 - c_3\varrho_0\tau^2 z^2$ und da $\mu_0 - \varrho_0 = \varepsilon_0$,

$$z + c_2\sigma_0\tau + c_3\varepsilon_0\tau^2 z^2 = 1.$$

Mit den Bezeichnungen (V; 53) nimmt also die Hauptgleichung die beiden äquivalenten Formen (V; 51, 54)

$$c_1 z + c_2 \eta z^2 + c_3 \xi z^3 = 1,$$
$$z + c_2 \eta z^2 + c_3 \zeta z^3 = 1 \qquad \text{(V; 79)}$$

an. Die neue Variable z ist dabei durch

$$z = \frac{\lambda}{\tau \sqrt{\varrho_0}} \qquad \text{(V; 80)}$$

definiert. Setzt man wieder $E - E_0 = \lambda$ und für die Differenz der mittleren Anomalien $M - M_0 = n\tau = \tau \frac{\sqrt{\varrho_0^3}}{\mu_0}$, so ist

$$\dot{M} = \dot{M}_0 = n = \frac{\varrho_0 \sqrt{\varrho_0}}{\mu_0} \text{ und nach (V; 27) } \dot{E}_0 = \sqrt{\varrho_0}\,,$$

also

$$z = \frac{E - E_0}{M - M_0} : \frac{\dot{E}_0}{\dot{M}_0}. \qquad \text{(V; 81)}$$

In der elliptischen Bewegung bedeutet also z das Verhältnis zwischen den Quotienten aus den Differenzen- und Differentialquotienten der exzentrischen und der mittleren Anomalie, wobei die Differenzenquotienten sich auf das zu überbrückende Zeitintervall $t - t_0$, die Differentialquotienten auf die Epoche t_0 beziehen. Hieraus folgt, daß $z \to 1$, wenn $\tau \to 0$, was man auch aus (V; 79) ablesen kann, da η_0 und ζ_0 proportional τ bzw. τ^2 sind. Ferner folgt aus (V; 81), daß z stets reell ist, da E und M, $\dot{E}$ und $\dot{M}$ für hyperbolische Bahnen gleichzeitig imaginär werden. Da die beiden Anomalien ferner im gleichen Sinne wachsen, ist z immer positiv. Eine andere, sehr anschauliche, geometrische Deutung der Größe z liest man aus (V; 50) ab. Da nämlich $\dot{q} = 1/r$, also $q = \int \frac{d\tau}{r}$, so folgt

$$z = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{r_0}{r}\, d\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d\tau}{\Delta}, \qquad \text{(V; 81a)}$$

d.h., z ist der über das Zeitintervall $[0,\tau]$ erstreckte Mittelwert von $\frac{r_0}{r} = \Delta^{-1}$.

Für Parabelbahnen nimmt (V; 81) die unbestimmte Form 0:0 an. Daß dieser Ausdruck aber für $e \to 1$, $\varrho \to 0$ einem wohldefinierten Grenzwert zustrebt, folgt aus (V; 79) selbst, da für $\varrho = 0$ die Funktionen c_2 und c_3 in ihre konstanten Glieder $\frac{1}{2!}$ bzw. $\frac{1}{3!}$ übergehen und die algebraische Gleichung dritten Grades

$$\boxed{z + \frac{1}{2}\eta_0 z^2 + \frac{1}{6}\zeta_0 z^3 = 1; \quad (\zeta_0 \equiv \xi_0)} \qquad \text{(V; 82)}$$

sicher eine reelle Lösung besitzt. Da $\varepsilon = \mu - \varrho$, also für Parabeln $\varepsilon = \mu$ und daher $\zeta = \xi$, kann in dieser Formel auch ξ_0 statt ζ_0 gesetzt werden.

Daß die kubische Gleichung (V; 82) aus der kubischen Gleichung (III; 43) folgt, läßt sich ebenfalls leicht zeigen. Schreibt man (III; 43) für die Zeitpunkte t und t_0 auf:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2} = k\frac{t-T}{\sqrt{2q^3}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{v_0}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v_0}{2} = k\frac{t_0-T}{\sqrt{2q^3}},$$

so erhält man als Differenz

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} - \operatorname{tg}\frac{v_0}{2} + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}^3\frac{v}{2} - \operatorname{tg}^3\frac{v_0}{2}\right) = \frac{\tau}{\sqrt{2q^3}}$$

oder

$$\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2} - \operatorname{tg}\frac{v_0}{2}\right)\left[1 + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}^2\frac{v}{2} + \operatorname{tg}\frac{v}{2}\operatorname{tg}\frac{v_0}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{v_0}{2}\right)\right] = \frac{\tau}{\sqrt{2q^3}}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$A = \operatorname{tg}\frac{v}{2} - \operatorname{tg}\frac{v_0}{2}, \quad B = 1 + \operatorname{tg}\frac{v}{2}\operatorname{tg}\frac{v_0}{2},$$

so gilt demnach

$$A\left(B + \frac{1}{3}A^2\right) = \frac{\tau}{\sqrt{2q^3}}. \tag{V; 83}$$

Nun ist nach (V; 26)

$$\operatorname{tg} v = \frac{\sigma\sqrt{\vartheta}}{\vartheta - \mu} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{v}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{v}{2}}, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg}^2\frac{v}{2} + 2\frac{\vartheta-\mu}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\operatorname{tg}\frac{v}{2} = 1.$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung lautet

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\vartheta}}\left[\mu - \vartheta \pm \sqrt{\mu^2 - \vartheta\,(2\mu - \vartheta - \sigma^2)}\right].$$

Da nach (V; 29) $2\mu - \vartheta - \sigma^2 = \varrho = 0$, so erhält man

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{\mu - \vartheta \pm \mu}{\sigma\sqrt{\vartheta}},$$

also, je nach Wahl des Vorzeichens

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{2\mu - \vartheta}{\sigma\sqrt{\vartheta}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\vartheta}} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = -\frac{\sqrt{\vartheta}}{\sigma}.$$

Da aber nach Definition σ mit v (im Perihel) gleichzeitig verschwindet, so ist die erste dieser beiden Lösungen zu wählen. Es ist demnach

$$\text{(V; 84)} \qquad \operatorname{tg}\frac{v_0}{2} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\vartheta_0}}, \quad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{\vartheta}} = \frac{\sigma_0 + \mu_0 \tau z}{\sqrt{\vartheta_0}},$$

wenn man bedenkt, daß für Parabeln $\varepsilon = \mu - \varrho = \mu$, $c_0 = c_1 = 1$, also nach (V; 57, 58)

$$\Delta^2 \sigma = \sigma_0 + \mu_0 \tau z, \quad \Delta^2 \sqrt{\vartheta} = \sqrt{\vartheta_0}.$$

Mit (V; 84) erhält man für die Größen A und B

$$A = \frac{\mu_0 z \tau}{\sqrt{\vartheta_0}}; \quad B = 1 + \frac{\sigma_0}{\vartheta_0}(\sigma_0 + \mu_0 z \tau) = \frac{\mu_0}{\vartheta_0}(2 + \sigma_0 z \tau),$$

da ja $\sigma_0^2 = 2\mu_0 - \vartheta_0$. Die Gleichung (V; 83) erhält also die Form

$$\frac{\mu_0 z \tau}{\sqrt{\vartheta_0}}\left[\frac{\mu_0}{\vartheta_0}(2 + \sigma_0 z \tau) + \frac{1}{3}\frac{\mu_0^2 z^2 \tau^2}{\vartheta_0}\right] = \frac{\tau}{\sqrt{2q^3}}$$

oder

$$\text{(V; 85)} \qquad z + \frac{1}{2}\eta_0 z^2 + \frac{1}{6}\xi z^3 = \frac{1}{\mu_0^2}\sqrt{\left(\frac{\vartheta_0}{2q}\right)^3}.$$

Dieser Ausdruck ist aber mit (V; 82) identisch, da für die Periheldistanz

$$q = r_0 \cos^2\frac{v_0}{2} = \frac{r_0}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{v_0}{2}} = \frac{r_0}{1 + \frac{\sigma_0^2}{\vartheta_0}} = \frac{r_0 \vartheta_0}{\vartheta_0 + \sigma_0^2} = \frac{r_0 \vartheta_0}{2\mu_0}$$

gilt. Es ist also

$$\left(\frac{\vartheta_0}{2q}\right)^3 = \left(\frac{\mu_0}{r_0}\right)^3 = \mu_0^4$$

und demnach die rechte Seite von (V; 85) gleich der Einheit.

Liegt die Epoche im Perihel, so folgt aus (V; 84) wegen $\sigma_0 = 0$, also wegen $\vartheta_0 = 2\mu_0 = \frac{2}{q^3}$,

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{\mu_0 \tau z}{\sqrt{\vartheta_0}} = \frac{z\tau}{\sqrt{2q^3}}.$$

Setzt man dies in (III; 43) ein, so folgt ohne weitere Rechnung

$$\text{(V; 86)} \qquad \boxed{z + \frac{1}{6}\xi_0 z^3 = 1 \quad (\xi_0 \equiv \zeta_0)}$$

als die parabolische Form der Hauptgleichung für das Perihel als Ausgangsort.

Die im allgemeinen transzendente Hauptgleichung wird in zwei Sonderfällen *rational:*

1. für *Kreisbahnen:* Wegen $\sigma = \varepsilon = 0$ wird auch $\eta = \zeta = 0$, und die Hauptgleichung nimmt die triviale Form

$$z = 1$$

an.

2. für *Parabelbahnen:* Wegen $\varrho = \chi = 0$ werden die c-Funktionen konstant, und es ergibt sich, wie schon erwähnt, die kubische Gleichung (V; 82).

In allen anderen Fällen muß man die Hauptgleichung durch Iteration lösen. Bei schwach exzentrischen Bahnen, im Falle kleiner Zwischenzeiten auch bei Bahnen beliebigen Typs, wird man die Rechnung stets mit der Ausgangsnäherung $z_0 = 1$ beginnen können. Bei parabelnahen Bahnen und größerer Zwischenzeit wird man die Lösung der kubischen Gleichung (V; 82) als Ausgangshypothese vorziehen. Das Iterationsverfahren selbst gestaltet sich sehr einfach, wenn man sich der NEWTONschen Näherungsmethode bedient. Es gilt, die Nullstelle der Funktion

$$\text{(V; 87)} \qquad H(z) = z + c_2\eta_0 z^2 + c_3\zeta_0 z^3 - 1$$

aufzusuchen. Ist z_0 ein Näherungswert der Lösung von $H(z) = 0$, so lautet die TAYLORsche Entwicklung von $H(z)$ um z_0

$$\text{(V; 88)} \qquad H = H_0 + H_0'\delta z + \frac{1}{2!} H_0''(\delta z)^2 + \frac{1}{3!} H_0'''(\delta z)^3 + \cdots,$$

$$\left[H_0' = \left(\frac{dH}{dz}\right)_{z = z_0} \quad \text{usw.}\right],$$

wenn z die strenge Lösung und $\delta z = z - z_0$ ist. Bei der Bildung der Differentialquotienten von H nach z bedenken wir, daß

$$\text{(V; 89)} \qquad \frac{d}{dz}(c_{\nu+1} z^{\nu+1}) = c_\nu z^\nu.$$

Dies folgt aus (V; 45), wenn man $q = z\dfrac{\tau}{r_0}$ setzt und berücksichtigt, daß z hier die einzige Variable ist, also τ als konstanter Parameter auftritt, ebenso wie ja auch η_0 und ζ_0, die τ enthalten, als konstant anzusehen sind. Es ist also

$$H' = \frac{dH}{dz} = 1 + c_1\eta_0 z + c_2\zeta_0 z^2 = \Delta$$

und somit

$$\delta z = -\frac{H_0}{\Delta_0}; \quad z_1 = z_0 + \delta z$$

eine bessere Näherung für z, die wir erhalten, wenn wir in (V; 88) die höheren Potenzen von δz vernachlässigen. Man kann dieses Verfahren wiederholen und wird in praktischen Fällen meist mit ein bis zwei Iterationen auskommen.

Es ist aber auch möglich, die Entwicklung (V; 88) so umzuformen, daß ein strenger und geschlossener Ausdruck entsteht. Differenzieren wir $H(z)$ fortschreitend nach z, so folgt neben $H' = \varDelta$

$$H'' = \varDelta' = c_0\eta_0 + c_1\zeta z = \eta_0(1 - c_2\chi_0 z^2) + \zeta_0 z(1 - c_3\chi_0 z^2) =$$
$$= \eta_0 + \zeta_0 z - \chi_0(H + 1 - z),$$
(V; 90) $$H''' = \varDelta'' = \zeta_0 - \chi_0(H' - 1) = \zeta_0 - \chi_0(\varDelta - 1),$$
$$H^{IV} = \varDelta''' = -\chi_0 H'' = -\chi_0\varDelta',$$

woraus für $\varDelta(z)$ und $H(z)$ die Differentialgleichungen

(V; 91) $$\varDelta''' + \chi_0\varDelta' = 0; \quad H^{IV} + \chi_0 H'' = 0$$

folgen, deren Gültigkeit man übrigens auch direkt aus (V; 65) ableitet, wenn man die Differentialquotienten nach q durch die nach z ersetzt. Es sei nun

$$\gamma_\nu = c_\nu[\chi_0(\delta z)^2];$$

dann gilt, entsprechend (V; 44), die Rekursionsformel

(V; 92) $$\gamma_\nu + \chi_0(\delta z)^2\gamma_{\nu+2} = \frac{1}{\nu!}. \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Benutzt man (V; 92), um die reziproken Fakultäten in (V; 88) zu eliminieren, so erhält man

$$0 = H_0[\gamma_0 + \gamma_2\chi_0(\delta z)^2] + H_0'\delta z[\gamma_1 + \gamma_3\chi_0(\delta z)^2] +$$
$$+ H_0''(\delta z)^2[\gamma_2 + \gamma_4\chi_0(\delta z)^2] + \cdots =$$
$$= \gamma_0 H_0 + \gamma_1 H_0'\delta z + \gamma_2[H_0'' + \chi_0 H_0](\delta z)^2 + \gamma_3[H_0''' + \chi_0 H_0'](\delta z)^3$$

als geschlossenen Ausdruck, da die nachfolgenden Glieder wegen (V; 91) verschwinden. Nach (V; 90) ist aber $H_0' = \varDelta_0 = \varDelta(z_0)$ und

$$H_0'' + \chi_0 H_0 = \eta_0 + \zeta_0 z + \chi_0(z - 1) = \eta_0 - \chi_0 + \xi_0 z_0,$$
$$H_0''' + \chi_0 H_0' = \zeta_0 + \chi_0 = \xi_0,$$

und für δz gilt daher die Gleichung

(V; 93) $$0 = \gamma_0 H_0 + \gamma_1\varDelta_0\delta z + \gamma_2(\eta_0 - \chi_0 + \xi_0 z_0)(\delta z)^2 + \gamma_3\xi_0(\delta z)^3.$$

Ist nun z_0 ein roher Näherungswert für z, so sind $H_0 = H(z_0)$ und δz klein, und man kann mit

(V; 94) $$\delta z_0 = -\frac{\gamma_0 H_0}{\gamma_1\varDelta_0} \approx -\frac{H_0}{\varDelta_0}$$

die Funktionen $\gamma_\nu = c_\nu[\chi_0(\delta z)^2]$ und die Glieder 2. und 3. Ordnung in (V; 93) genau genug bestimmen. Es wird dann

$$\delta z = -\frac{1}{\Delta_0}\left[\frac{\gamma_0}{\gamma_1}H_0 + \frac{1}{2}(\eta_0 - \chi_0 + \xi_0 z_0)(\delta z^2) + \frac{1}{6}\xi_0(\delta z)^3\right] \tag{V; 95}$$

einen fast strengen Wert für die Verbesserung von z_0 darstellen. Je nach Güte der Ausgangsnäherung kann auf die Mitnahme des letzten oder der beiden letzten Glieder verzichtet werden. Sollte $z_1 = z_0 + \delta z$ die Hauptgleichung noch nicht befriedigen, so führt eine weitere Verbesserung mit

$$\delta z_1 = z - z_1 = -\frac{H(z_1)}{\Delta} \tag{V; 96}$$

stets zum Ziel, wobei man, da $H(z_1)$ sehr klein ist, für Δ den Wert $\Delta_0 = \Delta(z_0)$ aus der ersten Hypothese übernehmen darf, statt einen neuen Wert $\Delta(z_1)$ zu berechnen.

Ist die Bahn eine Parabel, so findet man z als Lösung der kubischen Gleichung (V; 82)

$$z + \frac{1}{2}\eta_0 z^2 + \frac{1}{6}\zeta_0 z^3 = z + az^2 + bz^3 = 1.$$

Führt man statt z die neue Unbekannte

$$u = z - \frac{a}{3b}$$

ein, so nimmt diese Gleichung die Normalform

$$u^3 + \alpha u = \beta, \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{3b - a^2}{3b^2}; \quad \beta = \frac{27b^2 - 2a^3 + 9ab}{27b^3} \tag{V; 97}$$

an, deren einzige reelle Lösung durch die CARDANIsche Formel

$$u = \sqrt[3]{\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3}} \tag{V; 98}$$

gegeben ist, da die Diskriminante $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3$ immer positiv ist. Das ist leicht einzusehen: Es ist nämlich $3b - a^2 = \frac{1}{4}(2\zeta_0 - \eta_0^2) = \frac{\tau^2}{4}(2\varepsilon_0 - \sigma_0^2)$, und da für die Parabel $\mu = \varepsilon$, also $\vartheta = \mu + \varepsilon - \sigma^2 = 2\varepsilon - \sigma^2 = \frac{p}{r^4} > 0$, so ist auch $\alpha > 0$.

Für die numerische Rechnung kann man dasselbe Verfahren einschlagen wie am Schluß des Abschn. 34. Setzt man zur Abkürzung

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{27}\frac{\alpha^3}{\beta^2}}},$$

so wird

$$u = \sqrt[3]{\frac{\beta}{2x}}\left\{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}\right\} = \sqrt[3]{\frac{\beta}{2x}} \frac{2x}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}.$$

Andererseits ist

$$\frac{4}{27}\frac{\alpha^3}{\beta^2} = \frac{4\beta}{27}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \frac{1-x^2}{x^2}, \quad \beta = 2\frac{1-x^2}{x^2}\left(\frac{3\beta}{2\alpha}\right)^3,$$

also

$$\frac{\beta}{2x} = (1-x^2)\left(\frac{3\beta}{2\alpha x}\right)^3$$

und somit

$$u = \frac{\beta}{\alpha}\frac{3m}{1+m+m^2},$$

wenn $m = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ gesetzt wird.

Man kann das hier skizzierte Lösungsverfahren auch bei parabelnahen Bahnen verwenden, wobei es gleichgültig ist, ob es sich um solche von elliptischem oder hyperbolischem Charakter handelt. Schreibt man

$$\text{(V; 99)} \quad A = 2c_2\eta_0, \quad B = 6c_3\zeta_0; \quad f = 2B - A^2, \quad g = 3B(A+B) - A^3,$$

so ist

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f^3}{g^2}}}, \quad m = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}, \quad u = \frac{2g}{Bf} \cdot \frac{m}{1+m+m^2}$$

und schließlich

$$z = u + \frac{A}{B}.$$

Für strenge Parabelbahnen hat man

$$A = \eta_0, \quad B = \zeta_0 (= \xi_0)$$

zu setzen. Handelt es sich dagegen um eine parabelähnliche Ellipse oder Hyperbel, so löst man die Aufgabe zunächst mit diesen provisorischen Werten und verbessert dann A, B gemäß (V; 99), indem man mit der provisorischen Lösung z_0 die Funktionen $c_2(\chi_0 z^2)$, $c_3(\chi_0 z^2)$ der Tafel Anhang B entnimmt. Nötigenfalls ist dieses Iterationsverfahren zu wiederholen, bis die Rechnung steht.

Besonders einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn die Epoche auf das Perihel fällt. Dann ist $A = 0$, und das ganze Formelsystem reduziert sich auf

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{27c_3\zeta_0}}}, \quad m = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}, \quad z = \frac{3m}{1+m+m^2}.$$

Für strenge Parabeln liefert dieser Algorithmus mit $\zeta_0 = \frac{\tau^2}{q^3}$ und $c_3 = \frac{1}{6}$ die Lösung direkt, während man bei parabelnahen Bahnen die Iteration mit dieser Lösung als Anfangswert beginnt.

Man kann die Lösung der kubischen Gleichung (V; 97) oder der für das Perihel als Ausgangsort gültiger Hauptgleichung (V; 86) der Parabel auch direkt der BARKERschen Tafel entnehmen. Multipliziert man (V; 86) mit $\sqrt{\frac{\zeta_0}{2}}$ und setzt man $z\sqrt{\frac{\zeta_0}{2}} = \operatorname{tg}\frac{W}{2}$, so erhält man in

$$\operatorname{tg}\frac{W}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{W}{2} = \sqrt{\frac{\zeta_0}{2}}$$

eine Gleichung, deren Lösung man in der Tafel aufsuchen oder nach irgendeiner der in Abschn. 34 beschriebenen Methoden errechnen kann. Multipliziert man (V; 97) mit $\sqrt{\frac{3}{\alpha^3}}$ und setzt $u\sqrt{\frac{3}{\alpha}} = \operatorname{tg}\frac{W}{2}$, so ergibt sich die Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{W}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{W}{2} = \sqrt{\frac{3\beta^2}{\alpha^3}},$$

die in derselben Weise gelöst wird. Im Anhang A (Tafel X) findet man auch genäherte Lösungen der Gleichung (V; 86) mit $b = \frac{1}{6}\zeta_0$, die beim Aufsuchen geeigneter Ausgangsnäherungen für die Iteration gute Dienste leistet und die man, mit $b = c_3\zeta_0$, auch bei der Lösung der allgemeinen Hauptgleichung für das Perihel als Ausgangsort verwenden kann.

Will man, ausgehend von dem Bewegungszustand zur Epoche $t = t_0$, eine Ephemeride für gleichmäßig wachsende Zwischenzeiten

$$\tau_n = n\,\tau_0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

berechnen, so kommt man, wenn das Ephemeridenintervall τ_0 genügend klein ist, bei der Lösung der Hauptgleichung für den ersten Schritt ($\tau_1 = \tau_0$) immer mit der Ausgangshypothese $z_0 = 1$ aus, und zwar ganz unabhängig von der Bahnform. Für jeden folgenden Schritt wird man dann das z des vorhergehenden als Näherung benutzen – besser noch, wenn die Folge der strengen Lösungen für die Zwischenzeiten τ_n durch z_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) gegeben ist, einen auf Grund dieser Folge zu extrapolierenden z-Wert. Man wird dann immer mit einer einzigen Verbesserung nach (V; 96) zum Ziel kommen.

44. *Übergang auf die Apsiden*

Im allgemeinen wird die Ausgangsepoche t_0, auf die sich die lokalen Elemente $x_0, \ldots \dot{z}_0$ und die Invarianten $\mu_0, \sigma_0, \ldots$ beziehen, einem beliebigen Bahnpunkt entsprechen. Unter Umständen wird es aber erwünscht sein, von t_0 auf die

Periheldurchgangszeit T (oder die Apheldurchgangszeit T') überzugehen, da für diese ausgezeichneten Punkte der Bahn die Formeln der Ephemeridenrechnung einfacher werden. Das fällt besonders bei stark exzentrischen Bahnen ins Gewicht, während es sich bei Bahnen kleiner Exzentrizität kaum lohnt, diesen Übergang zu vollziehen, da der Gewinn an Einfachheit der Rechnung nur gering ist und da ja bei solchen Bahnen die Lage der Apsiden ohnehin unsicher ist und für $e \to 0$ sogar unbestimmt wird.

Im Abschn. 42 wurde gezeigt, wie man von jeder beliebigen Epoche t_0, für die man die lokalen Elemente und Invarianten kennt, auf jede beliebige andere Epoche übergehen kann. Die Formeln (V; 60) geben die Werte der Invarianten für die neue Epoche t mit der Zwischenzeit $\tau = k(t - t_0)$, die Formeln (V; 70, 71) die für die Berechnung der neuen Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten nötigen Größen F, G; $\dot{F}$, $\dot{G}$, die Formeln (V; 61) bzw. (V; 72) sodann die rechtwinkligen Koordinaten des Ortes und der Geschwindigkeit selbst, aus denen sich dann (als Rechnungskontrolle) die neuen Invarianten nochmals berechnen lassen. Auch die Formeln (V; 75, 78) für Δ und σ müssen in diesem Zusammenhang genannt werden.

Der Übergang auf die *Apsiden* ist dadurch gekennzeichnet, daß für den neuen Ort die Apsidenbedingung $\sigma = 0$ erfüllt sein muß. Man erhält also, da $\Delta \neq 0$, nach (V; 57)

$$c_0 \sigma_0 + c_1 \varepsilon_0 \tau z = 0 \tag{V; 100}$$

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der neue Ort im Perihel oder Aphel der Bahn liegt. Setzt man für den Augenblick

$$\tau z = y,$$

so erhält man nach (V; 100) wegen $c_0 = \cos\left(y\sqrt{\varrho_0}\right)$, $c_1 = \dfrac{\sin\left(y\sqrt{\varrho_0}\right)}{y\sqrt{\varrho_0}}$, y aus

$$\operatorname{tg}\left(y\sqrt{\varrho_0}\right) = -\frac{\sigma_0\sqrt{\varrho_0}}{\varepsilon_0}, \tag{V; 101}$$

und die Hauptgleichung ergibt dann, wenn man sie mit τ multipliziert, die gesuchte Zwischenzeit

$$\tau = y + c_2 \sigma_0 y^2 + c_3 \varepsilon_0 y^3; \quad [c_\nu = c_\nu(\varrho_0 y^2)]. \tag{V; 102}$$

Die Formel (V; 101) lehrt, daß für elliptische Bahnen ($\varrho_0 > 0$) unendlich viele Lösungen y bzw. τ existieren, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß der Himmelskörper die Apsiden unendlich oft durchläuft. Von diesen Lösungen interessieren nur die beiden absolut kleinsten, von denen die eine einem Perihel-, die andere einem Apheldurchgang entspricht. Die Entscheidung darüber, welche dieser Lösungen auf das Perihel führt, liefert Formel (V; 57):

$$\Delta^3 \varepsilon = c_0 \varepsilon_0 - c_1 \varrho_0 \sigma_0 y, \quad (c_0 = 1 - c_2 \varrho_0 y^2). \tag{V; 103}$$

Dem Übergang auf das nächstliegende Perihel entspricht dasjenige y, das den Ausdruck (V; 103) positiv macht.

Ist die Bahn schwach exzentrisch, so sind Zähler und Nenner von (V; 101) klein; die Bestimmung von y und τ wird also unsicher. Für Kreisbahnen wird sie unmöglich.

Bei Parabelbahnen wird (V; 101) wegen $\varrho_0 = 0$ unbrauchbar. Dann ist aber $c_0 = c_1 = 1$, und man liest aus (V; 100) ab, daß

$$y = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}.$$

Bei parabelnahen Ellipsen oder Hyperbeln kann man die Gleichung (V; 100)

$$\text{(V; 104)} \qquad y = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\frac{c_0(\varrho_0 y^2)}{c_1(\varrho_0 y^2)}, \quad (c_0 = 1 - c_2 \varrho_0 y^2)$$

durch Iteration lösen, was auf die Folge

$$y_0 = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}, \quad y_1 = y_0 \frac{c_0(\varrho_0 y_0^2)}{c_1(\varrho_0 y_0^2)}, \quad y_2 = y_0 \frac{c_0(\varrho_0 y_1^2)}{c_1(\varrho_0 y_1^2)}, \ldots$$

führt. Diese Folge konvergiert rasch, wenn der Himmelskörper sich zur Epoche in der Nähe der Apsiden aufhält. In der Nähe der Endpunkte der kleinen Achse einer langgestreckten Ellipse würde sie unbrauchbar werden. In diesen Punkten wird nicht nur $\varepsilon_0 = 0$, sondern auch $c_0 = \cos(E - E_0) = 0$, denn für den Übergang zwischen diesen Bahnpunkten und den Apsiden ist ja $E - E_0 = \pm\frac{\pi}{2}$. In diesem Falle setzt man in (V; 100) $c_0 = 1 - \varrho_0 y^2 \cdot c_2$ und erhält mit

$$\sigma_0 + c_1 \varepsilon_0 y - c_2 \sigma_0 \varrho_0 y^2 = 0$$

eine quadratische Gleichung, deren Lösungen den Übergang auf Perihel und Aphel vermitteln, wenn man in $c_1(\varrho_0 y^2)$, $c_2(\varrho_0 y^2)$ in erster Näherung die Lösung für die Endpunkte der kleinen Achse selbst einsetzt, nämlich

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{c_2 \varrho_0}} = \pm\frac{\pi}{2\sqrt{\varrho_0}},$$

da ja, mit $E - E_0 = \pm\frac{\pi}{2}$, $c_2 = \dfrac{1 - \cos\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{\pi^2}$. In diesen Fällen (Ausgangsort in der Nähe eines Endpunktes B der kleinen Achse) ist es vorteilhaft, auf B statt auf die Apsiden überzugehen. Das geschieht nach (V; 103), da $\varepsilon = 0$, mit $y = \dfrac{\varepsilon_0}{\sigma_0 \varrho_0} \cdot \dfrac{c_0(\varrho_0 y^2)}{c_1(\varrho_0 y^2)}$, einer Gleichung, die dann ebenso wie (V; 104) durch schnell konvergierende Iteration lösbar ist. Sind Koordinaten und Invarianten für B

als Ausgangsort bekannt, so nimmt die Hauptgleichung für die Ephemeridenrechnung von diesem Punkt aus die Form einer quadratischen Gleichung

$$z + c_2 \eta_0 z^2 = 1$$

an.

Ist der Übergang auf das Perihel vollzogen, d.h., hat man y, τ und $z = \frac{y}{\tau}$ bestimmt, so findet man die Invarianten des Perihels aus (V; 60), ferner $F, G, \ldots$ und die Koordinaten $x, \ldots \dot{z}$ des Perihels in der üblichen Weise. Für die letzteren muß insbesondere die Kontrollgleichung

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = r^2\sigma = 0$$

erfüllt sein. Mit Hilfe der neuen Koordinaten und Invarianten läßt sich dann die Berechnung beliebiger Bahnörter nach den für das Perihel als Ausgangsort gültigen einfacheren Formeln vornehmen. Insbesondere erhält die Hauptgleichung für das Perihel die Form

(V; 105) $$z + c_3 \zeta_0 z^3 = 1,$$

für deren Lösung Tafel A X geeignete Näherungswerte liefert.

45. *Diskussion der Hauptgleichung. Eindeutigkeit der Lösung*

Die Lösung der Hauptgleichung in ihrer allgemeinen Form (V; 51) hängt von drei Konstanten η, ζ, χ ab, die wir hier der Einfachheit halber ohne den Index 0 schreiben. Die Gesamtheit der Lösungen aller möglichen Gleichungen dieser Art, von denen jede einen Fall der Ephemeridenrechnung mit gegebenen Ausgangswerten und gegebener Zwischenzeit repräsentiert, wird also durch die einparametrige Flächenschar $z = \text{const}$ im (η, ζ, χ)-Raum dargestellt. Diese Flächen sind transzendent, ihre Spuren auf den Ebenen $\chi = \text{const}$ dagegen sind gerade Linien, da für vorgegebenes χ die Gleichung

(V; 106) $$c_2 z^2 \eta + c_3 z^3 \zeta = 1 - z$$

in η und ζ linear ist. Setzt man $\chi = 0$, so stellt die Geradenschar

(V; 107) $$f(z) = \frac{1}{2} z^2 \eta + \frac{1}{6} z^3 \zeta + z - 1 = 0$$

in der (η, ζ)-Ebene die Lösungen aller Aufgaben der Ephemeridenrechnung dar, die bei parabolischen Bahnen vorkommen. Wegen der Rationalität dieser Gleichung in bezug auf z ist die Diskussion dieser Fälle besonders einfach. Die Geradenschar (V; 107) besitzt eine *Enveloppe*, deren Gleichung man erhält, wenn man aus

$$f(z) = 0; \quad g(z) = \frac{df}{dz} = 1 + \eta z + \frac{1}{2} \zeta z^2 = 0$$

den Parameter z eliminiert. Das ergibt nach kurzer elementarer Rechnung als Gleichung der Enveloppe

(V; 108) $$\zeta = -\frac{4}{9} - \eta \pm \frac{4}{9}\sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}\eta\right)^3},$$

also eine schiefe NEILLsche Parabel (Abb. 43), die aus zwei Ästen besteht, entsprechend den beiden Vorzeichen der Quadratwurzel. Diese laufen im Punkte

$$\eta_s = -\frac{2}{3}, \quad \zeta_s = +\frac{2}{9}$$

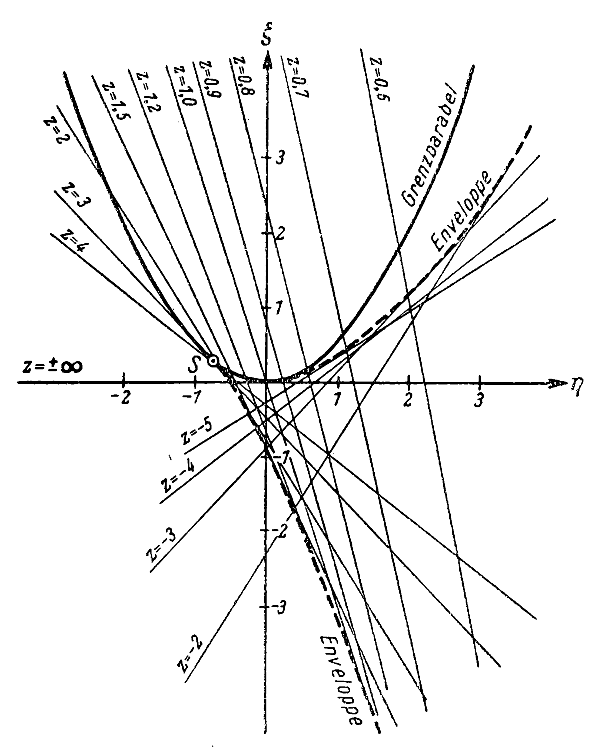


Abb. 43. Lösungen der Hauptgleichung für $\chi = 0$ (Parabelbahnen).

in einer Spitze (S) zusammen. Links von dieser Spitze, d. h. für $\eta < -\frac{2}{3}$, hat die Enveloppe keine reellen Punkte.

Für alle reellen Parabelbahnen ist $\vartheta\tau^2 = 2\zeta - \eta^2 > 0$. Alle Punkte η, ζ, die als Daten bei der Berechnung parabolischer Bahnen auftreten, liegen also oberhalb der Parabel

(V; 109) $$\zeta = \frac{1}{2}\eta^2,$$

die die η-Achse im Koordinatenanfangspunkt berührt. Auf dieser die reellen Fälle einschließenden „Grenzparabel" ist $\vartheta = 0$, verschwindet also der Bahnparameter p, d.h., jeder Punkt der Grenzparabel entspricht dem singulären Fall einer geradlinigen Bahn.

Die Enveloppe (V; 108) hat mit der Grenzparabel (V; 109) nur zwei Punkte gemeinsam. Setzt man nämlich (V; 109) in (V; 108) ein, so erhält man

$$\eta^2(4 + 12\eta + 9\eta^2) = \eta^2(3\eta + 2)^2 = 0; \quad \zeta = \frac{1}{2}\eta^2.$$

Die beiden Punkte

$$\text{(V; 110)} \qquad \begin{aligned} &\eta = 0, \quad \zeta = 0 \quad \text{(Koordinatenanfang)} \\ &\eta = -\frac{2}{3}, \quad \zeta = \frac{2}{9} \quad \text{(Spitze der Enveloppe)} \end{aligned}$$

sind also beiden Kurven gemeinsam. Alle anderen Punkte der Enveloppe liegen außerhalb der Grenzparabel. Sei nämlich $\zeta_1(\eta)$ die Ordinate eines Punktes der Grenzparabel und $\zeta_2(\eta)$ die zur gleichen Abszisse η gehörige Ordinate des oberen Astes der Enveloppe, so ist

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}\eta^2, \quad \zeta_2 = -\frac{4}{9} - \eta + \frac{4}{9}\sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}\eta\right)^3},$$

also

$$\begin{aligned} \zeta_1 - \zeta_2 &= \frac{1}{2}\left(\eta^2 + 2\eta + \frac{8}{9}\right) - \frac{4}{9}\left(1 + \frac{3}{2}\eta\right)\sqrt{1 + \frac{3}{2}\eta} \\ &= \frac{1}{3}\left(\eta + \frac{2}{3}\right)\left(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{2}\eta}\right)^2. \end{aligned}$$

Da nun für alle reellen Punkte der Enveloppe $\eta + \frac{2}{3} \geqq 0$, so folgt daraus $\zeta_1 - \zeta_2 \geqq 0$, so daß also, abgesehen von den beiden gemeinsamen Punkten (V; 110) der beiden Kurven, die Enveloppe überall außerhalb (unterhalb) der Grenzparabel verläuft. Das geht übrigens auch aus der Tatsache hervor, daß auf der Enveloppe überall

$$g(z) = 1 + \eta z + \frac{1}{2}\zeta z^2 = \frac{r}{r_0} = \Delta = 0$$

ist, was (abgesehen von den geradlinigen Bahnen, bei denen unter Umständen auch $r = 0$ vorkommt) bei reellen Bahnen niemals eintreten kann.

Alle Geraden $z = \text{const}$, die reellen Bahnbedingungen entsprechen, müssen die Grenzparabel schneiden. Bringt man (V; 109) mit der Schargeraden (V; 106) zum Schnitt, so ergibt sich für die Abszissen der Schnittpunkte die quadratische Gleichung

$$\frac{z^2}{2}\eta + \frac{z^3}{12}\eta^2 + z - 1 = 0.$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte sind also

$$\eta_0 = -\frac{3}{z} \pm \frac{1}{z}\sqrt{\frac{12 - 3z}{z}}, \quad \zeta_0 = \frac{1}{2}\eta_0^2 = \frac{6 + 3z}{z^3} \mp \frac{3}{z^2}\sqrt{\frac{12 - 3z}{z}}.$$

Diese sind nur für $0 < z \leqq 4$ reell und endlich. Die Lösung der Hauptgleichung ist also, wie wir schon früher erkannten, stets positiv. Daß sie auch eindeutig ist, geht unmittelbar aus der Form der Enveloppe hervor. Alle Geraden $z = \text{const}$ erhält man, wenn man die Tangente der Enveloppe auf den beiden Ästen dieser Kurve abrollen läßt. Da nun der untere Ast der Enveloppe nach oben, der obere nach unten gekrümmt ist, so folgt schon aus der Anschauung, daß bei diesem Abrollen das außerhalb der Enveloppe liegende Gebiet einfach überstrichen wird, während nur aus Punkten im Innern der Enveloppe mehrere (drei!) Tangenten an diese Kurve gezogen werden können. Die Krümmung der Enveloppe ergibt sich aus (V; 108) durch zweimaliges Differenzieren nach η:

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \pm\frac{3}{4\sqrt{1 + \frac{3}{2}\eta}},$$

übereinstimmend mit obiger Bemerkung, da das obere Zeichen für den oberen, das untere für den unteren Ast gilt. Da das Innere der Grenzparabel und der Enveloppe einander ausschließen, ist damit die Eindeutigkeit der Lösung der Hauptgleichung für Parabelbahnen bewiesen. Dieser Beweis ist übrigens schon früher (Abschn. 43) erbracht worden, als gezeigt wurde, daß die Diskriminante der cardanischen Formel (V; 98) für alle reellen Parabelbahnen positiv ist. Der obige Beweis sagt aber noch mehr aus: Er zeigt, daß die kubische Hauptgleichung nur für diejenigen imaginären Fälle der Ephemeridenrechnung drei reelle Wurzeln hat (casus irreducibilis!), die durch Punkte η, ζ im Innern der Enveloppe gekennzeichnet sind.

Die Diskussion der Hauptgleichung für elliptische und hyperbolische Bahnen ist wesentlich komplizierter – sie führt auf interessante geometrische Einsichten, über die man in der Literatur[1]) nachlesen möge. Hier sollen nur einige wesentliche Punkte hervorgehoben werden.

Legt man durch die Flächenschar $z = \text{const}$ eine zur (η, ζ)-Ebene parallele Fläche $\chi = \text{const} \neq 0$, so sind in dieser Ebene die Spuren $z = \text{const}$ ebenfalls gerade Linien. Diejenigen Punkte η, ζ, die reellen Aufgaben der Ephemeridenrechnung entsprechen, liegen, ebenso wie im Falle $\chi = 0$, innerhalb einer Grenzparabel

$$\text{(V; 111)} \qquad \vartheta\tau^2 = 2\zeta - \eta^2 - \chi = 0,$$

die der im Falle parabolischer Bahnen (V; 109) kongruent ist. Ihr Scheitel berührt die Gerade $\zeta = -\frac{1}{2}\chi$, d.h. also: Für elliptische Bahnen liegt der Koordinaten-

[1]) K. Stumpff: Neue Theorie und Methode der Ephemeridenrechnung. Abhandlg. der Deutschen Akad. d. Wiss. Berlin 1949.

ursprung im Innern der Grenzparabel; die Kreisbahn ($\eta = \zeta = 0$) ist also im Bereich reeller Aufgaben eingeschlossen, wie es sein muß; für hyperbolische Bahnen ($\chi < 0$) liegt die Grenzparabel ganz oberhalb der Abszissenachse. Im (η, ζ, χ)-Raum ist die Grenzfläche, die die reellen Fälle der Ephemeridenrechnung von den imaginären trennt und auf der alle Fälle geradliniger Bahnen liegen, ein parabolischer Zylinder mit der Gleichung (V; 111).

Auch in den Schnitten $\chi = \text{const} \neq 0$ haben die Geraden $z = \text{const}$ eine Enveloppe. Diese besteht, wie hier nur erwähnt werden soll, im Falle elliptischer Bahnen aus unendlich vielen asymptotisch ineinander übergehenden Ästen und liegt, bis auf endlich viele Spitzen, ganz außerhalb der Grenzparabel. Es läßt sich ferner zeigen, daß die Schar der Geraden $z = \text{const}$ das Innere der Grenzparabel einfach überstreicht, so daß auch für nichtparabolische Bahnen die Eindeutigkeit der Lösung der Hauptgleichung unter allen Umständen gewährleistet ist. Der Beweis möge hier seiner grundsätzlichen Bedeutung wegen Platz finden:

Betrachten wir in der Gleichung der Schargeraden

(V; 112) $$c_2 z^2 \eta + c_3 z^3 \zeta = 1 - z, \quad [c_\nu = c_\nu(\chi z^2)]$$

die Abszisse η als konstant und differenzieren wir nach ζ und z, so ergibt sich nach (V; 89)

$$dz(c_1 z \eta + c_2 z^2 \zeta) + d\zeta\, c_3 z^3 = -dz,$$

also

$$\frac{d\zeta}{dz} = -\frac{1 + c_1 \eta z + c_2 \zeta z^2}{c_3 z^3} = -\frac{\Delta}{c_3 z^3}.$$

Da nun $c_3(\chi z^2)$ für alle endlichen Werte des Arguments positiv ist und dasselbe, reelle Bahnen vorausgesetzt, auch für Δ gilt, so ist die Behauptung bewiesen, wenn man nachweisen kann, daß z für alle reellen Fälle positiv ist, d.h., daß alle Geraden $z = \text{const}$, die ins Innere der Grenzparabel gelangen, zu positiven Werten des Parameters z gehören. In diesem Falle ist sicher, daß überall im Innern der Grenzparabel $\frac{d\zeta}{dz} < 0$, d.h. die Geraden $z = \text{const}$ sich in diesem Gebiet nirgends schneiden.

Nun ist der Nachweis, daß $z > 0$ ist, schon früher auf Grund der Definition dieser Größe (V; 81) wenigstens für den elliptischen Fall erbracht worden. Er folgt aber auch ohne jede Fallunterscheidung aus (V; 81 a), da z sich als Mittelwert einer stets positiven Größe erweist. Schließlich kann man diesen Nachweis auch folgendermaßen führen, wobei gleichzeitig die Grenzen bestimmt werden, innerhalb derer z liegen kann:

Die Abszissen η der Schnittpunkte der Schargeraden (V; 112) mit der Grenzparabel (V; 111) erfüllen die Gleichung

$$\eta^2 + 2\frac{c_2}{c_3 z}\eta = \frac{2(1 - z)}{c_3 z^3} + \chi,$$

deren Lösungen

$$\eta = -\frac{c_2}{c_3 z} \pm \sqrt{\frac{c_2^2 z + 2c_3(1 - z) + c_3^2 z^3 \chi}{c_3^2 z^3}}$$

lauten. Setzt man nun nach (V; 44) $c_3 \chi z^2 = 1 - c_1$ und bedenkt, daß

$$c_2^2 - c_3 - c_1 c_3 = -2c_4,$$

wie man aus der Definition der c-Funktionen leicht nachweist, so erhält man

$$\eta = -\frac{c_2}{c_3 z} \pm \sqrt{2\,\frac{c_3 - c_4 z}{c_3^2 z^3}}\,.$$

Dieser Ausdruck ist aber reell nur für

$$0 < z \leqq \frac{c_3}{c_4},$$

da c_3 und c_4 positiv sind. Insbesondere entspricht $z = 0$ der unendlich fernen Geraden und der Maximalwert

$$z_{\max} = \frac{c_3(\chi z^2)}{c_4(\chi z^2)} \tag{V; 113}$$

derjenigen Schargeraden, die die Grenzparabel berührt. Für $\chi = 0$ wird $c_3 = \frac{1}{6}$, $c_4 = \frac{1}{24}$, also $z_{\max} = 4$, wie schon bewiesen. Für elliptische Bahnen ist $2 < z_{\max} < 4$, für hyperbolische Bahnen $4 < z_{\max} < \infty$. Man beweist das leicht folgendermaßen: Im elliptischen Fall setze man $\lambda = z\sqrt{\chi}$. Dann ist

$$\frac{c_3}{c_4} = \lambda\,\frac{\lambda - \sin\lambda}{\frac{\lambda^2}{2} - 1 + \cos\lambda} \to 2 \quad \text{für} \quad \lambda \to \infty\,.$$

Im hyperbolischen Fall setze man $\lambda = z\sqrt{-\chi}$. Dann ist

$$\frac{c_3}{c_4} = \lambda\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda - \lambda}{\mathfrak{Cos}\,\lambda - \left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right)} = \lambda\,\frac{\mathfrak{Tg}\,\lambda - \frac{\lambda}{\mathfrak{Cos}\,\lambda}}{1 - \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda^2}{\mathfrak{Cos}\,\lambda}} \to \infty \quad \text{für} \quad \lambda \to \infty,$$

da $\mathfrak{Tg}\,\lambda$ gegen eins, $\mathfrak{Cos}\,\lambda$ gegen ∞ strebt.

Die obenerwähnten Spitzen der Enveloppe verdienen deswegen Interesse, weil sie singuläre Punkte der Grenzparabel darstellen (siehe auch Abschn. 64).

In der Ebene $\chi = \text{const}$ des (η, ζ, χ)-Raumes erfüllen die Punkte η, ζ der Enveloppe die beiden Gleichungen

$$f(z) = z + c_2\eta z^2 + c_3\zeta z^3 - 1 = 0,$$

$$g(z) = 1 + c_1\eta z + c_2\zeta z^2 = \Delta = 0,$$

aus denen für die Koordinaten der Enveloppenpunkte die Parameterdarstellung

$$\text{(V; 114)} \qquad \eta = \frac{(c_3 - c_2)\, z + c_2}{(c_2^2 - c_1 c_3)\, z^2}; \quad \zeta = \frac{(c_1 - c_2)\, z - c_1}{(c_2^2 - c_1 c_3)\, z^3}$$

folgt. Die Spitzen der Enveloppe sind dadurch charakterisiert, daß für sie

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

ist. Aus (V; 114) folgt aber nach kurzer Rechnung, wenn man beim Differenzieren die aus (V; 89) folgende Beziehung

$$\frac{dc_\nu}{dz} = \frac{1}{z}(c_{\nu-1} - \nu c_\nu)$$

und die zwischen den c-Funktionen bestehenden Identitäten, wie

$$c_2^2 - c_1 c_3 = c_3 - 2c_4, \quad c_2 c_3 - c_1 c_4 = \frac{1}{2} c_3 - c_4$$

usw. berücksichtigt,

$$\text{(V; 115)} \qquad \frac{d\eta}{dz} = \frac{c_3}{z^3}\,\frac{c_3 z - c_2}{(c_2^2 - c_1 c_3)^2} = 0; \quad \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{c_2}{z^4}\,\frac{c_3 z - c_2}{(c_2^2 - c_1 c_3)^2} = 0.$$

Da nun $c_3(\lambda^2) = \dfrac{\lambda - \sin\lambda}{\lambda^3}$ für endliches λ^2 immer positiv ist und dasselbe auch für

$$c_2^2 - c_1 c_3 = \frac{1}{\lambda^4}\left[(1 - \cos\lambda)^2 - \sin\lambda\,(\lambda - \sin\lambda)\right] = \frac{4\sin^2\dfrac{\lambda}{2}}{\lambda^4}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}\right)$$

gilt, so sind die Gleichungen (V; 115) dann und nur dann gleichzeitig erfüllt, wenn

$$\text{(V; 116)} \qquad z = z_s = \frac{c_2(\chi z_s^2)}{c_3(\chi z_s^2)}$$

ist. Die Lösungen dieser transzendenten Gleichung ergeben also diejenigen Werte z_s des Parameters z, für die die Enveloppe eine Spitze hat; die Gerade $z = z_s$ geht durch die Enveloppenspitze hindurch und berührt die beiden in

ihr zusammenstoßenden Äste der Enveloppe gemeinsam. Setzen wir (V; 116) in (V; 114) ein, so erhalten wir für die Koordinaten der Spitze die Ausdrücke

$$\text{(V; 117)} \qquad \begin{aligned} \eta_s &= \frac{(c_3 - c_2)\, c_2 + c_2 c_3}{(c_2^2 - c_1 c_3)\, c_2^2} \cdot c_3 = -\frac{c_1 c_3}{c_2^2}, \\ \zeta_s &= \frac{(c_1 - c_2)\, c_2 - c_1 c_3}{(c_2^2 - c_1 c_3)\, c_2^3} \cdot c_3^2 = \frac{c_0 c_3^2}{c_2^3}, \end{aligned}$$

wie leicht bewiesen wird, wenn man die $c_\nu(\lambda^2)$ in ihrer trigonometrischen Form schreibt. Als Argument der c-Funktionen ist in (V; 117) natürlich für z die Lösung (bzw. eine der Lösungen) von (V; 116) einzusetzen. Führt man die Werte (V; 117) in die Gleichung der Grenzparabel ein, so ergibt sich

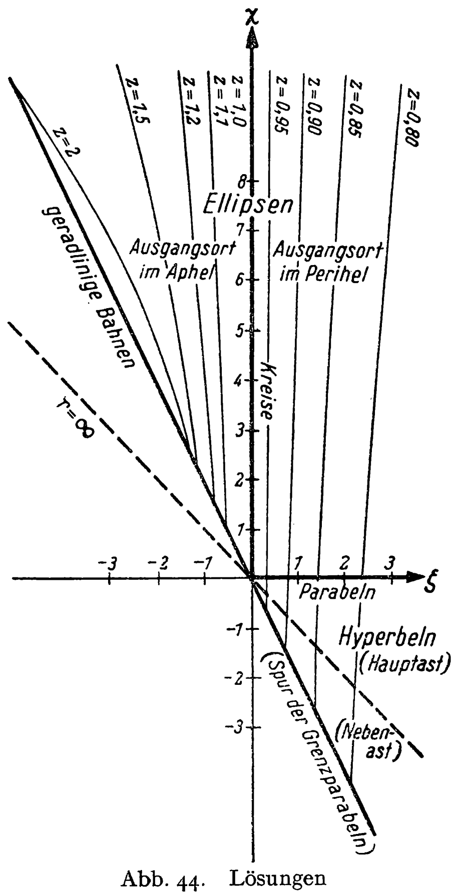


Abb. 44. Lösungen der Hauptgleichung für $\eta = 0$ (Ausgangsort in den Apsiden).

$$2\zeta - \eta^2 + \chi = 2\frac{c_0 c_3^2}{c_2^3} - \\ - \frac{c_1^2 c_3^2}{c_2^4} + \lambda^2 \left(\frac{c_3}{c_2}\right)^2 = 0,$$

eine Beziehung, die identisch erfüllt ist. Die Spitzen der Enveloppe sind also gleichzeitig Punkte der Grenzparabel.

Eine besondere Beachtung verdient noch der Schnitt $\eta = 0$, der die Spuren der Flächen $z = \text{const}$ auf der (ζ, χ)-Ebene enthält, also sämtliche Fälle der *Ephemeridenrechnung von den Apsiden aus* in sich vereinigt. Wählt man (Abb. 44) die ζ-Achse als Abszissenachse, so trennt die Gerade

$$\chi + 2\zeta = 0$$

die reellen Fälle von den imaginären. Sie ist die Scheitellinie des parabolischen Grenzzylinders (V; 111) und enthält die Scheitel aller Grenzparabeln der Flächen $\chi = \text{const}$. Rechts von dieser Geraden liegen die reellen Fälle, die hier allein interessieren. Oberhalb der Abszissenachse ist der Ort der elliptischen Fälle ($\chi > 0$), unterhalb der Ort der hyperbolischen ($\chi < 0$), während die reellen parabolischen Fälle auf der positiven ζ-Achse liegen. Die positive

χ-Achse dagegen entspricht den kreisförmigen Bahnen ($\zeta = 0$) und teilt den reellen Raum der oberen Halbebene in zwei Gebiete: Im rechten oberen Quadranten ist $\zeta > 0$, die Epoche fällt also in das *Perihel*; links der χ-Achse, in dem keilförmigen Raum zwischen dieser und der Spur der Grenzparabeln, ist das Gebiet derjenigen Punkte, die einer Ephemeridenrechnung vom *Aphel* aus entsprechen.

Die Spuren $z = \text{const}$ sind in der (ζ, χ)-Ebene keine Geraden, sondern gekrümmte Linien, die aber für kleine $|\zeta|$ fast parallel zur χ-Achse verlaufen und die ζ-Achse fast rechtwinklig schneiden. Es findet also nicht nur ein stetiger Übergang von der elliptischen in die hyperbolische Halbebene statt, sondern man bemerkt auch, daß die Lösungen der Hauptgleichung von der Invarianten ϱ nur sehr wenig abhängen, so daß man schon mit rohen Näherungen für die c-Funktionen recht genaue z-Werte erhält.

Die reellen hyperbolischen Fälle haben ihren Platz in dem keilförmigen Raum zwischen der positiven ζ-Achse und dem unteren Strahl der Grenzparabelspur. Dieses Gebiet wird durch die Gerade $\zeta + \chi = 0$ in zwei Teilgebiete zerlegt, deren Bedeutung durch folgende Überlegung klargestellt wird: Da nämlich $\mu = \varepsilon + \varrho$, also auch $\xi = \zeta + \chi$, so folgt, daß auf der Ebene $\zeta + \chi = 0$ bzw. auf der Spur dieser Ebene in Abb. 44, $\xi = \dfrac{\tau^2}{r^3} = 0$, also für alle endlichen Zwischenzeiten $r = \infty$ ist. Alle Punkte der Fläche $\zeta + \chi = 0$ entsprechen also Anfangswerten, die den unendlich fernen Punkten der Bahnen angehören. Da elliptische Bahnen solche Punkte nicht enthalten, ist klar, daß die Gerade $\zeta + \chi = 0$ in Abb. 44 nur in der unteren Halbebene im reellen Gebiet verläuft. Sie teilt den hyperbolischen Sektor in zwei Teilgebiete ein: ein oberes, in dem $\zeta + \chi > 0$, d.h. $\mu > 0$, und ein unteres, in dem $\mu < 0$ und daher auch $r < 0$ ist. Das gilt aber, wie aus der Polargleichung der Hyperbelbahnen

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (e > 1)$$

abgelesen werden kann, für $\cos v < -\dfrac{1}{e}$, also für die Punkte des zweiten Hyperbelastes, der den leeren Brennpunkt (den Antifokus) umschließt. Dieser Hyperbelast stellt eine Bahnkurve dar, die ein Himmelskörper durchlaufen würde, der von der Sonne mit einer dem Quadrat des Abstandes von der Sonne umgekehrt proportionalen Kraft *abgestoßen* wird. *Repulsivkräften* dieser Art, wenn auch mit sehr unterschiedlichen Kraftgesetzen, sind z.B. die sehr kleinen Teilchen in den Gas- und Staubhüllen der Kometen unterworfen, die bei Annäherung an die Sonne teils durch den Lichtdruck, vor allem aber durch die solare Korpuskularstrahlung aus der Kometenkoma abgedrängt werden und die bekannten von der Sonne abgewandten Schweife bilden.

46. *Berechnung einer Ephemeride aus Anfangswerten*

Die Berechnung einer Ephemeride für gleichabständige Zeitpunkte kann mit Hilfe der *Gaussschen Formeln* (Abschn. 33) durchgeführt werden. Diese Methode ist für logarithmisch-trigonometrische Rechnung sehr bequem, erfordert aber bei der Bestimmung der wahren Anomalie eine Auswahl des Rechenverfahrens, je nach dem gerade vorliegenden Bahntyp. Für Maschinenrechnung, ganz besonders aber für die vollautomatische Ausführung einer Ephemeridenrechnung mit *programmgesteuerten elektronischen Rechenanlagen*, eignen sich diejenigen Methoden bedeutend besser, die auf den in den vorhergehenden Abschnitten entwickelten theoretischen Grundlagen beruhen. Diese Methoden sind erstens vom Bahntyp unabhängig, zweitens erfordern sie nur zwei „Unterprogramme" [z. B. c_2 und c_3, aus denen sich c_1 und, wenn nötig, auch c_0 nach (V; 44) leicht ableiten lassen], während bei Verwendung der klassischen Methoden mindestens deren vier (sin, cos, arctg, ln) nötig wären. Schließlich wird bei einem Rechenschritt, der x, y, z; $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ liefern soll, nur zweimal ein Unterprogramm aufzurufen sein, wenn man von den auch bei den klassischen Verfahren auftretenden Iterationen absieht; hingegen würde z. B. für hyperbolische Bewegung, wenn Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten nach den klassischen Formeln berechnet werden sollen, nicht weniger als dreizehnmal ein Unterprogramm aufgerufen werden müssen. Die obigen Methoden sind also für programmgesteuertes Rechnen nicht nur einfacher, sondern zeichnen sich auch durch erhebliche Zeitersparnis aus.

Da die elektronischen Verfahren immer mehr an Bedeutung in der Praxis umfangreicher astronomischer Rechnungen gewinnen, ist es nicht überflüssig, ein Programm zusammenzustellen, nach dem eine ungestörte Ephemeride berechnet werden kann:

A) *Gegebene Größen*

Gegeben seien die zu der Anfangszeit $t = t_0$ gehörenden Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten des Himmelskörpers

$$x_0, y_0, z_0; \quad \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0.$$

Die Geschwindigkeiten mögen sich dabei auf die Zeiteinheit von

$$\text{(V; 118)} \qquad \frac{1}{k} = 58.13244 \text{ mittleren Tagen}$$

beziehen. Gefordert sei die Berechnung einer Ephemeride der Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten für die Zeitpunkte $t_1, t_2, \ldots t_N$, deren konstante Abstände irgendeine ganze Zahl von Tagen betragen möge. Für eine Ephemeride mit n-tägigem Intervall sei also

$$\tau = kn = 0.0172021\, n$$

die konstante Zwischenzeit in den Zeiteinheiten (V; 118).

B) *Invarianten*

Mit Hilfe der Anfangsdaten werden die Invarianten für die Epoche t_0

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2; \quad r_0^2\sigma_0 = x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0; \quad r_0^2\omega_0 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2$$

und hieraus r_0, σ_0, ω_0 berechnet, ferner

$$\mu_0 = \frac{1}{r_0^3}, \quad \varepsilon_0 = \omega_0 - \mu_0, \quad \varrho_0 = \mu_0 - \varepsilon_0,$$

$$\xi_0 = \mu_0\tau^2, \quad \eta_0 = \sigma_0\tau, \quad \zeta_0 = \varepsilon_0\tau^2, \quad \chi_0 = \varrho_0\tau^2.$$

C) *Iteration zur Auflösung der Hauptgleichung*

Die Hauptgleichung zum Übergang von t_0 auf t_1 lautet

$$H = z + c_2\eta_0 z^2 + c_3\zeta_0 z^3 - 1 = 0.$$

Man beginnt die Auflösung mit einer Näherung $z = z_0$ und rechnet

$$\lambda^2 = \chi_0 z^2,$$

$$c_2(\lambda^2) = \frac{1}{2!} - \frac{\lambda^2}{4!} + \frac{\lambda^4}{6!} - \cdots, \quad c_3(\lambda^2) = \frac{1}{3!} - \frac{\lambda^2}{5!} + \frac{\lambda^4}{7!} - \cdots,$$

$$c_1(\lambda^2) = 1 - \lambda^2 c_3,$$

$$\Delta_0 = 1 + c_1\eta_0 z + c_2\zeta_0 z^2, \quad H_0 = z + c_2\eta_0 z^2 + c_3\zeta_0 z^3 - 1,$$

$$\delta z = -\frac{H_0}{\Delta_0}, \quad z = z_0 + \delta z, \quad \lambda^2 = \chi_0 z^2, \quad \ldots,$$

wiederholt die Rechnung mit der neuen Näherung z und setzt dies so lange fort, bis $H = 0$ erfüllt ist.

Als Ausgangsnäherung benutzt man, falls τ nicht sehr groß ist, beim ersten Schritt $z_0 = 1$, bei späteren Schritten beginnt man die Iteration mit der Lösung z aus dem vorhergehenden Intervall oder mit einem auf Grund der bereits vorliegenden z-Folge extrapolierten Wert.

D) *Koordinaten für $t = t_1$*

Sind z, λ^2, c_ν, Δ die aus der letzten Iteration stammenden Werte, mit denen die Hauptgleichung $H = 0$ erfüllt ist, so erhält man

$$1 - F_0 = c_2\xi_0 z^2, \qquad \dot{F}_0 = -\frac{c_1\xi_0 z}{\Delta\tau},$$

$$G_0 = \tau(1 - c_3\xi_0 z^3), \quad 1 - \dot{G}_0 = \frac{1 - F_0}{\Delta}$$

und damit x_1, $\dot{x}_1$ aus

$$x_1 - x_0 = -(1 - F_0)\,x_0 + G_0\,\dot{x}_0,$$

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_0 = \dot{F}_0 x_0 - (1 - \dot{G}_0)\,\dot{x}_0.$$

Entsprechende Formeln liefern y_1, $\dot{y}_1$, z_1, $\dot{z}_1$.

E) *Fortsetzung und Kontrollen*

Hat man mit den Ausgangsdaten des nächsten Schrittes,

$$x_1, y_1, z_1; \quad \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1,$$

die Invarianten $\mu_1, \sigma_1, \ldots \chi_1$ nach (B) berechnet, so gelten die Kontrollen

$$r_1 = r_0 \Delta_0; \quad \varrho_1 = \frac{\varrho_0}{\Delta_0^2}; \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_0 F_0 + \varepsilon_0 G_0}{\Delta_0^2}$$

Ferner müssen nach jedem Schritt die Bahnkonstanten

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - r^2\omega; \quad p = r^2 \cdot (r^2\omega) - (r^2\sigma)^2$$

denselben Wert ergeben.

Mit den neuen Invarianten werden dann (C) und (D) durchgerechnet; man erhält so die Koordinaten für $t = t_2$ usf.

Dieses Verfahren, das an Einfachheit und Durchsichtigkeit nichts zu wünschen übrig läßt, ist den Erfordernissen einer programmgesteuerten Rechnung gut angepaßt. Es sind aber noch einige ergänzende Bemerkungen nützlich:

1. Um die Aufsummierung von Abrundungsfehlern möglichst unschädlich zu machen, ist es zweckmäßig, die Rechnung auf ein bis zwei Dezimalstellen genauer durchzuführen als im Endergebnis verlangt wird. Insbesondere sollte man kleine Größen (z.B. die Invarianten und ihre Produkte mit τ bzw. τ^2) immer auf eine Mindestzahl von *zählenden* Stellen angeben. Im elektronischen Verfahren bedeutet die Mitnahme weiterer Stellen keine Mehrarbeit.

2. Wenn nur die Ortskoordinaten, nicht aber die Geschwindigkeitskoordinaten ephemeridenmäßig zu berechnen sind, wird man nicht, wie oben, jeden Schritt der Rechnung von neuen Anfangswerten aus unternehmen, sondern eine größere Anzahl von Schritten von einem und demselben Anfangszustand aus rechnen, indem man (B) bis (D) mit den Zwischenzeiten $\tau, 2\tau, \ldots n\tau$ durchführt und in (D) nur $F, G; x, y, z$ berechnet. Als Kontrolle dient dann nur die Gleichung $r_{n+1} = r_n \Delta_n$. Erst nach einer gewissen Anzahl von Schritten, wenn die c-Funktionen, deren Argument ständig wächst, schlechter zu konvergieren beginnen, wird man auch die Geschwindigkeitskoordinaten in (D) berechnen und dann die weitere Rechnung mit (nach E sorgfältig kontrollierten) neuen Ausgangswerten fortsetzen.

3. Über die Güte der Konvergenz der Reihen für die c-Funktionen läßt sich folgendes sagen: Bei parabelnahen Bahnen ist ϱ und daher (bei kleinen und mäßigen Zwischenzeiten) erst recht $\chi = \varrho\tau^2$ sehr klein. Es reichen dann stets die beiden ersten Glieder der nach $\lambda^2 = \chi z^2$ fortschreitenden Potenzreihen aus. Bei Planetoiden dient zur Abschätzung von λ^2 die Formel

$$\lambda^2 = \varrho\tau^2 z^2 \approx \varrho\tau^2 = \frac{\tau^2}{a r^2}.$$

Setzt man, um mittlere Verhältnisse zugrunde zu legen, $r = a = 2.5$ und nimmt man als Zwischenzeit 40 Tage ($\tau = 0.688$) an, wie es bei der Berechnung spezieller Störungen üblich ist, so erhält man $\lambda^2 \approx 0.03$ und für die Beträge der Entwicklungsglieder von $c_1(\lambda^2)$ genähert

$$1; \quad 5 \cdot 10^{-3}; \quad 7.5 \cdot 10^{-6}; \quad 5.4 \cdot 10^{-9}; \quad \ldots,$$

so daß für siebenstellige Rechnung (die bei der Berechnung der c-Funktionen immer ausreicht) bereits das Glied mit λ^6 unmerklich wird. Die Reihen für $c_2, c_3, \ldots$ konvergieren noch besser. Für die Programmierung im elektronischen Verfahren dient der geschachtelte Ausdruck

$$c_\nu(\lambda^2) =$$
$$= \frac{1}{\nu!}\left[1 - \frac{\lambda^2}{(\nu+1)(\nu+2)}\left\{1 - \frac{\lambda^2}{(\nu+3)(\nu+4)}\left(1 - \frac{\lambda^2}{(\nu+5)(\nu+6)}\cdots\right)\right\}\right],$$

der die automatische Rechnung von innen heraus ermöglicht und auch für ungünstige Fälle genau genug ist, für günstigere aber durch eine einfachere Formel mit weniger Einschachtelungen ersetzt werden kann.

4. Um bei großen Zwischenzeiten die erste Iteration (Auflösung der Hauptgleichung für das erste Intervall) abzukürzen, kann man vorteilhaft die Formel (V; 95) benutzen, indem man in ihr $z_0 = 1$ setzt. Hat man mit diesem Anfangswert $\delta z = -\frac{H}{\Delta}$ berechnet, so ist

$$z = 1 + \Delta z \quad \text{mit} \quad \Delta z = \delta z\left[1 - \frac{\eta + \zeta}{2\Delta}\delta z - \frac{\xi}{6\Delta}(\delta z)^2\right]$$

eine Näherungslösung, die auch bei großen Zwischenzeiten und ungewöhnlichen Bahnverhältnissen höchstens noch einmal verbessert zu werden braucht.

Eine andere Möglichkeit zur Beschaffung eines guten Näherungswertes für z ergibt sich, wenn man die Hauptgleichung in Form einer Potenzreihe schreibt, indem man die c-Funktionen entwickelt:

$$1 = z + \eta z^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{\chi z^2}{4!} + \frac{\chi^2 z^4}{6!} - \cdots\right) + \zeta z^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{\chi z^2}{5!} + \frac{\chi^2 z^4}{7!} - \cdots\right).$$

Durch Umkehrung dieser Reihe erhält man den Ausdruck

$$z = 1 - \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{6}\zeta + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{5}{12}\eta\zeta - \frac{5}{8}\eta^3 + \frac{1}{24}\eta\chi + \cdots,$$

der sich beliebig weit fortsetzen läßt und in praktischen Fällen meist rasch konvergiert. Bricht man die Reihe an geeigneter Stelle ab, so erhält man eine Formel, die einen brauchbaren Ausgangswert für die erste Iteration liefert und auch für elektronische Rechnung sehr bequem ist.

5. Wie oben erwähnt, wird man bei den weiteren Schritten der Ephemeridenrechnung mit konstanten Zeitintervallen die Iteration zur Auflösung der Hauptgleichung mit dem z des vorhergehenden Intervalls beginnen. Aber auch hier läßt sich leicht eine noch bessere Näherung erzielen:

Angenommen, man suche die Lösung z_1 der Hauptgleichung für den Übergang $t_1 \to t_2$, während die Lösung z_0 für den Übergang $t_0 \to t_1$ bereits vorliegt. Es lassen sich dann auch die Invarianten und das z für den Übergang $t_1 \to t_0$, d.h. also für die Rückwärtsberechnung der Daten für t_0 aus den Daten für t_1, leicht angeben. Es ist dann die Zwischenzeit $-\tau$ statt τ zu nehmen, und man erhält, wenn man die für diesen Übergang nötigen Größen mit dem Index 1 und außerdem (zum Zeichen, daß der Übergang nach rückwärts gemeint ist) mit einem Strich bezeichnet,

$$\xi_1' = \xi_1, \quad \eta_1' = -\eta_1, \quad \zeta_1' = \zeta_1, \quad \chi_1' = \chi_1.$$

Ferner lautet die Hauptgleichung für $t_1 \to t_0$

$$1 = z_1' - c_2'\eta_1 z_1'^2 + c_3'\zeta_1 z_1'^3, \quad [c_\nu' = c_\nu'(\chi_1 z_1'^2)],$$

und es ist

$$\Delta_1' = \frac{r_0}{r_1} = \frac{1}{\Delta_0} = 1 - c_1'\eta_1 z_1' + c_2'\zeta_1 z_1'^2. \qquad \text{(V; 119)}$$

Außerdem ist gemäß der Bedeutung von z

$$z_1' = \frac{\lambda_1'}{-\tau\sqrt{\varrho_1}}, \quad \text{wo} \quad \lambda_1' = E_0 - E_1 = -\lambda_0, \quad \varrho_1 = \frac{\varrho_0}{\Delta_0^2},$$

also

$$z_1' = \frac{\lambda_0}{\tau\sqrt{\varrho_0}}\Delta_0 = z_0\Delta_0,$$

ferner

$$c_\nu'(\lambda_1'^2) = c_\nu(\lambda_0^2).$$

Es ist daher

$$1 = z_0\Delta_0 - c_2(\lambda_0^2)\,\eta_1 z_0^2\Delta_0^2 + c_3(\lambda_0^2)\,\zeta_1 z_0^3\Delta_0^3.$$

Andererseits gilt für den Übergang $t_1 \to t_2$

$$1 = z_1 + c_2(\lambda_1^2)\,\eta_1 z_1^2 + c_3(\lambda_1^2)\,\zeta_1 z_1^3.$$

Sei nun $z_1 = z_0 + \delta z$, vernachlässigt man höhere Potenzen von δz und setzt (für diesen Zweck genau genug) $c_\nu(\lambda_1^2) = c_\nu(\lambda_0^2) = \frac{1}{\nu!}$, so ergibt die Differenz beider Gleichungen

$$0 = z_0(\Delta_0 - 1) - \frac{1}{2}\eta_0 z_0^2(\Delta_0^2 + 1) + \frac{1}{6}\zeta_0 z_0^3(\Delta_0^3 - 1) -$$

$$- \delta z\left(1 + \eta_1 z_0 + \frac{1}{2}\zeta_\nu z_0^2\right).$$

Den Faktor von $-\delta z$ darf man mit ausreichender Genauigkeit gleich Δ_0 setzen, und schreibt man ferner

$$\Delta_0^2 + 1 = (\Delta_0 - 1)^2 + 2\Delta_0 \approx 2\Delta_0,$$

$$\Delta_0^3 - 1 = (\Delta_0 - 1)^3 + 3\Delta_0(\Delta_0 - 1) \approx 3\Delta_0(\Delta_0 - 1),$$

indem man höhere Potenzen der kleinen Größe $\Delta_0 - 1$ unterdrückt, so erhält man

$$\Delta_0 \delta z = z_0\left[\Delta_0 - 1 - \eta_1 z_0 \Delta_0 + \frac{1}{2}\zeta_1 z_0^2 \Delta_0(\Delta_0 - 1)\right]$$

oder, da nach (V; 119) genähert

$$1 - \eta_1 z_0 \Delta_0 + \frac{1}{2}\zeta_1(z_0\Delta_0)^2 = \frac{1}{\Delta_0}$$

gesetzt werden kann,

$$\Delta_0 \delta z = z_0\left(\Delta_0 - 2 + \frac{1}{\Delta_0} - \frac{1}{2}\zeta_1 z_0^2 \Delta_0\right)$$

oder

$$\delta z = z_0\left[\left(1 - \frac{1}{\Delta_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\zeta_1 z_0^2\right].$$

Wenn man auf die Gleichabständigkeit der Zeiten einer Ephemeride verzichtet, kann man die Auflösung der KEPLERschen Gleichung, ihrer Analoga bzw. der Hauptgleichung umgehen. So lassen sich nach den früher entwickelten Formeln bei elliptischen Bahnen Koordinaten des Ortes und, wenn erforderlich, auch der Geschwindigkeit für gleiche Intervalle der wahren, exzentrischen oder antifokalen Anomalie berechnen und die zugehörigen Zeiten bei elliptischen Bahnen über die KEPLERsche Gleichung

$$t = T + \frac{\sqrt{a^3}}{k}(E - e \sin E)$$

ermitteln, wobei gegebenenfalls E aus

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{w}{2}$$

gewonnen wird. Diese Formeln sind für trigonometrische Rechnung geeignet. Wählt man äquidistante w, so erhält man, falls die Exzentrizität der Bahn klein ist, eine Ephemeride für *nahezu* gleichabständige Zeiten. Für äquidistante E ist

$$d\tau = dE\,\frac{1 - e\cos E}{n} = dE \cdot r\sqrt{a},$$

d.h., die zugehörigen τ-Intervalle sind im Perihel am kleinsten, im Aphel am größten. Das gilt noch ausgeprägter für äquidistante v, da ja nach dem Flächensatz $d\tau = dv \cdot \dfrac{r^2}{\sqrt{p}}$.

Diese Art der punktweisen Berechnung einer Bahn hat außer der Einfachheit der Rechenvorschrift noch den Vorzug, daß der schneller durchlaufene Teil der Bahn entsprechend dichter belegt wird als bei äquidistanten Zeiten. Das macht sich besonders bei stark exzentrischen Kometenbahnen vorteilhaft bemerkbar: Bei Ephemeriden mit gleichabständigen Zeiten müßte man in der Sonnenferne wegen der dort sehr langsamen Änderung der Koordinaten zu größeren Zwischenzeiten übergehen, evtl. diese sprunghaften Änderungen sogar mehrfach vornehmen. Daß Ephemeriden mit ungleichen Zeitintervallen auch erhebliche Nachteile besitzen, braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden.

Was hier gesagt wurde, gilt auch für die vom Bahntyp freien Methoden der Ephemeridenrechnung, die in diesem Kapitel beschrieben wurden. Hier ist es zweckmäßig, statt der gleichmäßig von einer Epoche t_0 aus wachsenden Zwischenzeiten τ gleichabständige Argumente $y = z\tau$ zu wählen. Geht man von den der Epoche $t = t_0$ zugehörigen lokalen Elementen $x_0, \ldots \dot{z}_0$ aus, und hat man mit ihnen die Invarianten $\mu_0, \sigma_0, \varepsilon_0, \varrho_0$ berechnet, so wird der weitere Verlauf der Rechnung folgendermaßen vor sich gehen: Man bilde für gleichmäßig wachsende

$$y_n = n y_1, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei y_1 eine zweckmäßig zu wählende Konstante bedeutet, die Größen

$$\begin{aligned} 1 - F_n &= c_2^{(n)}\mu_0 y_n^2, \\ G_n &= y_n(c_1^{(n)} + c_2^{(n)}\sigma_0 y_0), \end{aligned} \qquad [c_\nu^{(n)} = c_\nu(\varrho_0 y_n^2)]$$

mit denen man die Folge der x_n, y_n, z_n berechnet. Legt man auch auf Geschwindigkeitskoordinaten Wert, so vervollständigt man das Programm durch

$$\Delta_n = 1 + c_1^{(n)}\sigma_0 y_n + c_2^{(n)}\varepsilon_0 y_n^2,$$

$$\Delta_n \dot{F}_n = -c_1^{(n)}\mu_0 y_n; \quad \Delta_n(1 - \dot{G}_n) = 1 - F_n.$$

Die Folge der zugehörigen Zwischenzeiten wird aus der mit τ_n multiplizierten Hauptgleichung

$$\tau_n = y_n + c_2^{(n)} \sigma_0 y_n^2 + c_3^{(n)} \varepsilon_0 y_n^3$$

erhalten. Da $y = z\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{\varrho}}$ proportional der Differenz $E - E_0$ verläuft, folgt, daß die Zeitintervalle dem Sonnenabstand proportional sind, und zwar gilt das für beliebige Bahntypen.

KAPITEL VI

DIE ZWEIKÖRPERBEWEGUNG ALS RANDWERTPROBLEM

47. *Die Integralgleichung der Zweikörperbewegung*

Unsere bisherigen Überlegungen, das Zweikörperproblem betreffend, beruhten auf der Tatsache, daß die Bewegung zweier Massenpunkte um den gemeinsamen Schwerpunkt oder die Relativbewegung des einen Massenpunktes um den andern durch eine vektorielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{\mathfrak{p}} + \varkappa^2 \frac{\mathfrak{p}}{r^3} = 0, \quad (r = |\mathfrak{p}|) \tag{VI; 1}$$

beschrieben wird. Dieser Differentialgleichung genügen alle derartigen Bewegungen unter dem Einfluß der NEWTONschen Gravitationskraft; jede konkrete Bewegung bedarf zu ihrer Kennzeichnung noch gewisser Anfangsbedingungen, die am besten durch die beiden Vektoren $\mathfrak{p}_0$ und $\dot{\mathfrak{p}}_0$ gegeben werden, die den Ort und die Geschwindigkeit des Massenpunktes zu einer bestimmten Zeit, der Epoche t_0, darstellen.

Diese Anfangsbedingungen, die es gestatten, die Bewegung als eine *Wurfbewegung* in einem gegebenen Gravitationsfeld aufzufassen, gehen durch Grenzübergang aus einem anderen System von Bedingungen hervor, das man folgendermaßen definieren kann: Es werde verlangt, daß der Massenpunkt, der zu einem Zeitpunkt t_0 den Ort $\mathfrak{p}_0$ einnimmt, an einem späteren Zeitpunkt t_1 den Ort $\mathfrak{p}_1$ erreicht. Man könnte demnach das Problem als das des *gezielten Wurfs* bezeichnen, doch ist dabei wesentlich, daß nicht nur der Ort des Ziels, sondern auch die Flugdauer des Geschosses vorgegeben wird, da sonst die Lösung des Problems nicht eindeutig wäre. Bei oberflächlicher Betrachtung scheint es also, als erfordere die Determinierung des Problems durch Anfangs- und durch Randwerte eine verschiedene Anzahl von Konstanten. Die Anfangsbedingungen der Wurfbewegung lassen sich durch sechs Konstanten, nämlich die drei Koordinaten des Anfangsortes und die drei Koordinaten der Anfangsgeschwindigkeit, vollständig beschreiben, während die Randbedingungen des gezielten Wurfs die sechs Koordinaten des Start- und Zielortes, außerdem aber als siebente Konstante die „Zwischenzeit" oder „Flugdauer" $t_1 - t_0$ erfordern. Dieser Widerspruch klärt sich auf, wenn wir den Zielort $\mathfrak{p}_1$ in den Startpunkt $\mathfrak{p}_0$ hineinrücken lassen. Im Grenzfall haben wir dann zwei unendlich benachbarte Örter $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}_0 + d\mathfrak{p}$, zwischen denen das Geschoß sich linear in der unendlich kleinen Flugzeit dt bewegt. Im Falle der Determinierung durch Anfangswerte steckt also die Zwischenzeit als Differential in den drei Koordinaten der Anfangsgeschwindigkeit, während sie im Fall der Determinierung durch Randwerte eines Intervalls neben den sechs Ortskoordinaten als endlicher Ausdruck erscheint. Die Zwischenzeit $t_1 - t_0$ ist dann das Integral über unendlich viele

differentielle Zeitelemente, in denen der Massenpunkt seine Bahn zwischen den beiden vorgegebenen Örtern beschreibt. Dem entspricht, daß die Lösung des Problems der Lösung einer *Integralgleichung* äquivalent ist.

Die Bedeutung der Integralgleichungstheorie für die mathematische Behandlung des Zweikörperproblems und anderer mechanischer Probleme hervorgehoben und auf die Vorteile einer solchen Betrachtungsweise bei gewissen Aufgaben der Himmelsmechanik hingewiesen zu haben, ist das Verdienst von H. BUCERIUS. Er schreibt die Integralgleichung der Zweikörperbewegung zwischen den vorgegebenen Örtern $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}_1$ in der Form

$$\text{(VI; 2)} \qquad \mathfrak{p}(t) = \bar{\mathfrak{p}}(t) + \varkappa^2 \int_{t_0}^{t_1} K(s, t) \frac{\mathfrak{p}(s)}{r^3} ds, \quad r = r(s),$$

wobei der Kern dieser nichtlinearen Integralgleichung die symmetrische Gestalt

$$\text{(VI; 3)} \qquad K(s, t) = \begin{cases} \dfrac{(s - t_0)(t_1 - t)}{t_1 - t_0} & \text{für} \quad t_0 \leqq s \leqq t, \\ \dfrac{(t - t_0)(t_1 - s)}{t_1 - t_0} & \text{für} \quad t \leqq s \leqq t_1 \end{cases}$$

besitzt und

$$\text{(VI; 4)} \qquad \bar{\mathfrak{p}}(t) = \mathfrak{p}_0 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_0) = \mathfrak{p}_0 \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} + \mathfrak{p}_1 \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

einer gleichförmig-geradlinigen Bewegung zwischen den beiden Örtern in der vorgegebenen Zwischenzeit entsprechen würde. Tatsächlich erhält man aus (VI; 2) $\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}$, wenn man $\varkappa = 0$ setzt, d.h., wenn man annimmt, daß keine Anziehungskraft auf den Massenpunkt wirkt.

Die Form der Gleichungen (VI; 2–4) wird einfacher, wenn man die Zwischenzeit $t_1 - t_0$ als Zeiteinheit wählt und die Anfangszeit $t_0 = 0$ setzt. Dann erhält man, mit $\tau = \varkappa(t_1 - t_0) = \varkappa$,

$$\text{(VI; 5)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{p}(t) = \bar{\mathfrak{p}}(t) + \tau^2 \displaystyle\int_0^1 K(s, t) \frac{\mathfrak{p}(s)}{r^3} ds, \\ K(s, t) = \begin{cases} s(1 - t) & \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq t, \\ t(1 - s) & \text{für} \quad t \leqq s \leqq 1, \end{cases} \\ \bar{\mathfrak{p}}(t) = \mathfrak{p}_0(1 - t) + \mathfrak{p}_1 t. \end{cases}$$

Der Kern $K(s, t)$ stellt für jeden Wert von t eine gebrochene lineare Funktion von s dar, die für $s = 0$ und $s = 1$ verschwindet und an der Stelle $s = t$ den Maximalwert $t(1 - t)$ erreicht. Sie besitzt dort einen Knick: Die Steigung ist vor dem Knick $1 - t$, nachher $-t$.

Daß die Integralgleichung (VI; 5) der Differentialgleichung (VI; 1) äquivalent ist, zeigt man durch zweimaliges Differenzieren nach t. Zu diesem Zwecke ist es notwendig, wegen der Unstetigkeit der ersten Ableitung des Kerns das Integral in zwei Teile zu zerlegen:

$$\mathfrak{p}(t) = \bar{\mathfrak{p}}(t) + \tau^2 \int_0^t s(1 - t) \frac{\mathfrak{p}(s)}{r^3} ds + \tau^2 \int_t^1 t(1 - s) \frac{\mathfrak{p}(s)}{r^3} ds.$$

Hieraus ergibt sich zunächst

$$\dot{\mathfrak{p}} = \dot{\bar{\mathfrak{p}}} + \tau^2 t(1 - t) \frac{\mathfrak{p}(t)}{r^3} - \tau^2 \int_0^t s \frac{\mathfrak{p}(s)}{r^3} ds -$$

$$- \tau^2 t(1 - t) \frac{\mathfrak{p}(t)}{r^3} + \tau^2 \int_t^1 (1 - s) \frac{\mathfrak{p}(s)}{r^3} ds =$$

$$= \dot{\bar{\mathfrak{p}}} - \tau^2 \int_0^1 s \frac{\mathfrak{p}(s)}{r^3} ds + \tau^2 \int_t^1 \frac{\mathfrak{p}(s)}{r^3} ds.$$

Bei nochmaliger Dfferentiation verschwindet $\ddot{\bar{\mathfrak{p}}}$, da $\bar{\mathfrak{p}}$ eine lineare Funktion der Zeit ist. Ebenso verschwindet die Ableitung des ersten Integrals, das von t unabhängig ist, und man erhält, wenn man das zweite Integral nach der unteren Grenze differenziert, die Gleichung (VI; 1), wie zu beweisen war.

Die Lösung der Integralgleichung (VI; 2) oder (VI; 5) läßt sich ohne Zuhilfenahme anderer Variabler durch Iteration erzwingen, wenn die Zwischenzeit nicht sehr groß ist. Auf diesen Umstand lassen sich, wie BUCERIUS gezeigt hat, viele Näherungsmethoden zurückführen, die bei den Methoden der Bahnbestimmung (siehe Abschn. 80) gebräuchlich sind.

48. *Die LAMBERTsche und die EULERsche Gleichung*

Im Verlauf der klassischen Untersuchungen über das Problem der Berechnung von Bahnen aus Randbedingungen, also aus zwei räumlichen Örtern einer Kegelschnittbahn und der zugehörigen Zwischenzeit, sind verschiedene wichtige Sätze gefunden worden, die den dynamischen Zusammenhang zwischen den Örtern und der Zwischenzeit charakterisieren und daher neben den rein geometrischen Beziehungen eine entscheidende Rolle spielen. Eine der wichtigsten und zugleich merkwürdigsten Beziehungen dieser Art wurde zunächst von EULER für die Bwegung in der Parabel gefunden; später hat LAMBERT eine allgemeinere Formel entwickelt, die für alle Kegelschnittbahnen gilt und die EULERsche Formel als Spezialfall enthält. Die LAMBERTsche Gleichung ist

eine Umformung der KEPLERschen Gleichung. Sie ist dadurch ausgezeichnet, daß in ihr außer der Zwischenzeit $\tau = \varkappa(t_2 - t_1)$ und der großen Halbachse a der Bahn nur die Summe $r_1 + r_2$ der zu den Randörtern P_1 und P_2 gehörenden Radiusvektoren und die Länge s der zwischen diesen Örtern ausgespannten Sehne der Bahn vorkommt.

Wir beschränken uns zunächst auf den elliptischen Bahntyp. Drückt man r_1 und r_2 durch die exzentrischen Anomalien aus:

$$r_1 = a(1 - e\cos E_1), \quad r_2 = a(1 - e\cos E_2),$$

so ist

$$r_1 + r_2 = a[2 - e(\cos E_1 + \cos E_2)] = 2a\left(1 - e\cos\frac{E_1 + E_2}{2}\cos\frac{E_2 - E_1}{2}\right),$$

also, wenn man

$$\frac{E_2 - E_1}{2} = g, \quad e\cos\frac{E_1 + E_2}{2} = \cos h, \quad \begin{pmatrix} 0 < g < \pi, \\ 0 \leqq h < \pi \end{pmatrix}$$

setzt,

$$r_1 + r_2 = 2a(1 - \cos g\cos h). \tag{VI; 6}$$

Ferner ist, wenn man die rechtwinkligen Koordinaten eines Bahnortes mit

$$\xi = r\cos v = a(\cos E - e), \quad \eta = r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\sin E$$

bezeichnet, das Quadrat der Sehne zwischen P_1 und P_2

$$s^2 = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2.$$

Da nun

$$\xi_2 - \xi_1 = a(\cos E_2 - \cos E_1) = -2a\sin\frac{E_2 - E_1}{2}\sin\frac{E_1 + E_2}{2},$$

$$\eta_2 - \eta_1 = a\sqrt{1 - e^2}(\sin E_2 - \sin E_1) = 2a\sqrt{1 - e^2}\sin\frac{E_2 - E_1}{2}\cos\frac{E_1 + E_2}{2},$$

also

$$s^2 = 4a^2\sin^2 g\left[\sin^2\frac{E_1 + E_2}{2} + (1 - e^2)\cos^2\frac{E_1 + E_2}{2}\right] = 4a^2\sin^2 g\sin^2 h,$$

so erhält man schließlich

$$s = 2a\sin g\sin h. \tag{VI; 7}$$

Andererseits liefert die KEPLERsche Gleichung für die beiden Örter

$$E_2 - e\sin E_2 = \varkappa\frac{t_2 - T}{\sqrt{a^3}}, \quad E_1 - e\sin E_1 = \varkappa\frac{t_1 - T}{\sqrt{a^3}},$$

also, nach Subtraktion,

$$2g - 2e\sin\frac{E_2 - E_1}{2}\cos\frac{E_1 + E_2}{2} = 2g - 2\sin g\cos h = \frac{\tau}{\sqrt{a^3}}. \tag{VI; 8}$$

Setzt man nun

(VI; 9) $$\varepsilon = h + g, \quad \delta = h - g, \quad \varepsilon - \delta = 2g,$$

so folgt aus (VI; 6, 7)

$$r_1 + r_2 + s = 2a[1 - \cos(h + g)] = 4a \sin^2 \frac{\varepsilon}{2},$$

$$r_1 + r_2 - s = 2a[1 - \cos(h - g)] = 4a \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

und aus (VI; 8)

$$\frac{\tau}{\sqrt{a^3}} = 2g - [\sin(h + g) - \sin(h - g)].$$

Es gilt also die LAMBERT*sche Gleichung*

(VI; 10) $$\boxed{\frac{\tau}{\sqrt{a^3}} = (\varepsilon - \sin\varepsilon) - (\delta - \sin\delta)},$$

wobei ε und δ durch

(VI; 11) $$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}}; \qquad \sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}}$$

bestimmt sind. Da nach bekannten Sätzen der Geometrie $r_1 + r_2 - s \geqq 0$ und (elliptische Bahnen vorausgesetzt) $r_1 + r_2 + s \leqq 4a$ ist, so sind die Radikanden niemals negativ und stets $\leqq 1$, ε und δ also stets reell.

Für Parabeln und Hyperbeln gelten diese Überlegungen nicht. Man kann aber dem LAMBERTschen Satz mit Hilfe von Reihenentwicklungen eine Form geben, die von der Bahngestalt unabhängig ist und für Parabeln und parabelnahe Ellipsen und Hyperbeln praktisch verwendbar ist. Man setze zur Abkürzung

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = x; \quad \sin\frac{\delta}{2} = y.$$

Dann gelten die Reihenentwicklungen

$$\varepsilon = 2 \arcsin x = 2\left[x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots\right],$$

$$\sin\varepsilon = 2\sin\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varepsilon}{2}} = 2\left[x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{3} - \frac{1\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{x^7}{5} - \cdots\right]$$

und entsprechende für δ und $\sin\delta$. Aus ihnen folgt durch Subtraktion

$$\varepsilon - \sin\varepsilon = \frac{4}{3}\left[x^3 + \frac{3}{10}x^5 + \frac{9}{56}x^7 + \frac{5}{48}x^9 + \cdots\right],$$

$$\delta - \sin\delta = \frac{4}{3}\left[y^3 + \frac{3}{10}y^5 + \frac{9}{56}y^7 + \frac{5}{48}y^9 + \cdots\right].$$

Setzt man für x und y die Werte (VI; 11) ein, und setzt man ferner zur Abkürzung

$$r_1 + r_2 + s = m; \quad r_1 + r_2 - s = n,$$

so ergibt sich die *LAMBERTsche Reihe*

$$\text{(VI; 12)} \qquad \boxed{6\tau = \left(m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{3}{10}\,\frac{m^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{5}{2}}}{4a} + \frac{9}{56}\,\frac{m^{\frac{7}{2}} - n^{\frac{7}{2}}}{(4a)^2} + \cdots}\,.$$

Für Parabelbahnen wird $\frac{1}{a} = 0$, und die Reihe beschränkt sich auf ihr erstes Glied. Das ist die *EULERsche Gleichung*

$$\text{(VI; 13)} \qquad \boxed{6\tau = m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(r_1 + r_2 + s)^3} - \sqrt{(r_1 + r_2 - s)^3}}\,.$$

Für Hyperbeln wird a negativ; die LAMBERTsche Reihe erhält also alternierende Vorzeichen, wenn man unter a den Betrag der großen Halbachse versteht. Für parabelnahe Bahnen konvergiert (VI; 12) rasch.

Die Formeln (VI; 12, 13) gelten zunächst für den Fall, daß die Differenz der wahren Anomalien beider Örter $v_2 - v_1 < \pi$ ist. Es gilt nämlich, wie aus (II; 13) folgt, für elliptische Bahnen

$$\sqrt{r_1}\cos\frac{v_1}{2} = \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{E_1}{2}, \quad \sqrt{r_1}\sin\frac{v_1}{2} = \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{E_1}{2},$$

$$\sqrt{r_2}\cos\frac{v_2}{2} = \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{E_2}{2}, \quad \sqrt{r_2}\sin\frac{v_2}{2} = \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{E_2}{2}$$

und daraus durch Kombination

$$\text{(VI; 14)} \qquad \sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{v_2 - v_1}{2} = a(\cos g - \cos h) = 2a\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\delta}{2},$$

$$\text{(VI; 15)} \qquad \sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{v_2 - v_1}{2} = a\sqrt{1 - e^2}\sin g = a\sqrt{1 - e^2}\sin\frac{\varepsilon - \delta}{2}.$$

Nun ist $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{h+g}{2}$ immer positiv und $<\pi$. Es gilt also stets $\sin\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Für $v_2 - v_1 < \pi$ ist die linke Seite von (VI; 14) positiv, also auch $\sin\frac{\delta}{2} > 0$, d.h., beide Quadratwurzeln in (VI; 11) erhalten, wie dies oben auch geschehen ist, das positive Vorzeichen. Ist dagegen $v_2 - v_1 > \pi$, so werden beide Seiten von (VI; 14) negativ. Es ist dann $\sin\frac{\delta}{2} < 0$, und die zweite der Quadratwurzeln (VI; 11) ist negativ zu nehmen. Die LAMBERTsche Gleichung hat also genauer die Gestalt

$$6\tau = \left(m^{\frac{3}{2}} \mp n^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{3}{40a}\left(m^{\frac{5}{2}} \mp n^{\frac{5}{2}}\right) + \cdots, \tag{VI; 16}$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn die Differenz der wahren Anomalien $<\pi$, das untere, wenn sie $>\pi$ ist. Für $v_2 - v_1 = \pi$ wird $n = 0$, da dann die Sehne s gleich der Summe $r_1 + r_2$ ist.

Die EULERsche Gleichung läßt sich natürlich auch direkt aus den Formeln für die Parabelbewegung ableiten. Wenn q die Periheldistanz bedeutet, so ist nach (IV; 10)

$$r_1 = q\sec^2\frac{v_1}{2} = q\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{v_1}{2}\right); \quad r_2 = q\sec^2\frac{v_2}{2} = q\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{v_2}{2}\right).$$

Setzt man für den Augenblick $\alpha_1 = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\frac{v_1}{2}$, $\alpha_2 = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\frac{v_2}{2}$, so ist

$$\text{(VI; 17)} \quad \begin{cases} \alpha_1^2 = r_1 - q, \quad \alpha_2^2 = r_2 - q, \\ q + \alpha_1\alpha_2 = q\left(1 + \mathrm{tg}\frac{v_1}{2}\,\mathrm{tg}\frac{v_2}{2}\right) = q\,\dfrac{\cos\frac{v_2 - v_1}{2}}{\cos\frac{v_1}{2}\cos\frac{v_2}{2}} = \sqrt{r_1 r_2}\cos f, \end{cases}$$

wenn man mit f die halbe Differenz der wahren Anomalien bezeichnet. Aus der kubischen Gleichung (III; 43) ergibt sich dann

$$\frac{\tau}{\sqrt{2}} = q^{\frac{3}{2}}\left[\mathrm{tg}\frac{v_2}{2} - \mathrm{tg}\frac{v_1}{2} + \frac{1}{3}\left(\mathrm{tg}^3\frac{v_2}{2} - \mathrm{tg}^3\frac{v_1}{2}\right)\right]$$

oder

$$\frac{3\tau}{\sqrt{2}} = 3q(\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_2^3 - \alpha_1^3) = (\alpha_2 - \alpha_1)(3q + \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) =$$

$$= \sqrt{\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2}\,(3q + \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) =$$

$$= \sqrt{r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f}\,\left(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2}\cos f\right),$$

wenn für α_1^2, α_2^2 und $\alpha_1\alpha_2$ die Werte (VI; 17) wieder eingesetzt werden. Nun ist aber in dem Dreieck zwischen der Sonne und den beiden Örtern der Parabelbahn nach dem Cosinussatz der ebenen Trigonometrie

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(v_2 - v_1) = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(2\cos^2 f - 1) =$$
$$= (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2\cos^2 f.$$

Setzt man nun wie oben $m = r_1 + r_2 + s$, $n = r_1 + r_2 - s$, so folgt

$$\text{(VI; 18)} \qquad 2\sqrt{r_1r_2}\cos f = \pm\sqrt{mn}; \quad r_1 + r_2 = \frac{m+n}{2},$$

und man erhält

$$\text{(VI; 19)} \qquad \frac{3\tau}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{m+n}{2} \mp \sqrt{mn}}\left(\frac{m+n}{2} \pm \frac{\sqrt{mn}}{2}\right)$$

oder, wie oben,

$$6\tau = \left(\sqrt{m} \mp \sqrt{n}\right)\left(m \pm \sqrt{mn} + n\right) = m^{\frac{3}{2}} \mp n^{\frac{3}{2}}.$$

Aus (VI; 18) folgt unmittelbar, daß das obere Zeichen für $f < \frac{\pi}{2}$, das untere für $f > \frac{\pi}{2}$ gilt.

49. *Übertragung der Sätze von Euler und Lambert auf das Geschwindigkeitsdreieck*

Der Eulersche Satz, der für die Parabelbewegung in jedem aus zwei Ortsvektoren gebildeten Dreieck gilt, läßt sich auch auf das *Geschwindigkeitsdreieck* übertragen, das von den zwei zugehörigen Geschwindigkeitsvektoren gebildet wird.

Bezeichnen wir mit V_1 und V_2 die zu den zwei Örtern P_1 und P_2 der Parabelbahn gehörigen Geschwindigkeiten und seien (Abb. 45) Q_1 und Q_2 die entsprechenden Punkte des Hodographen, so ist nach dem am Schluß von Abschn. 21 bewiesenen Satz der von den beiden Vektoren OQ_1 und OQ_2 eingeschlossene Winkel

$$f = \frac{1}{2}(v_2 - v_1),$$

und es gilt daher, wenn S die Länge der Sehne des Geschwindigkeitsdreiecks bedeutet,

$$\text{(VI; 20)} \qquad S^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos f.$$

Wird nun die Zeiteinheit so festgelegt, daß $\varkappa = 1$ ist, so gilt nach (III; 33) für die Parabelbewegung $r = \frac{2}{V^2}$; es ist also

$$\sqrt{r_1 r_2} = \frac{2}{V_1 V_2}, \quad 2\cos f = \frac{V_1^2 + V_2^2 - S^2}{V_1 V_2},$$

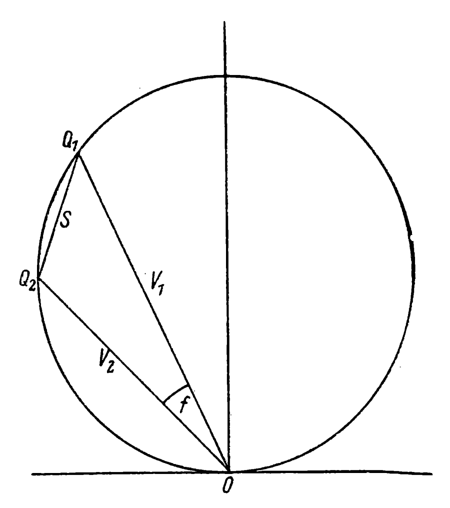


Abb. 45. Hodograph der Parabelbewegung. Geschwindigkeitsdreieck.

und man kann an Stelle der Formeln (VI; 18)

$$\pm\sqrt{mn} = 2\frac{V_1^2 + V_2^2 - S^2}{V_1^2 V_2^2} = 2(M^2 - N^2); \quad \frac{m+n}{2} = 2M^2$$

schreiben, wenn man zur Abkürzung

$$M = \sqrt{\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}}, \quad N = \frac{S}{V_1 V_2} \tag{VI; 21}$$

setzt. Nach (VI; 19) ist dann

$$3\tau = 2N(3M^2 - N^2), \tag{VI; 22}$$

was man auch in der Form

$$3i\tau = (M + iN)^3 - (M - iN)^3$$

schreiben kann. Diese Gleichung, in der die Verwandtschaft mit der EULERschen Gleichung deutlich hervortritt, ist reell, da beide Seiten rein imaginär sind.

Eine Übertragung des LAMBERTschen Satzes (VI; 12) auf das Geschwindigkeitsdreieck nach dem gleichen Prinzip läßt sich nicht ohne eine gewisse Willkür vornehmen. Sie führt aber auf folgende Weise zu einer einfach gebauten Reihenentwicklung:

Wenn wir den allgemeinen, insbesondere den elliptischen Fall der Bahnbewegung zugrunde legen, so ist, wie im Abschn. 21 bewiesen wurde, der Winkel zwischen zwei Geschwindigkeitsvektoren gleich $f + f'$, wenn $2f = v_2 - v_1$ die Differenz der beiden wahren Anomalien und $2f' = w_2 - w_1$ die Differenz der beiden antifokalen Anomalien bedeutet. Für die Sehne S im Geschwindigkeitsdreieck gilt also

$$S^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos(f+f'), \tag{VI; 23}$$

eine Gleichung, die im Fall der Parabel ($f' = 0$) in (VI; 20) übergeht. Im Ortsdreieck ist, wie früher,

$$s^2 = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2\cos^2 f,$$

also

$$\left\{\begin{aligned} 4r_1r_2\cos^2 f &= (r_1 + r_2 + s)\,(r_1 + r_2 - s) = mn,\\ 4r_1r_2\sin^2 f &= 4r_1r_2 - mn. \end{aligned}\right. \tag{VI; 24}$$

Andererseits ist in dem von den beiden antifokalen Distanzen r_1', r_2' gebildeten Dreieck, dessen dritte Seite ja ebenfalls die Sehne s ist,

$$s^2 = (r_1' + r_2')^2 - 4r_1'r_2'\cos^2 f',$$

also

$$4r_1'r_2'\cos^2 f' = (r_1' + r_2' + s)\,(r_1' + r_2' - s)$$

oder, da $r_1' = 2a - r_1$, $r_2' = 2a - r_2$,

$$\left\{\begin{aligned} 4r_1'r_2'\cos^2 f' &= (4a - m)\,(4a - n),\\ 4r_1'r_2'\sin^2 f' &= 4(2a - r_1)\,(2a - r_2) - (4a - m)\,(4a - n) =\\ &= 4r_1r_2 - mn. \end{aligned}\right. \tag{VI; 25}$$

Schließlich ist nach dem Energiesatz (III; 34)

$$V_1^2 = \frac{r_1'}{ar_1}, \quad V_2^2 = \frac{r_2'}{ar_2}, \quad \text{also} \quad r_1'r_2' = r_1r_2\,a^2\,V_1^2V_2^2$$

und somit nach (VI; 24, 25)

$$2\sqrt{r_1r_2}\cos f = \sqrt{mn}, \quad 2\sqrt{r_1r_2}\,a\,V_1V_2\cos f' = \sqrt{(4a-m)\,(4a-n)},$$

$$2\sqrt{r_1r_2}\sin f = \sqrt{4r_1r_2 - mn}, \quad 2\sqrt{r_1r_2}\,a\,V_1V_2\sin f' = \sqrt{4r_1r_2 - mn}.$$

Man erhält demnach aus (VI; 23)

$$\begin{aligned} 4r_1r_2\,a\,V_1V_2\cos(f+f') &= 2a\,r_1r_2(V_1^2 + V_2^2 - S^2) =\\ &= \sqrt{mn(4a-m)\,(4a-n)} - (4r_1r_2 - mn) \end{aligned}$$

oder

$$mn(4a - m)(4a - n) = [2a\, r_1 r_2 (V_1^2 + V_2^2 - S^2) + 4 r_1 r_2 - mn]^2,$$

woraus nach einfacher Rechnung folgt, wenn man wieder $m + n = 2(r_1 + r_2)$ setzt,

$$\text{(V; 26)} \quad mn\left[4a - 2(r_1 + r_2) + r_1 r_2\left(V_1^2 + V_2^2 + \frac{2}{a} - S^2\right)\right] = \\ = r_1^2 r_2^2 \left(V_1^2 + V_2^2 + \frac{2}{a} - S^2\right)^2.$$

Nun ist aber nach dem Energiesatz (III; 31), wenn, wie oben, $\varkappa = 1$ gesetzt wird,

$$V^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

also, wenn man $W^2 = V^2 + \dfrac{1}{a}$ einführt,

$$r = \frac{2}{W^2}.$$

Definiert man nun die Hilfsgrößen M und N in der Form

$$\text{(VI; 27)} \qquad M = \sqrt{\frac{1}{W_1^2} + \frac{1}{W_2^2}}, \quad N = \frac{S}{W_1 W_2},$$

die für den Fall der Parabel ($1/a = 0$) in (VI; 21) übergeht, so nimmt (VI; 26) die Gestalt

$$mn\left(1 - \frac{N^2}{a}\right) = 4(M^2 - N^2)^2$$

an, und man erhält statt (VI; 18) die Beziehungen

$$\text{(VI; 28)} \qquad m + n = 4M^2, \quad mn = \frac{4(M^2 - N^2)^2}{1 - \lambda N^2},$$

wo $\lambda = 1/a$ eine Konstante ist, die für parabelnahe Bahnen klein ist und für Parabeln verschwindet.

Durch eine umständliche Rechnung, die hier übergangen werden darf, läßt sich die LAMBERTsche Reihe (VI; 12) umformen, indem man aus (VI; 28) m und n als Funktionen von λ bestimmt und in (VI; 12) einsetzt. Man erhält dann schließlich die Reihe

$$\text{(VI; 29)} \quad 3\tau = 2N\left[(3M^2 - N^2) + \frac{3}{10}\lambda N^2 (5M^2 - 3N^2) + \right. \\ \left. + \frac{9}{56}(\lambda N^2)^2 (7M^2 - 5N^2) + \cdots\right],$$

die für $\lambda = 0$ in (VI; 22) übergeht.

50. *Berechnung der Bahnelemente aus Randwerten*

Im Abschn. 39 ist die Aufgabe gelöst worden, die Bahnelemente aus *Anfangswerten*, d.h. aus den Koordinaten des Ortsvektors $\mathfrak{p}_0$ und des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\mathfrak{p}}_0$ zur Epoche t_0 abzuleiten. Die entsprechende Aufgabe, aus *Randwerten*, d.h. aus den Koordinaten zweier zu den Zeiten t_1 und t_2 gehörenden Ortsvektoren $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ und der Zwischenzeit $\tau = \varkappa (t_2 - t_1)$ das System der Kegelschnittelemente zu bestimmen, ist nicht immer mit der gleichen Exaktheit und Eindeutigkeit lösbar. Wenn z.B. die beiden Ortsvektoren entgegengesetzt gerichtet sind, also zwei in bezug auf das Attraktionszentrum gegenüberliegenden Bahnpunkten zugehören, dann gibt es offenbar ein ganzes Büschel von Ebenen, in denen die Bahn liegen kann. In diesem Fall ist also eine eindeutige Lösung nicht vorhanden, und auch in benachbarten Fällen werden gewisse Bahnelemente, wie Neigung und Knotenlänge, nur mit erheblicher Unsicherheit ermittelt werden können. Abgesehen von diesen Ausnahmefällen, die in der Praxis kaum Bedeutung haben, besonders aber dann, wenn die beiden Ortsvektoren zu benachbarten Bahnpunkten gehören, also einen nicht sehr großen Bahnbogen und (im Falle elliptischer Bahnen) eine im Vergleich zur Umlaufszeit kleine Zwischenzeit einschließen, ist die Lösung eindeutig und ohne besondere Schwierigkeiten möglich.

Die klassische Methode der Bestimmung der Bahnelemente aus Randwerten geht von der Voraussetzung aus, daß der Parameter der Bahn bereits bekannt ist bzw. durch ein besonderes Verfahren berechnet worden ist, das im nächsten Abschnitt beschrieben werden soll.

Die beiden Ortsvektoren liefern zunächst unmittelbar die Lageelemente (Neigung und Knotenlänge) der Bahnebene, vorausgesetzt, daß die beiden Vektoren nicht kollinear, d.h. gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Sind

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2$$

die Koordinaten der gegebenen Ortsvektoren, so lautet die Gleichung der Bahnebene

$$(\mathfrak{p}\,[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

d.h., der Inhalt des von dem variablen Vektor $\mathfrak{p}\,(x, y, z)$ eines beliebigen Bahnpunktes und den beiden festen Vektoren $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ gebildeten Parallelepipeds muß verschwinden. Zur Bestimmung der Knotenlänge Ω und der Neigung i der Bahnebene benutzt man meistens Polarkoordinaten. Es ist nach (IV; 1)

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos b_1 \cos l_1, & x_2 &= r_2 \cos b_2 \cos l_2, \\ y_1 &= r_1 \cos b_1 \sin l_1, & y_2 &= r_2 \cos b_2 \sin l_2, \\ z_1 &= r_1 \sin b_1, & z_2 &= r_2 \sin b_2. \end{aligned} \tag{VI; 30}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man die Radiusvektoren r der beiden Örter sowie deren Längen l und Breiten b in dem gewählten Koordinatensystem. Aus (IV; 11) – siehe auch Abb. 39 – ergeben sich dann die Beziehungen

$$\text{(VI; 31)} \qquad \operatorname{tg} i \sin (l - \Omega) = \operatorname{tg} b,$$

$$\text{(VI; 32)} \qquad \operatorname{tg} u \cos i = \operatorname{tg} (l - \Omega),$$

aus denen i, Ω und die *Argumente der Breite* u_1, u_2 der beiden Örter folgen. Wendet man nämlich (VI; 31) auf $\mathfrak{p}_2$ an, so erhält man

$$\operatorname{tg} b_2 = \operatorname{tg} i \sin (l_2 - \Omega) = \operatorname{tg} i \sin [(l_1 - \Omega) + (l_2 - l_1)] =$$
$$= \operatorname{tg} i [\sin (l_1 - \Omega) \cos (l_2 - l_1) + \cos (l_1 - \Omega) \sin (l_2 - l_1)].$$

Da aber für $\mathfrak{p}_1$

$$\text{(VI; 33)} \qquad \operatorname{tg} i \sin (l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1,$$

so ist schließlich

$$\text{(VI; 34)} \qquad \operatorname{tg} i \cos (l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_2 - \operatorname{tg} b_1 \cos (l_2 - l_1)}{\sin (l_2 - l_1)}.$$

Die Gleichungen (VI; 33, 34) liefern i, Ω streng. Eine Lösung von größerer Symmetrie erhält man, wenn man

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2}, \quad \lambda = \frac{l_2 - l_1}{2}$$

setzt. Dann ergibt die Anwendung von (VI; 31) auf beide Örter

$$\operatorname{tg} i \sin (l - \Omega - \lambda) = \operatorname{tg} b_1,$$
$$\operatorname{tg} i \sin (l - \Omega + \lambda) = \operatorname{tg} b_2,$$

woraus man leicht die symmetrischen Formeln

$$\operatorname{tg} i \sin (l - \Omega) = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} b_1 + \operatorname{tg} b_2) \sec \lambda,$$

$$\operatorname{tg} i \cos (l - \Omega) = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} b_2 - \operatorname{tg} b_1) \operatorname{cosec} \lambda$$

ableitet. Schließlich kann man i und Ω auch direkt als Funktionen der rechtwinkligen Ortskoordinaten bestimmen. Multipliziert man (VI; 31) mit $r \cos b$, so findet man wegen (VI; 30)

$$y \operatorname{tg} i \cos \Omega - x \operatorname{tg} i \sin \Omega = z.$$

Wendet man diese Formel, die Gleichung der Bahnebene in rechtwinkligen Koordinaten, auf beide Örter an, so ergeben sich zwei Gleichungen für tg i cos ☊ und tg i sin ☊, aus denen

$$\operatorname{tg} i \cos \Omega = \frac{x_1 z_2 - z_1 x_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2}; \quad \operatorname{tg} i \sin \Omega = \frac{y_1 z_2 - z_1 y_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

folgt. Diese Lösung ist besonders für Maschinenrechnung bequem.

Aus (VI; 32) erhält man die Argumente der Breite, u_1 und u_2, deren Differenz $u_2 - u_1$ der Differenz der wahren Anomalien $v_2 - v_1$ gleich ist.

Immer unter der Voraussetzung, daß der Bahnparameter p bekannt ist, findet man aus der Bahngleichung für beide Örter

$$\text{(VI; 35)} \qquad \frac{p}{r_1} - 1 = e \cos v_1 = m_1; \quad \frac{p}{r_2} - 1 = e \cos v_2 = m_2.$$

Schreibt man die zweite Gleichung

$$m_2 = e \cos[v_1 + (v_2 - v_1)] = e \cos[v_1 + (u_2 - u_1)] =$$
$$= m_1 \cos(u_2 - u_1) - e \sin v_1 \sin(u_2 - u_1),$$

so folgen e, v_1 und v_2 aus

$$\text{(VI; 36)} \qquad \begin{aligned} e \cos v_1 &= m_1, \\ e \sin v_1 &= \frac{m_1 \cos(u_2 - u_1) - m_2}{\sin(u_2 - u_1)}, \\ v_2 &= v_1 + u_2 - u_1. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\text{(VI; 37)} \qquad \begin{aligned} f &= \frac{u_2 - u_1}{2} = \frac{v_2 - v_1}{2}, \\ v_1 &= v - f, \quad v_2 = v + f, \end{aligned}$$

so leitet man aus (VI; 35) die symmetrische Lösung

$$\text{(VI; 38)} \qquad \begin{aligned} e \cos v &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \sec f, \\ e \sin v &= \frac{1}{2}(m_2 - m_1) \operatorname{cosec} f \end{aligned}$$

zur Bestimmung von e, v und damit von v_1, v_2 nach (VI; 37) ab.

Nunmehr sind auch die große Halbachse

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

und der Perihelabstand vom Knoten

$$\omega = u_1 - v_1 = u_2 - v_2$$

bekannt. Das letzte der noch zu bestimmenden Elemente, die Periheldurchgangszeit T, erhält man mit Hilfe der KEPLERschen Gleichung und ihrer Analoga. Im Fall elliptischer Bahnen bestimmt man die exzentrische Anomalie E für einen der beiden Örter aus (II; 14 oder 15)

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{v}{2}, \quad (\sin\varphi = e)$$

bzw., wenn e klein ist, also v und E nur wenig voneinander verschieden sind, nach (III; 61)

$$\sin\frac{v-E}{2} = \sqrt{\frac{r}{p}}\sin\frac{\varphi}{2}\sin v.$$

Die Perihelzeit ergibt sich dann aus der KEPLERschen Gleichung

$$\varkappa(t-T) = (E - e\sin E)\sqrt{a^3}.$$

Man kann diese Rechnung für beide Örter durchführen und hat damit eine wichtige Kontrolle.

G. MERTON löst die Aufgabe der Elementenbestimmung aus Randwerten auf folgende elegante Weise: Es sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_2 - \frac{(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)}{r_1^2}\mathfrak{p}_1 &= \mathfrak{p}_2 - \frac{r_2}{r_1}\cos(u_2 - u_1)\,\mathfrak{p}_1 = \\ &= \mathfrak{p}_2 - \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1^2}\mathfrak{p}_1 \end{aligned} \qquad \text{(VI; 39)}$$

ein Hilfsvektor (MERTONscher Vektor), dessen Koordinaten mit denen von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ bekannt sind. Es gilt dann

$$(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_0) = 0, \quad \text{d.h.} \quad |[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_0]| = r_1 r_0,$$

$$[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_0] = [\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2], \quad \text{also auch} \quad |[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]| = r_1 r_0,$$

$$(\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_0) = r_0^2 = (\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_2) = (\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2) - \frac{(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)^2}{r_1^2}$$

oder

$$r_0^2 = \frac{1}{r_1^2}[r_1^2 r_2^2 - (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)^2].$$

Man erhält dann, ohne den oben beschrittenen Umweg über die Polarkoordinaten l, b und die Lagekoordinaten i, Ω der Bahnebene,

$$\sin(u_2 - u_1) = \sin(v_2 - v_1) = \frac{|[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]|}{r_1 r_2} = \frac{r_1 r_0}{r_1 r_2} = \frac{r_0}{r_2},$$

$$\cos(u_2 - u_1) = \cos(v_2 - v_1) = \frac{(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)}{r_1 r_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1 r_2},$$

$$\operatorname{tg} 2f = \frac{r_0 r_1}{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2},$$

worauf e, v_1, v_2 direkt nach (VI; 36 oder 38) bestimmt werden können, sofern der Parameter der Bahn als bekannt angesehen werden darf.

Die Bahnlagekoordinaten i, Ω, ω findet man sodann aus den GAUSSschen Gleichungen (Abschn. 33), indem man die Vektoren mit den Koordinaten (IV; 18)

$$\mathfrak{P}(p_x, p_y, p_z); \quad \mathfrak{Q}(q_x, q_y, q_z)$$

einführt. Es ist dann wegen (IV; 16)

$$\mathfrak{p}_1 = r_1(\mathfrak{P}\cos u_1 + \mathfrak{Q}\sin u_1); \quad \mathfrak{p}_2 = r_2(\mathfrak{P}\cos u_2 + \mathfrak{Q}\sin u_2)$$

oder, wenn man nach (VI; 39) $\mathfrak{p}_0$ einführt,

$$\mathfrak{p}_0 = r_2(\mathfrak{P}\cos u_2 + \mathfrak{Q}\sin u_2) - r_1(\mathfrak{P}\cos u_1 + \mathfrak{Q}\sin u_1)\frac{r_2}{r_1}\cos(u_2 - u_1) =$$

$$= \frac{r_2}{\sin(u_2 - u_1)}\{\mathfrak{P}[\cos u_2 - \cos u_1 \cos(u_2 - u_1)] +$$

$$+ \mathfrak{Q}[\sin u_2 - \sin u_1 \cos(u_2 - u_1)]\}.$$

Setzt man hierin $u_2 = u_1 + (u_2 - u_1)$, so erhält man

$$\mathfrak{p}_0 = r_0(\mathfrak{Q}\cos u_1 - \mathfrak{P}\sin u_1).$$

Multipliziert man nun die Gleichungen

	(I)	(II)
$\frac{\mathfrak{p}_1}{r_1} = \mathfrak{P}\cos u_1 + \mathfrak{Q}\sin u_1$	$\cos v_1$	$\sin v_1$
$\frac{\mathfrak{p}_0}{r_0} = \mathfrak{Q}\cos u_1 - \mathfrak{P}\sin u_1$	$-\sin v_1$	$\cos v_1$

mit den Faktoren (I) bzw. (II) und addiert, so folgt, mit $u_1 - v_1 = \omega$,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\cos\omega + \mathfrak{P}\sin\omega = \frac{\mathfrak{p}_1}{r_1}\cos v_1 - \frac{\mathfrak{p}_0}{r_0}\sin v_1,$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{Q}\cos\omega - \mathfrak{P}\sin\omega = \frac{\mathfrak{p}_1}{r_1}\sin v_1 + \frac{\mathfrak{p}_0}{r_0}\cos v_1.$$

Die Koordinaten a_x, a_y, a_z bzw. b_x, b_y, b_z der Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind numerisch durch die Koordinaten von $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_0$ und durch v_1 gegeben. Setzt man andererseits

die Koordinaten von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nach (IV; 18) ein, so bestätigt man leicht die Gültigkeit folgender Identitäten:

$$\begin{aligned}
\sin i \sin \omega &= a_z \cos \varepsilon - a_y \sin \varepsilon,\\
\sin i \cos \omega &= b_z \cos \varepsilon - b_y \sin \varepsilon,\\
-\cos i \sin \Omega &= a_x \sin \omega + b_x \cos \omega,\\
\cos \varepsilon \sin \Omega &= a_y \cos \omega - b_y \sin \omega,\\
\cos \Omega &= a_x \cos \omega - b_x \sin \omega,
\end{aligned}$$

aus denen ω, Ω, i der Reihe nach bestimmt werden können.

Im Fall parabolischer Bahnen wird man statt des Parameters p den Perihelabstand $q = \frac{p}{2}$ benutzen, und es ist

$$r_1 = \frac{q}{\cos^2 \frac{v_1}{2}}, \quad r_2 = \frac{q}{\cos^2 \frac{v_2}{2}} = \frac{q}{\cos^2\left(\frac{v_1}{2} + f\right)}. \tag{VI; 40}$$

Es bestehen also die beiden Beziehungen

$$\frac{\cos \frac{v_1}{2}}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}}; \quad \frac{\cos \frac{v_2}{2}}{\sqrt{q}} \cos f - \frac{\sin \frac{v_2}{2}}{\sqrt{q}} \sin f = \frac{1}{\sqrt{r_2}},$$

aus denen man $\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{v_1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{q}} \sin \frac{v_1}{2}$ und damit q, v_1 und $v_2 = v_1 + 2f$ bestimmen kann. Es ist also, ebenso wie im Fall einer Kreisbahn, wo $p = a = r_1 = r_2$, auch im Parabelfall nicht nötig, den im nächsten Abschnitt zu beschreibenden Weg zur Berechnung des Parameters zu beschreiten. Hier genügen zur Bestimmung von q und v_1 die beiden Gleichungen (VI; 40), während im elliptischen und hyperbolischen Fall die beiden Gleichungen (VI; 35) *drei* Unbekannte (p, v_1, e) enthalten, so daß man, um sie verwenden zu können, eine von ihnen (p) als gegeben voraussetzen muß.

Die Perihelzeit bestimmt man bei parabolischen Bahnen direkt aus der Gleichung (III; 43). Bei parabelnahen Ellipsen oder Hyperbeln wird man auf die Formeln der Abschn. 36, 37 zurückgreifen, bei Hyperbeln mit großer Exzentrizität auf (III; 51).

51. *Das Verhältnis Sektor:Dreieck*

Alle im vorigen Abschnitt gegebenen Rechenvorschriften zur Bestimmung der Kegelschnittelemente aus Randwerten beruhen, wenn wir Parabel- und Kreisbahnen ausnehmen, auf der Voraussetzung, daß der Bahnparameter p bekannt

sei. Das Problem, p mit Hilfe der gegebenen Daten der Randwertaufgabe zu berechnen, ist mit gewissen Schwierigkeiten verknüpft, die im wesentlichen davon herrühren, daß p durch die Konstante des Flächensatzes bestimmt ist, also von den Koordinaten der Geschwindigkeit abhängt, die in den Daten des Randwertproblems nicht enthalten sind.

Natürlich ist es möglich – dies möge der Vollständigkeit wegen hier erwähnt werden – den Parameter aus *drei* Bahnörtern zu berechnen. Dann sind drei Gleichungen (VI; 35) vorhanden, aus denen man die Exzentrizität e eliminieren kann. Schreibt man nämlich

$$\begin{array}{l|c} \dfrac{p}{r_1} - 1 = e \cos v_1 & \sin (v_3 - v_2) \\[2ex] \dfrac{p}{r_2} - 1 = e \cos v_2 & -\sin (v_3 - v_1) \\[2ex] \dfrac{p}{r_3} - 1 = e \cos v_3 & \sin (v_2 - v_1) \end{array}$$

und multipliziert diese Gleichungen mit den am Rande vermerkten Faktoren, so erhält man

$$\frac{p}{r_1} \sin (v_3 - v_2) - \frac{p}{r_2} \sin (v_3 - v_1) + \frac{p}{r_3} \sin (v_2 - v_1) =$$
$$= \sin (v_3 - v_2) - \sin (v_3 - v_1) + \sin (v_2 - v_1)$$

oder, wenn man die doppelten Inhalte der von den Vektoren $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_j$ eingeschlossenen Dreiecksflächen mit

$$[r_i r_j] = r_i r_j \sin (v_j - v_i) = -[r_j r_i], \quad (v_j > v_i)$$

bezeichnet,

$$\text{(VI; 41)} \qquad p = \frac{r_1 [r_2 r_3] - r_2 [r_1 r_3] + r_3 [r_1 r_2]}{[r_2 r_3] - [r_1 r_3] + [r_1 r_2]} = \frac{\Sigma\, r_i [r_j r_k]}{\Sigma\, [r_j r_k]},$$

wobei die Folge i, j, k bei der Summation die drei zyklischen Permutationen der Folge 1, 2, 3 durchläuft. Diese schöne und symmetrisch gebaute Formel erweist sich aber für die praktische Rechnung als ungeeignet: Sie hat nämlich, wenn die Zwischenzeiten klein sind (und das ist bei weitaus den meisten Anwendungen der Fall), die Form eines Quotienten aus kleinen Größen, da der Nenner, wie geometrisch evident ist, den doppelten Inhalt des von den drei Planetenörtern gebildeten Dreiecks wiedergibt, einer Fläche also, die im Vergleich zu den Dreiecksflächen selbst von geringerer Größenordnung ist.

Eine sehr genaue Methode der Bestimmung des Parameters aus Randwerten ist folgende: Ist $\tau = \varkappa (t_2 - t_1)$ die Zwischenzeit, so ist nach dem Flächensatz

der Inhalt S des zwischen den Ortsvektoren $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ eingeschlossenen Kegelschnittsektors

$$S = \frac{1}{2}\tau\sqrt{p}.$$

Diese Größe übertrifft bei kleinen Zwischenzeiten den Flächeninhalt

$$D = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1)$$

des von den Ortsvektoren gebildeten Dreiecks nur wenig. Das *Verhältnis Sektor:Dreieck*,

$$\gamma = \frac{S}{D} = \frac{\tau\sqrt{p}}{r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1)} \tag{VI; 42}$$

ist für $v_2 - v_1 < \pi$ stets positiv und bei kleinem τ nur wenig größer als die Einheit. Ist γ bekannt, so läßt sich der Bahnparameter aus

$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1)}{\tau} \cdot \gamma \tag{VI; 43}$$

berechnen. Das Problem reduziert sich also auf die Aufgabe der Bestimmung von γ. Es wird gezeigt werden, daß diese Größe sich aus einer leicht lösbaren transzendenten Gleichung berechnen läßt.

Drückt man nach (V; 12) den Ortsvektor $\mathfrak{p}_2$ durch $\mathfrak{p}_1$ und $\dot{\mathfrak{p}}_1$ mit Hilfe der Größen F und G aus, so ist das skalare Produkt

$$(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1) = r_1^2(F + \sigma_1 G), \tag{VI; 44}$$

wenn man, wie früher, $\sigma_1 = \frac{1}{r_1^2}(x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1 + z_1\dot{z}_1)$ setzt. Ferner ist nach (V; 75)

$$\frac{r_2}{r_1} = \Delta = F + \sigma_1 G + \frac{\vartheta_1}{\mu}(1 - F). \tag{VI; 45}$$

Schließlich erhält man den Betrag des Vektorprodukts $[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]$ aus

$$[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]^2 = \begin{vmatrix} (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1) & (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \\ (\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_1) & (\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2) \end{vmatrix} = r_1^4\,[\Delta^2 - (F + \sigma_1 G)^2].$$

Da nach (V; 76) und wegen $\vartheta = \omega - \sigma^2$

$$\Delta^2 = F^2 + 2\sigma_1 FG + \omega_1 G^2 = (F + \sigma_1 G)^2 + \vartheta_1 G^2,$$

so ist also

$$|[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]| = r_1 r_2 |\sin(v_2 - v_1)| = r_1^2\sqrt{\vartheta_1}\,|G|. \tag{VI; 46}$$

Setzt man zur Abkürzung $v_2 - v_1 = 2f$ und beschränkt sich auf $f \leqq \frac{\pi}{2}$, so folgt aus (VI; 44, 46)

$$\Delta \cos 2f = F + \sigma_1 G, \tag{VI; 47}$$

$$\Delta \sin 2f = \sqrt{\vartheta_1}\, G. \tag{VI; 48}$$

Aus (VI; 46) ergibt sich ferner, wenn man (V; 18) berücksichtigt,

$$r_1 r_2 \sin 2f = \sqrt{p}\, G$$

und somit nach (VI; 42)

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \tag{VI; 49}$$

Die Aufgabe der Bestimmung des Verhältnisses Sektor : Dreieck ist damit auf das Problem zurückgeführt, die Entwicklungsgröße G durch die gegebenen Daten des Randwertproblems auszudrücken. Das gelingt mit Hilfe der Gleichungen (V; 70)

$$F = 1 - c_2 \xi_1 z^2; \quad G = \tau (1 - c_3 \xi_1 z^3), \tag{VI; 50}$$

in denen $\xi_1 = \tau^2 r_1^{-3}$ gesetzt ist und z die Lösung der Hauptgleichung (V; 51) für den Übergang von $\mathfrak{p}_1$ auf $\mathfrak{p}_2$ bedeutet. Setzt man die Differenz der exzentrischen Anomalien

$$\lambda = E_2 - E_1 = 2g,$$

so ist auf Grund der Definition der c-Funktionen und nach (V; 80)

$$c_2 = \frac{1 - \cos 2g}{(2g)^2}; \quad c_3 = \frac{2g - \sin 2g}{(2g)^3}; \quad z = \frac{2g}{\tau \sqrt{\varrho_1}}$$

zu setzen, wobei g gegebenenfalls auch null (Parabel) oder imaginär (Hyperbel) sein darf, ohne daß c_2, c_3 und z ihre Eigenschaft als reelle Größen einbüßen. Aus (VI; 50) erhält man dann

$$1 - F = \frac{1 - \cos 2g}{(2g)^2} \cdot \mu_1 \tau^2 \cdot \frac{(2g)^2}{\varrho_1 \tau^2} = 2 \sin^2 g \cdot \frac{\mu_1}{\varrho_1}, \tag{VI; 51}$$

$$\frac{G}{\tau} = 1 - \frac{2g - \sin 2g}{(2g)^3} \cdot \mu_1 \tau^2 \cdot \frac{(2g)^3}{\varrho_1 \sqrt{\varrho_1}\, \tau^3} = \tag{VI; 52}$$

$$= 1 - (2g - \sin 2g) \frac{\mu_1}{\varrho_1 \sqrt{\varrho_1}\, \tau}.$$

Subtrahiert man (VI; 47) von (VI; 45), so ergibt sich

$$\Delta (1 - \cos 2f) = 2\Delta \sin^2 f = \frac{\vartheta_1}{\mu_1} (1 - F)$$

oder, wenn man ϑ_1 durch (VI; 48) eliminiert,

$$2\Delta \sin^2 f = \frac{\Delta^2 \sin^2 2f}{\mu_1 G^2} (1 - F),$$

woraus

$$1 - F = \frac{\mu_1 G^2}{2\Delta \cos^2 f} \tag{VI; 53}$$

als wichtige Beziehung zwischen F, G und den Daten des Randwertproblems folgt. Berechnet man nun ϱ_1 aus (VI; 51, 53):

$$\varrho_1 = \frac{2\mu_1 \sin^2 g}{1 - F} = \frac{4\Delta \sin^2 g \cos^2 f}{G^2} \tag{VI; 54}$$

und setzt dies in (VI; 52) ein, so entsteht

$$\begin{aligned} \frac{G}{\tau} &= 1 - \frac{\mu_1}{\tau} \cdot \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} \cdot \left(\frac{G}{2\sqrt{\Delta}\cos f}\right)^3 = \\ &= 1 - \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} \cdot \frac{\xi_1}{(2\sqrt{\Delta}\cos f)^3} \cdot \left(\frac{G}{\tau}\right)^3 \end{aligned} \tag{VI; 55}$$

als Beziehung zwischen G und g. Eine zweite, davon unabhängige Gleichung zwischen diesen beiden Größen ergibt sich aus der Identität (V; 16)

$$2\mu_1 = \varrho_1 + \vartheta_1 + \sigma_1^2.$$

Ersetzt man nämlich ϱ_1 durch (VI; 54) und bestimmt man aus (VI; 48, 47)

$$\vartheta_1 = \left(\frac{\Delta \sin 2f}{G}\right)^2; \quad \sigma_1 = \frac{\Delta \cos 2f - F}{G}, \tag{VI; 56}$$

so liefert diese Identität eine quadratische Gleichung für $1 - F$, deren Lösungen man nach einfacher Rechnung in der Form

$$\begin{aligned} 1 - F &= 1 + \Delta \mp 2\sqrt{\Delta}\cos f \cos g = \\ &= 1 + \Delta \mp 2\sqrt{\Delta}\cos f\left(1 - 2\sin^2\frac{g}{2}\right) \end{aligned} \tag{VI; 57}$$

erhält. Ist die Zwischenzeit τ klein, so ist stets das negative Zeichen vor der Wurzel zu nehmen, da dann $1 - F$, f und g klein sind und Δ nahezu gleich der Einheit ist. Vergleicht man (VI; 57) mit (VI; 53), so findet man als zweite Beziehung zwischen G und g

$$\left(\frac{G}{\tau}\right)^2 = \frac{(2\sqrt{\Delta}\cos f)^3}{\xi_1}\left[\frac{1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta}\cos f}{4\sqrt{\Delta}\cos f} + \sin^2\frac{g}{2}\right]. \tag{VI; 58}$$

Führt man als Abkürzungen für bekannte Größen die in der klassischen Literatur üblichen und in den Koordinaten der beiden Örter symmetrischen Ausdrücke

(VI; 59)
$$l = \frac{1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta}\cos f}{4\sqrt{\Delta}\cos f} = \frac{r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f}{4\sqrt{r_1 r_2}\cos f} = \frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2}\cos f} - \frac{1}{2},$$
$$m = \frac{\xi_1}{\left(2\sqrt{\Delta}\cos f\right)^3} = \frac{\tau^2}{\left(2\sqrt{r_1 r_2}\cos f\right)^3}$$

ein, so erhält man für $\frac{\tau}{G} = y$ statt (VI; 55, 58) die beiden Gleichungen

(VI; 60)
$$y^3 - y^2 = m\frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} = m\,W(g),$$
$$y^2 = \frac{m}{l + \sin^2\frac{g}{2}} = \frac{m}{l + w(g)}$$

mit

$$W = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}; \quad w = \sin^2\frac{g}{2},$$

aus denen y durch Elimination von g zu bestimmen sein wird. Das Verfahren der Elimination wird dadurch erleichtert, daß W sich als Funktion von w schreiben und tabulieren läßt. Man geht etwa mit einem plausiblen Näherungswert von w in die Gleichung

(VI; 61)
$$y = 1 + W(w) \cdot (l + w)$$

ein, die entsteht, wenn man die erste Gleichung (VI; 60) durch die zweite dividiert. Mit dem so erhaltenen genäherten y berechnet man dann w aus

(VI; 62)
$$w = \frac{m}{y^2} - l$$

neu und benutzt (VI; 61, 62) abwechselnd so lange, bis die Rechnung steht. In der Praxis ist es selten schwierig, brauchbare Näherungswerte w für diesen Iterationsprozeß zu finden, da man – je nach der Natur des Problems – über die Bahneigenschaften des Himmelskörpers in dieser oder jener Hinsicht einige Vorstellungen hat. Für Hyperbeln ist g imaginär und daher w negativ; für Parabeln ist $w = 0$, für Ellipsen positiv. Für Kreise ist $g = f$ und daher $w = \sin^2\frac{f}{2}$ bekannt. Bei Planetoidenbahnen, die meist schwach exzentrisch sind, wird man daher mit diesem Anfangswert beginnen, während man bei Kometen, die meist in parabelähnlichen Bahnen laufen, die Iteration mit $w = 0$ einleiten wird.

Die Funktion $W(w)$ leitet man folgendermaßen ab: Differenziert man

$$W \sin^3 g = 2g - \sin 2g,$$

so ergibt sich

$$dW \sin^3 g = dg(2 - 2\cos 2g - 3W \sin^2 g \cos g) = dg \sin^2 g (4 - 3W \cos g)$$

oder

$$\frac{dW}{dg} = \frac{4 - 3W\cos g}{\sin g}.$$

Andererseits ist $\frac{dw}{dg} = \frac{1}{2} \sin g$, also

$$\text{(VI; 63)} \qquad \frac{dW}{dw} = \frac{8 - 6W\cos g}{\sin^2 g} = \frac{4 - 3W(1 - w)}{2w(1 - w)}.$$

Für $g \to 0$ strebt $W = \frac{2g - \sin 2g}{(2g)^3} \cdot 8 \left(\frac{g}{\sin g}\right)^3 = 8 \frac{c_3[(2g)^2]}{[c_1(g^2)]^3}$ gegen $\frac{4}{3}$, da ja die Funktionen c_ν für verschwindendes Argument gegen $\frac{1}{\nu!}$ streben. Setzt man demnach

$$W = \frac{4}{3}[1 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \cdots], \quad \frac{dW}{dw} = \frac{4}{3}[\alpha_1 + 2\alpha_2 w + 3\alpha_3 w^2 + \cdots]$$

und führt diese Reihen in (VI; 63) ein, so lassen sich die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ durch Koeffizientenvergleichung bestimmen, und man erhält

$$\text{(VI; 64)} \qquad W(w) = \frac{4}{3}\left[1 + \frac{6}{5}w + \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}w^2 + \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 9}w^3 + \cdots\right].$$

Diese Reihe ist von der Entwicklung

$$\frac{4}{3}\left[1 + \frac{6}{5}w + \left(\frac{6}{5}w\right)^2 + \cdots\right] = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{6}{5}w}$$

nur um Glieder von der Ordnung w^2 verschieden. Setzt man also

$$\text{(VI; 65)} \qquad W = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{6}{5}(w - n)},$$

so ist

$$\text{(VI; 66)} \qquad n = \frac{10}{9W} - \frac{5}{6} + w = \frac{2}{35}w^2 + \frac{52}{1575}w^3 + \cdots$$

eine kleine Korrektion, die in praktischen Fällen in erster Näherung gleich null gesetzt werden darf. Bei ersten Bahnbestimmungen von Planetoiden ist nur selten $g > 10°$, also $w > 0.0076 \approx \frac{3}{400}$. Man wird also meistens $n < 0.0000033$ annehmen dürfen.

Eine bedeutend rascher konvergente Reihe für $W(w)$, die wir schon früher (IV; 65) ohne Beweis benutzt haben, ergibt sich aus (VI; 64) durch folgenden Kunstgriff:

Man setze

$$W(w) = \frac{4}{3} F_0(w).$$

Dann ist $F_0(w)$ das Anfangsglied einer Folge von Reihen

$$F_n(w) = 1 + \frac{6}{2n+5} w + \frac{6 \cdot 8}{(2n+5)(2n+7)} w^2 + \\ + \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{(2n+5)(2n+7)(2n+9)} w^3 + \cdots,$$

für die, wie man durch Einsetzen leicht verifiziert, die Funktionalgleichung

$$(1 - w) F_{n-1} = 1 - \frac{2n-3}{2n+3} w F_n$$

gilt. Es ist also speziell

$$(1 - w) F_0 = 1 - \frac{(-1)}{5} w F_1,$$

$$(1 - w) F_1 = 1 - \frac{1}{7} w F_2,$$

$$(1 - w) F_2 = 1 - \frac{3}{9} w F_3,$$

$$(1 - w) F_3 = 1 - \frac{5}{11} w F_4,$$

Drückt man nun in jeder dieser Rekursionsformeln die Funktion F der rechten Seite durch die folgende Gleichung aus, so erhält man

$$(1 - w) F_0 = \\ = 1 + \frac{1}{5} \frac{w}{1-w} \left\{1 - \frac{1}{7} \frac{w}{1-w} \left[1 - \frac{3}{9} \frac{w}{1-w} \left(1 - \frac{5}{11} \frac{w}{1-w} \cdots\right)\right]\right\},$$

also, wenn

$$w = \sin^2 \frac{g}{2}, \quad 1 - w = \cos^2 \frac{g}{2}, \quad \frac{w}{1-w} = \operatorname{tg}^2 \frac{g}{2}$$

gesetzt wird,

$$\text{(VI; 67)} \quad W = \frac{4}{3} F_0 =$$

$$= 4 \sec^2 \frac{g}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} \operatorname{tg}^2 \frac{g}{2} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \operatorname{tg}^4 \frac{g}{2} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} \operatorname{tg}^6 \frac{g}{2} - \cdots \right].$$

In der Praxis zieht man es aber vor, statt dieser nach Potenzen von $\zeta = \operatorname{tg}^2 \frac{g}{2}$ fortschreitenden Reihe die Formeln (VI; 64–66) zu benutzen, weil der Zusammenhang (VI; 62) zwischen y und w einfacher ist als der entsprechende zwischen y und ζ. Setzt man (VI; 65, 62) in (VI; 61) ein, so erhält man

$$y = 1 + \frac{4}{3} \frac{m}{y^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{6}{5}(w - n)} = 1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{5}{6} \frac{m}{y^2}}{\frac{5}{6} + l + n - \frac{m}{y^2}}$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\text{(VI; 68)} \qquad h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + n}$$

einführt,

$$y = 1 + \frac{10}{9} \frac{h}{y^2 - h},$$

woraus die Gleichung

$$\text{(VI; 69)} \qquad \boxed{y^3 - y^2 - hy = \frac{1}{9} h}$$

folgt. Beginnt man das sehr rasch konvergierende Näherungsverfahren zur Auflösung dieser Gleichung mit der Hypothese $n = 0$, $h = \dfrac{m}{\frac{5}{6} + l}$, so liefert (VI; 69) sofort einen guten Näherungswert für y, mit dem man w nach (VI; 62), n nach (VI; 66) oder aus einem für diesen Zweck konstruierten Täfelchen (Anhang A V) neu bestimmt.

Für die Auflösung der kubischen Gleichung (VI; 69) selbst, die in Wirklichkeit transzendent ist, da h die von y abhängige Größe n enthält, sind zahlreiche Methoden vorgeschlagen worden; über die wichtigsten soll im nächsten Abschnitt berichtet werden.

52. *Auflösung der Gleichung für das Verhältnis Sektor: Dreieck*

Es liegt nahe, die kubische Gleichung (VI; 69) nach den aus der Algebra bekannten Verfahren auszulösen. Setzt man

$$\gamma = u + \frac{1}{3},$$

so nimmt sie die Normalform

$$u^3 - \alpha u = \beta \tag{VI; 70}$$

mit $\alpha = \frac{1}{3}(1 + 3h)$, $\beta = \frac{2}{27}(1 + 6h)$ an. Die Auflösung dieser Gleichung kann auf ähnliche Weise erfolgen wie die von (III; 43), die in Abschn. 34 gezeigt worden ist. Setzt man nämlich

$$u = v\sqrt{\frac{\alpha}{3}},$$

so erhält man statt (VI; 70)

$$v^3 - 3v = b = \sqrt{\frac{27\beta^2}{4\alpha^3}}.$$

Die CARDANIsche Formel liefert dann

$$v = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}}. \tag{VI; 71}$$

Nun sei

$$b = \frac{2}{\sin\psi}, \quad \frac{b^2}{4} - 1 = \operatorname{ctg}^2\psi = \frac{27\beta^2 - 4\alpha^3}{4\alpha^3} = 3h\frac{1 + 3h - (3h)^2}{(1 + 3h)^3}. \tag{VI; 72}$$

In praktisch vorkommenden Fällen wird die Diskriminante

$$f(3h) = 3h\frac{1 + 3h - (3h)^2}{(1 + 3h)^2}$$

positiv sein. Beschränken wir uns nämlich, was immer erlaubt ist, auf die Fälle $v_2 - v_1 < \pi$, so ist $\gamma > 1$, also

$$h = \gamma\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma + \frac{1}{9}} > 0.$$

Die Diskriminante ist demnach positiv, wenn $3h > 0$ zwischen den beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 - x = 1$ liegt. Es muß also

$$0 < h < \frac{1}{6}\left(1 + \sqrt{5}\right) \approx 0.54 \tag{VI; 73}$$

sein, was in der überwiegenden Mehrzahl aller praktischen Fälle zutreffen wird. (VI; 71) ist dann die einzige reelle Wurzel der Gleichung (VI; 69). Darüber hinaus kann man aber aus der Form dieser Gleichung schließen, daß sie nicht mehr als eine *positive* Wurzel besitzt. Ein Satz von DESCARTES besagt nämlich, daß die Anzahl von positiven Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

höchstens so groß ist wie die Anzahl der Vorzeichenwechsel zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern dieses Ausdrucks. Wegen $h > 0$ findet in (VI; 69) aber nur ein Vorzeichenwechsel statt. Selbst wenn die Bedingung (VI; 73) nicht erfüllt ist (casus irreducibilis) und drei reelle Wurzeln vorhanden sind, ist das Problem eindeutig lösbar, da ja γ (für $v_2 - v_1 < \pi$) positiv ist, die beiden überzähligen Wurzeln also wegen des DESCARTESschen Satzes negativ sind.

Führt man (VI; 72) in (VI; 71) ein, so erhält man

$$v = \sqrt[3]{\operatorname{cosec}\psi + \operatorname{ctg}\psi} + \sqrt[3]{\operatorname{cosec}\psi - \operatorname{ctg}\psi} = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}},$$

und setzt man $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, so ergibt sich

$$v = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = 2 \operatorname{cosec}\varphi.$$

Die Lösung von (VI; 69) erfolgt demnach streng durch den einfachen Algorithmus

$$\operatorname{ctg}^2\psi = f(3h) = 3h\,\frac{1 + 3h - (3h)^2}{(1 + 3h)^3},$$

$$\text{(VI; 74)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}},$$

$$\gamma = \frac{1}{3} + 2\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{1 + 3h}\,\operatorname{cosec}\varphi.$$

Diese Lösung braucht nur dann noch verbessert zu werden, wenn sich h durch Berücksichtigung von n bzw. eines verbesserten Wertes für n ändert. Ist dh diese (stets kleine) Änderung, so ist

$$d\gamma = \frac{\gamma + \frac{1}{9}}{3\gamma^2 - 2\gamma - h}\,dh$$

die entsprechende Verbesserung von γ.

Bei kleinen Bahnbögen, also in den meisten bei ersten Bahnbestimmungen vorkommenden praktischen Fällen, wird γ nur wenig größer als 1 sein, und es erweist sich dann als vorteilhaft,

$$\text{(VI; 75)} \qquad \gamma = 1 + z$$

zu setzen und eine genäherte Lösung anzustreben, bei der höhere Ordnungen in z vernachlässigt werden können. Durch die Substitution (VI; 75) nimmt (VI; 69) die Form

$$z(1+z)^2 = \frac{10}{9} h \left(1 + \frac{9}{10} z\right)$$

an oder, da $(1+z)^2 = \left(1 + \frac{9}{10} z\right)\left(1 + \frac{11}{10} z\right) + \frac{1}{100} z^2$,

$$z\left(1 + \frac{11}{10} z\right) + \frac{1}{100} \frac{z^3}{1 + \frac{9}{10} z} = \frac{10}{9} h. \tag{VI; 76}$$

In den meisten Fällen darf man das Glied 3. Ordnung, das noch dazu mit dem kleinen Faktor $\frac{1}{100}$ behaftet ist, unbedenklich unterdrücken und erhält dann für $y = \frac{11}{10} z$ die quadratische Gleichung

$$y(1+y) = \frac{11}{9} h.$$

Die positive Lösung

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{44}{9} h}$$

dieser Gleichung kann nach TIETJEN in eine trigonometrische Form gebracht werden, wenn man den Hilfswinkel χ durch

$$\operatorname{tg}^2 2\chi = \frac{44}{9} h$$

einführt. Dann ist nämlich

$$y = \frac{1}{2}(\sec 2\chi - 1) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\chi \operatorname{tg} 2\chi = \sqrt{\frac{11}{9} h} \operatorname{tg}\chi$$

und somit

$$\gamma = 1 + \sigma \sqrt{\frac{100}{99}} \sqrt{h} \operatorname{tg}\chi,$$

wo σ ein von der Einheit nur wenig verschiedener Korrektionsfaktor ist, durch den die Vernachlässigung der höheren Glieder in (VI; 76) wieder in Ordnung gebracht wird. TIETJEN hat $\log\left(\sigma \sqrt{\frac{100}{99}}\right)$ mit dem Argument h in eine Tafel (Anhang A VI) gebracht, die aber nur selten gebraucht wird, da man meist mit $\sigma = 1$ auskommt. P. A. HANSEN löst die Gleichung (VI; 76), ohne das Glied

mit z^3, durch den Kettenbruch

$$y - 1 = z = \cfrac{\frac{10}{9}h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h}{1 + \cdots}}},$$

dessen Auswertung sich besonders für das Maschinenrechnen eignet. Der Fehler, der durch die Unterdrückung der dritten und höheren Potenzen von z entsteht, bleibt bei kleinen Bahnbögen ($g < 10°$) für siebenstellige Rechnung unmerklich – es darf dann auch n vernachlässigt und $h = \dfrac{m}{\frac{5}{6} + l}$ gesetzt werden.

Für größere Zwischenzeiten wiederholt man die Rechnung mit

$$\frac{10}{9}h' = \frac{10}{9}h - \frac{z^3}{100\left(1 + \frac{9}{10}z\right)} = \frac{10}{9}\left[h - \frac{9z^3}{1000\left(1 + \frac{9}{10}z\right)}\right],$$

also mit

$$h' = h - \frac{9z^3}{1000\left(1 + \frac{9}{10}z\right)} \approx h - \frac{9}{1000}z^3,$$

wobei h noch wegen n verbessert werden muß.

Von den Methoden, die Gleichung (VI; 69) durch Reihenentwicklung zu lösen, verdient die von ENCKE erwähnt zu werden, der $\log y$ nach Potenzen der bei kleinen Zwischenzeiten kleinen Größe

$$\eta = \frac{\tau^2}{(r_1 + r_2)^3}$$

entwickelt. Wegen der Ausführung sei auf die Literatur verwiesen. Einfacher ist die Entwicklung, die man erhält, wenn man (VI; 69) durch den Ansatz

$$y = 1 + \beta_1 h + \beta_2 h^2 + \beta_3 h^3 + \cdots$$

löst. Führt man diese Reihe in (VI; 69) ein, so ergeben sich die β_ν durch Vergleichung der Koeffizienten gleicher Potenzen von h auf beiden Seiten, und man erhält bis zur 5. Ordnung, wenn man noch $k = \frac{10}{9}h$ einführt,

$$\text{(VI; 77)} \quad y = 1 + k - 1.1\,k^2 + 2.41\,k^3 - 6.591\,k^4 + 20.1761\,k^5 - \cdots.$$

Vergleicht man diese Reihe mit der geschlossenen Formel

$$\text{(VI; 78)} \qquad \gamma' = 1 + \frac{k}{\sqrt[3]{1 + 3.3\,k}} =$$

$$= 1 + k - 1.1\,k^2 + 2.42\,k^3 - 6.211\,k^4 + 21.0879\,k^5 - \cdots,$$

so findet man

$$\text{(VI; 79)} \qquad \gamma = \gamma' - \Delta\gamma; \quad \Delta\gamma = \frac{k^3}{100}\,[1 + 38\,k + 91.18\,k^2 + \cdots]$$

bis zur 5. Ordnung in k, also bis zur 10. Ordnung in der Zwischenzeit.

Die Form des Kegelschnitts erkennt man aus dem Vorzeichen von w nach (VI; 62). Bei parabolischen Bahnen ($w = 0$) ergibt sich γ besonders einfach, denn es ist dann $W = \frac{4}{3}$, also nach (VI; 61)

$$\text{(VI; 80)} \qquad \gamma = 1 + \frac{4}{3}\,l = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{r_1 r_2}\cos f}\right].$$

53. *Das Verhältnis Sektor:Dreieck und die* LAMBERT*sche Gleichung*

Es läßt sich zeigen, daß das Verhältnis Sektor : Dreieck, ebenso wie auf Grund der LAMBERTschen Gleichung (VI; 10) die Größe $\tau a^{-\frac{3}{2}}$, lediglich von den Verhältnissen

$$\frac{r_1 + r_2}{4a}, \quad \frac{s}{4a}$$

abhängt und als Funktion der durch (VI; 11) definierten Winkel ε und δ darstellbar ist. Da nämlich nach (VI; 14, 15)

$$\sqrt{r_1 r_2}\cos f = 2a \sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\delta}{2}; \qquad \sqrt{r_1 r_2}\sin f = \sqrt{ap}\,\sin\frac{\varepsilon - \delta}{2},$$

so ist

$$r_1 r_2 \sin 2f = 4\sqrt{a^3 p}\,\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\varepsilon - \delta}{2},$$

also nach (VI; 42), wenn man τ durch die LAMBERTsche Formel VI; 10) ausdrückt,

(VI; 81)

$$\gamma = \frac{\tau\sqrt{p}}{r_1 r_2 \sin 2f} = \frac{(\varepsilon - \delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)}{4\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\varepsilon - \delta}{2}} = \frac{(\varepsilon - \delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)}{\sin(\varepsilon - \delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)}.$$

Diese bemerkenswerte Beziehung ermöglicht eine andere Lösung unseres Problems der Elementenbestimmung aus Randwerten, nämlich die durch Auflösung des Gleichungssystems

$$\text{(VI; 82)} \qquad \sin^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}; \quad \sin^2\frac{\delta}{2} = \frac{r_1 + r_2 - s}{4a};$$

$$\text{(VI; 83)} \qquad \tau = \sqrt{a^3}\,[(\varepsilon - \delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)]$$

nach ε, δ und a. Ist diese Aufgabe mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens gelöst, so ergibt sich γ aus (VI; 81) und damit auch p. Bei der weiteren Analyse nach Abschn. 50 hat man den Vorteil, daß auch a bereits bekannt ist und gegebenenfalls zur Kontrolle der Rechnung verwendet werden kann.

Man kann die Iteration mit einem plausiblen Näherungswert von a beginnen, mit ihm nach (VI; 82) ε und δ bestimmen und aus (VI; 83) einen verbesserten Wert a ableiten. Oder man berechnet τ aus verschiedenen hypothetischen a und bestimmt durch Interpolation dasjenige a, das auf das gegebene τ führt. Bei kleinen Exzentrizitäten wird man mit der Ausgangsnäherung $a \approx r_1$ oder r_2 rasch zum Ziele kommen. Hingegen ist das Verfahren in dieser Form für parabolische oder parabelnahe Bahnen nicht geeignet.

Bei der praktischen Durchführung der Rechnung wird man meist auf die Schwierigkeit stoßen, daß (VI; 83) die Zwischenzeit als Differenz zweier kleiner Größen liefert, deren numerische Bestimmung unsicher ist. Das ist besonders bei kleinen Bahnbögen der Fall, wo s gegen $r_1 + r_2$ klein ist und daher ε und δ nicht sehr verschieden voneinander sind. Noch unvorteilhafter macht sich das bei der Berechnung von γ nach (VI; 81) bemerkbar, da dort der Quotient aus zwei kleinen Differenzen zu bilden ist. Eine Umwandlung der Formeln (VI; 81, 83) in Ausdrücke, die diese Nachteile vermeiden, ist daher angebracht.

Aus der Identität

$$2\sin\frac{\varepsilon - \delta}{2} - (\sin\varepsilon - \sin\delta) =$$

$$= 2\sin\frac{\varepsilon - \delta}{2}\left(1 - \cos\frac{\varepsilon + \delta}{2}\right) = 4\sin\frac{\varepsilon - \delta}{2}\sin^2\frac{\varepsilon + \delta}{4}$$

bestimmt man $\sin\varepsilon - \sin\delta$. Führt man dies in (VI; 83) ein, so erhält man

$$\tau = \sqrt{a^3}\left[(\varepsilon - \delta) - 2\sin\frac{\varepsilon - \delta}{2} + 4\sin\frac{\varepsilon - \delta}{2}\sin^2\frac{\varepsilon + \delta}{4}\right]$$

oder, wenn man nach (VI; 9)

$$\text{(VI; 84)} \qquad g = \frac{\varepsilon - \delta}{2}; \quad h = \frac{\varepsilon + \delta}{2}$$

setzt und nach (V; 43) die Funktionen

$$c_1(g^2) = \frac{\sin g}{g}; \quad c_3(g^2) = \frac{g - \sin g}{g^3}$$

einführt,

(VI; 85) $$\tau = 2\sqrt{a^3}\sin g\left[\frac{c_3(g^2)}{[c_1(g^2)]^3}\sin^2 g + 2\sin^2\frac{h}{2}\right].$$

Diese Formel liefert τ als Summe zweier positiver Größen und damit rechnerisch genau. Setzt man an Stelle des Zählers von (VI; 81) $\tau a^{-\frac{3}{2}}$ aus (VI; 85) ein, so folgt für das Verhältnis Sektor : Dreieck zunächst

$$\gamma = \frac{\frac{c_3}{c_1^2}\sin^2 g + 2\sin^2\frac{h}{2}}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\delta}{2}}.$$

An Stelle des Nenners schreibt man besser

$$\cos\frac{\varepsilon-\delta}{2} - \cos\frac{\varepsilon+\delta}{2} = 2\left(\sin^2\frac{h}{2} - \sin^2\frac{g}{2}\right).$$

Setzt man sodann zur Abkürzung

$$\cos y = \frac{\sin\frac{g}{2}}{\sin\frac{h}{2}} = \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\frac{\delta}{4} - \sin\frac{\delta}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{4}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\frac{\delta}{4} + \sin\frac{\delta}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{4}}$$

bzw.

(VI; 86) $$\operatorname{tg}^2\frac{y}{2} = \frac{1-\cos y}{1+\cos y} = \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\left(\frac{\cos\frac{\varepsilon}{4}}{\cos\frac{\delta}{4}}\right)^2,$$

so ergibt sich

$$\gamma = \frac{1 + 2\frac{c_3}{c_1^3}\cos^2 y\cos^2\frac{g}{2}}{1-\cos^2 y} = \operatorname{cosec}^2 y + 2\frac{c_3}{c_1^3}\operatorname{ctg}^2 y\cos^2\frac{g}{2}$$

oder

(VI; 87) $$\gamma = 1 + \operatorname{ctg}^2 y\left[1 + 2\frac{c_3(g^2)}{[c_1(g^2)]^3}\cos^2\frac{g}{2}\right].$$

Diese strenge Formel gibt γ mit jeder wünschenswerten Genauigkeit, wenn ε und δ bekannt sind. Selbst im Falle parabelnaher Bahnen, wo a sehr groß gegen r_1, r_2 und s ist, und daher ε, δ, g, h klein sind, läßt sich y aus (VI; 86) genau bestimmen, da man

(VI; 88) $$\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} = \sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\frac{r_1+r_2-s}{r_1+r_2+s}}$$

stets sicher berechnen kann. Ist die Bahn eine *Parabel*, so erhält man wegen $c_1 = 1$, $c_3 = \frac{1}{6}$, $g = 0$

$$\text{(VI; 89)} \qquad \gamma = 1 + \frac{4}{3} \operatorname{ctg}^2 y .$$

Vergleicht man dies mit (VI; 80), so findet man $\operatorname{ctg}^2 y = l$, was auch aus (VI; 71, 73) direkt abgeleitet werden kann.

Die hier beschriebene Methode ist in der Praxis der im vorigen Abschnitt beschriebenen unterlegen, weil es oft schwierig ist, die durch die Formeln (VI; 82, 83) angedeutete Iteration mit einem hinreichend guten Näherungswert einer der drei Variablen a, ε, δ zu beginnen. Daß es trotzdem nicht aussichtslos ist, auch bei völliger Unkenntnis der Bahnverhältnisse beliebig genaue Anfangswerte für diese Näherungsrechnung zu erlangen, hat H. C. PLUMMER[1]) gezeigt.

Nach Definition ist

$$2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \cos \varepsilon = \frac{m}{2a}; \qquad 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1 - \cos \delta = \frac{n}{2a}.$$

Die Punkte P_1, P_2 mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta - \sin \delta, & x_2 &= \varepsilon - \sin \varepsilon, \\ y_1 &= 1 - \cos \delta, & y_2 &= 1 - \cos \varepsilon \end{aligned} \qquad (\delta < \varepsilon)$$

liegen auf der Zykloide mit der Parameterdarstellung

$$x = \Theta - \sin \Theta; \quad y = 1 - \cos \Theta$$

und entsprechen den Werten δ bzw. ε des Parameters Θ. Zwischen den Koordinaten dieser beiden Punkte bestehen die Beziehungen

$$\tau = \sqrt{a^3}\,(x_2 - x_1); \qquad a y_1 = \frac{n}{2}; \qquad a y_2 = \frac{m}{2}.$$

Eliminiert man a durch die erste dieser Gleichungen, so folgen aus den beiden letzten die Zusammenhänge

$$2\tau \sqrt{2 y_1^3} = \sqrt{n^3}\,(x_2 - x_1); \quad 2\tau \sqrt{2 y_2^3} = \sqrt{m^3}\,(x_2 - x_1).$$

Ebenso bestehen zwischen den entsprechenden Punkten $Q_1(\xi_1, \eta_1)$ und $Q_2(\xi_2, \eta_2)$ der zykloidenartigen Kurve

$$\xi = x = \Theta - \sin \Theta; \quad \eta = \sqrt{y^3} = \sqrt{(1 - \cos \Theta)^3} = 2\sqrt{2} \sin^3 \frac{\Theta}{2}$$

die Gleichungen

$$2\sqrt{2}\,\tau \eta_1 = \sqrt{n^3}\,(\xi_2 - \xi_1); \quad 2\sqrt{2}\,\tau \eta_2 = \sqrt{m^3}\,(\xi_2 - \xi_1).$$

---

[1]) Monthly Notices of the Roy. Astron. Soc. *63*, 147 (London 1903).

Verbindet man (Abb. 46) in der (ξ, η)-Ebene die Punkte Q_1, Q_2 der Kurve durch eine Sehne und zeichnet die zu ihr parallele Tangente, deren Berührungspunkt in $Q(\Theta = \sigma)$ liegen möge, so ist deren Richtungskonstante

$$\operatorname{tg}\lambda = \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\Theta=\sigma}$$

oder, da $d\eta = 3\sqrt{2}\sin^2\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\,d\Theta$;

$$d\xi = (1 - \cos\Theta)\,d\Theta = 2\sin^2\frac{\Theta}{2}\,d\Theta,$$

(VI; 90)
$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\frac{\sigma}{2} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\sqrt{m^3} - \sqrt{n^3}}{2\sqrt{2}\tau},$$

d.h., es ist

(VI; 91)
$$\cos\frac{\sigma}{2} = \frac{\sqrt{m^3} - \sqrt{n^3}}{6\tau},$$

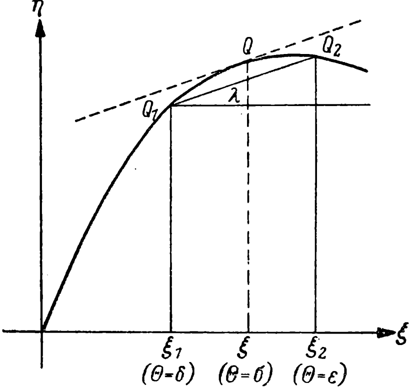


Abb. 46. LAMBERTsche Gleichung. Analyse von H. C. PLUMMER.

und der Winkel σ daher bekannt. Bei nicht zu großen Zwischenzeiten darf man annehmen, daß der zu Q gehörige Parameter σ ungefähr gleich dem arithmetischen Mittel der zu Q_1 und Q_2 gehörigen Parameter δ bzw. ε ist, daß also

(VI; 92)
$$\sigma \approx \frac{\varepsilon + \delta}{2} = h.$$

Ferner ist nach (VI; 88)

$$\sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{n}{m}}\sin\frac{\varepsilon}{2},$$

also, wenn man $\sqrt{\frac{n}{m}} = \cos z$ setzt,

$$\operatorname{tg}\frac{g}{2}\operatorname{ctg}\frac{h}{2} = \frac{\sin\frac{g}{2}\cos\frac{h}{2}}{\cos\frac{g}{2}\sin\frac{h}{2}} = \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2} - \sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2} + \sin\frac{\delta}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{\frac{n}{m}}}{1 + \sqrt{\frac{n}{m}}} = \operatorname{tg}^2\frac{z}{2}.$$

Man erhält also eine erste Näherungslösung der Gleichungen (VI; 82, 83) bereits durch das Formelsystem

$$\text{(VI; 93)}\quad \begin{cases} \cos\frac{\sigma}{2} = \frac{\sqrt{m^3} - \sqrt{n^3}}{6\tau}; \quad \operatorname{tg}^2\frac{z}{2} = \frac{1 - \sqrt{\frac{n}{m}}}{1 + \sqrt{\frac{n}{m}}}; \quad h = \sigma; \\ \operatorname{tg}\frac{g}{2} = \operatorname{tg}\frac{h}{2}\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}; \quad \varepsilon = h + g; \quad \delta = h - g; \quad a \text{ nach (VI; 85).} \end{cases}$$

Eine bessere Näherung ergibt sich, wenn man in (VI; 90) m, n und τ wieder durch ε, δ bzw. durch g, h ausdrückt. Es ist dann

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{tg}\lambda = \frac{3}{4}\cos\frac{\sigma}{2} = \frac{\sin^3\frac{\varepsilon}{2} - \sin^3\frac{\delta}{2}}{(\varepsilon - \delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)} = \frac{\sin^3\frac{h+g}{2} - \sin^3\frac{h-g}{2}}{2g - 2\sin g \sin h}.$$

Entwickelt man, indem man diesen Ausdruck benutzt, $\cos\frac{h}{2} - \cos\frac{\sigma}{2}$ nach Potenzen der meist sehr kleinen Größe g, so findet man nach etwas umständlicher, aber elementarer Rechnung

$$\cos\frac{h}{2} - \cos\frac{\sigma}{2} = \cos\frac{\sigma}{2}\left[\frac{5}{24}g^2 + \frac{1}{5760}g^4\left(191 - 64\operatorname{ctg}^2\frac{h}{2}\right) + \cdots\right] = R\cos\frac{\sigma}{2},$$

wobei man in dem Koeffizienten des Gliedes 4. Ordnung ohne merklichen Fehler $h = \sigma$ setzen darf. Sei allgemein

$$h = \sigma - \Delta h,$$

so ist dann

$$\text{(VI; 94)}\quad \frac{\cos\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\Delta h}{2}\right) - \cos\frac{\sigma}{2}}{\cos\frac{\sigma}{2}} = \cos\frac{\Delta h}{2} + \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\Delta h}{2} - 1 = R.$$

Da $x = \frac{\Delta h}{2}$ sehr klein ist, genügt es, um diese trigonometrische Gleichung aufzulösen, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$, $\sin x = x$ zu setzen. Man erhält dann für x die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2x\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = -2R,$$

in der R und x klein von der Ordnung g^2 sind. Die Lösung dieser Gleichung, in

der das negative Vorzeichen der Quadratwurzel gilt,

$$x = \frac{\Delta h}{2} = \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\left[1 - \sqrt{1 - 2R\operatorname{ctg}^2\frac{\sigma}{2}}\right] =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\left(R\operatorname{ctg}^2\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}R^2\operatorname{ctg}^4\frac{\sigma}{2} + \cdots\right),$$

stimmt dann mit der Lösung von (V; 94) bis zu Gliedern 4. Ordnung in g überein, und wenn man für R die obige Reihenentwicklung bis zu dieser Ordnung benutzt, so erhält man

$$\frac{\Delta h}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}\left(\frac{5}{24}g^2 + \frac{191}{5760}g^4\right) + \operatorname{ctg}^3\frac{\sigma}{2}\cdot\frac{61}{5760}g^4 + \cdots.$$

Führt man hierin statt g

$$\operatorname{tg}\frac{g}{2} = \frac{g}{2} + \frac{g^3}{24} + \cdots,$$

d.h. $g^2 = 4\operatorname{tg}^2\frac{g}{2} - \frac{8}{3}\operatorname{tg}^4\frac{g}{2} + \cdots$ ein, so ergibt sich schließlich

$$\Delta h = \frac{5}{3}\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}\operatorname{tg}^2\frac{g}{2}\left[1 + \frac{1}{600}\operatorname{tg}^2\frac{g}{2}\left(61\operatorname{ctg}^2\frac{\sigma}{2} - 9\right) + \cdots\right].$$

Mit dem genäherten Wert

$$\operatorname{tg}\frac{g}{2} = \operatorname{tg}\frac{h}{2}\operatorname{tg}^2\frac{z}{2} \approx \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}$$

wird man zunächst

$$\Delta h = \frac{5}{3}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\operatorname{tg}^4\frac{z}{2}, \quad h = \sigma - \Delta h$$

und dann genauer

$$\Delta h = \frac{5}{3}\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}\operatorname{tg}^2\frac{h}{2}\operatorname{tg}^4\frac{z}{2} + \cdots$$

erhalten. Hat man auf diese Weise h und damit nach (VI; 93) auch g, ε, δ gefunden, so erhält man a aus (VI; 82):

$$a = \frac{m}{4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Das mit diesen Werten a, g, h nach (VI; 83) berechnete τ wird mit dem gegebenen noch nicht genau übereinstimmen. Der Widerspruch $d\tau$ führt dann zu einer Korrektion da. Differenziert man (VI; 83)

(VI; 95)
$$d\tau = \frac{3}{2}\sqrt{a}\,da\,[(\varepsilon - \delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)] +$$
$$+ \sqrt{a^3}[d\varepsilon(1 - \cos\varepsilon) - d\delta(1 - \cos\delta)],$$

beobachtet man, daß aus (VI; 82)

$$\text{(VI; 96)} \qquad d\varepsilon = -\operatorname{tg}\varepsilon\frac{da}{a}; \quad d\delta = -\operatorname{tg}\delta\frac{da}{a}$$

folgt, und setzt man $1 - \cos\varepsilon = 2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$ usw., so ergibt sich

$$d\tau = \frac{3}{2}\sqrt{a}\,da\,[(\varepsilon-\delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)] - 2\sqrt{a}\,da\left[\frac{\sin^3\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\frac{\varepsilon}{2}} - \frac{\sin^3\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta}{2}}\right].$$

Da nun nach (VI; 83, 91)

$$(\varepsilon-\delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta) = \frac{\tau}{\sqrt{a^3}} = \frac{4}{3}\,\frac{\sin^3\frac{\varepsilon}{2} - \sin^3\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\sigma}{2}},$$

so entsteht schließlich der symmetrische Ausdruck

$$\text{(VI; 97)} \quad d\tau = 2\sqrt{a}\,da\left[\sin^3\frac{\varepsilon}{2}\left(\sec\frac{\sigma}{2} - \sec\frac{\varepsilon}{2}\right) - \sin^3\frac{\delta}{2}\left(\sec\frac{\sigma}{2} - \sec\frac{\delta}{2}\right)\right],$$

der zur Berechnung von da dient. Ist g klein, was bei kleinen Zwischenzeiten und besonders bei parabelnahen Bahnen zutrifft, so kann man statt (VI; 97) eine bequemere Formel benutzen, in der Glieder 3. Ordnung in g vernachlässigt werden. Schreibt man nämlich in (VI; 95) $1 - \cos\varepsilon = 2\left(1 - \cos^2\frac{\varepsilon}{2}\right)$ usw., und führt man für $d\varepsilon$, $d\delta$ wieder die Ausdrücke (VI; 96) ein, so ergibt sich

$$d\tau = \sqrt{a}\,da\left[\frac{3}{2}(\varepsilon-\delta) - \frac{1}{2}(\sin\varepsilon - \sin\delta) - 2\left(\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)\right]$$

oder, indem man wieder ε, δ durch g, h ersetzt,

$$d\tau = \sqrt{a}\,da\left[3g - \sin g\left(\cos h + \frac{4}{\cos h + \cos g}\right)\right].$$

Setzt man nun im ersten Glied rechts $g = \sin g$, im zweiten Glied $\cos g = 1$, so ist bis auf Glieder 3. Ordnung in g

$$d\tau = \sqrt{a}\,da\left[3\sin g - \sin g\left\{1 - 2\sin^2\frac{h}{2} + 2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{h}{2}\right)\right\}\right] =$$

$$= -2\sqrt{a}\,da\sin g\operatorname{tg}^2\frac{h}{2}\sin^2\frac{h}{2}.$$

Mit derselben Genauigkeit ist aber

$$\tau = 2\sqrt{a^3}\,[g - \sin g \cos h] \approx 2\sqrt{a^3} \sin g\,(1 - \cos h) = 4\sqrt{a^3} \sin g \sin^2 \frac{h}{2},$$

so daß man schließlich für da die einfache Näherung

$$da = -2a \frac{d\tau}{\tau} \operatorname{ctg}^2 \frac{h}{2}$$

erhält, mit der man in den meisten praktisch vorkommenden Fällen rasch zum Ziel gelangt.

54. *Berechnung einer gleichabständigen Ephemeride aus den Randwerten eines Intervalls*

Im Abschn. 46 wurde die Aufgabe gelöst, die heliozentrische Ephemeride eines sich auf einer Kegelschnittbahn bewegenden Himmelskörpers für die gleichabständigen Zeitpunkte $t_0, t_1, t_2, \ldots$ zu berechnen, wenn die Anfangswerte $x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ für $t = t_0$ und die konstante Zwischenzeit $\tau = k(t_1 - t_0) = k(t_n - t_{n-1})$ gegeben sind. Das gleiche Ziel läßt sich auch erreichen, wenn als Ausgangsdaten neben τ die Randwerte $x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1$ des ersten Intervalls $(t_0 \to t_1)$ vorliegen. In diesem Problem, für das auch ein für programmgesteuertes Rechnen geeignetes Laufschema aufgestellt werden soll, tritt an Stelle der transzendenten, aber für kleine Zwischenzeiten nahezu kubischen Hauptgleichung die ebenfalls transzendente und nahezu kubische Gleichung (VI; 69) für das Verhältnis Sektor : Dreieck auf.

Aus den vorgelegten Daten berechnet man als Invarianten des ersten Intervalls

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2; \quad r_0^2 u_0 = x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1; \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

und bestimmt hieraus r_0, u_0, r_1 sowie $\Delta_0 = r_1/r_0$. Außerdem ist, wenn $2f_0 = v_1 - v_0$ die Differenz der wahren Anomalien an den Intervallrändern ist,

$$\Delta_0 \cos 2f_0 = u_0.$$

Setzt man nun

$$\Delta_0 + u_0 = 2\Delta_0 \cos^2 f_0 = \frac{1}{2} q_0^2; \quad \frac{\tau^2}{r_0^3} = \xi_0,$$

so ist nach (VI; 59)

$$m_0 = \frac{\xi_0}{\left(2\sqrt{\Delta_0} \cos f_0\right)^3} = \frac{\xi_0}{q_0^3}; \quad l_0 = \frac{1 + \Delta - q_0}{2q_0}.$$

Einen Näherungswert für das Verhältnis Sektor : Dreieck des Intervalls $(t_0 \to t_1)$ leitet man mit

$$h_0 = \frac{m_0}{\frac{5}{6} + l_0} = \frac{\xi_0}{q_0^2\left(\frac{1+\Delta}{2} + \frac{q_0}{3}\right)}$$

aus dem HANSENschen Kettenbruch

$$\gamma_0 = 1 + \frac{10}{9} h_0 : \left[1 + \frac{11}{9} h_0 : \left\{1 + \frac{11}{9} h_0 : \left(1 + \frac{11}{9} h_0 \cdots\right)\right\}\right]$$

ab, dessen Entwicklung nach wenigen Gliedern abgebrochen werden kann. Die exakte Bestimmung von γ_0 erfolgt dann mit dieser Näherung als Ausgangswert durch die Iteration

$$w = \frac{m}{\gamma^2} - l;$$

$$\text{(VI; 98)} \quad \begin{cases} W = \dfrac{4}{3}\left[1 + \dfrac{6}{5} w \left\{1 + \dfrac{8}{7} w \left(1 + \dfrac{10}{9} w \cdots\right)\right\}\right] \quad \text{oder} \\ \zeta = \dfrac{w}{1 - w}; \; W = \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{1 - w}\left[1 + \dfrac{1}{5}\zeta\left\{1 - \dfrac{1}{7}\zeta\left(1 - \dfrac{3}{9}\zeta \cdots\right)\right\}\right]; \end{cases}$$

$$\gamma = 1 + W(w + l); \quad w = \cdots$$

Die eigentliche Aufgabe besteht dann darin, nach dieser Vorbereitung die Ortskoordinaten x_2, y_2, z_2 für den Zeitpunkt t_2 aufzusuchen. Ist dies geschehen, so sind die Daten für eine Fortsetzung der Ephemeridenrechnung verfügbar.

Nach (V; 12) ist

$$\text{(VI; 99)} \qquad x_1 = x_0 F_0 + \dot{x}_0 G_0,$$

$$\text{(VI; 100)} \qquad x_2 = x_1 F_1 + \dot{x}_1 G_1,$$

wenn $F_0, G_0; F_1, G_1$ die früher definierten Funktionen der Zwischenzeit τ und der für die Zeitpunkte t_0 bzw. t_1 gültigen Invarianten (V; 28, 29) sind. Setzt man in (VI; 100)

$$\dot{x}_1 = x_0 \dot{F}_0 + \dot{x}_0 \dot{G}_0,$$

so erhält man

$$x_2 = x_1 F_1 + (x_0 \dot{F}_0 + \dot{x}_0 \dot{G}_0)\, G_1.$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung und (VI; 99) $\dot{x}_0$, so ergibt sich

$$x_2 G_0 = x_1 (F_1 G_0 + G_1 \dot{G}_0) - x_0 G_1 (F_0 \dot{G}_0 - G_0 \dot{F}_0)$$

oder, nach dem Flächensatz (V; 64) und nach (V; 71),

$$\text{(VI; 101)} \qquad x_2 G_0 = -x_0 G_1 + x_1 \left[F_1 G_0 + G_1 \left(1 - \frac{1 - F_0}{\Delta_0}\right)\right].$$

Da nun die Größen γ_0, Δ_0, u_0 bekannt sind, folgt aus (VI; 49, 53)

$$\text{(VI; 102)} \qquad G_0 = \frac{\tau}{\gamma_0}; \quad 1 - F_0 = \frac{\mu_0 G_0^2}{2\Delta_0 \cos^2 f_0} = \frac{\xi_0}{\gamma_0^2(\Delta_0 + u_0)} = \frac{2\xi_0}{(\gamma_0 q_0)^2}.$$

Man kann also x_2 aus (VI; 101) und y_2, z_2 aus entsprechenden Formeln berechnen, wenn es gelungen sein wird, F_1 und G_1 zu bestimmen. Man erreicht dies auf folgendem Wege:

Nach (VI; 56) ist

(VI; 103)

$$\vartheta_0 = \left(\frac{\Delta_0 \sin 2f_0}{G_0}\right)^2 = \frac{\Delta_0^2 - u_0^2}{\tau^2}\gamma_0^2; \quad \sigma_0 = \frac{\Delta_0 \cos 2f_0 - F_0}{G_0} = \frac{u_0 - F_0}{\tau}\gamma_0.$$

Es folgt demnach aus (VI; 102, 103)

$$\text{(VI; 104)} \qquad \begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{2}(1 - F_0)\, q_0^2\gamma_0^2, \\ \eta_0 &= \sigma_0\tau = (u_0 - F_0)\,\gamma_0, \\ \vartheta_0\tau^2 &= (\Delta_0^2 - u_0^2)\,\gamma_0^2 \end{aligned}$$

und aus der Identität (V; 16), wenn man diese mit τ^2 multipliziert und die Bezeichnungen (V; 53) einführt,

$$\text{(VI; 105)} \qquad \chi_0 = 2\xi_0 - \eta_0^2 - \vartheta_0\tau^2 = [2(u_0 + \Delta_0) - (F_0 + \Delta_0)^2]\,\gamma_0^2.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$1 - F_0 = s_0, \quad F_0 + \Delta_0 = p_0 \quad \text{und wie oben} \quad 2(u_0 + \Delta_0) = q_0^2,$$

so ist

$$\xi_0 = \frac{1}{2}s_0 q_0^2\gamma_0^2; \quad \eta_0 = \left(\frac{1}{2}q_0^2 - p_0\right)\gamma_0; \quad \chi_0 = (q_0^2 - p_0^2)\,\gamma_0^2.$$

Ebenso gilt natürlich auch für das nächste Intervall ($t_1 \to t_2$):

$$\text{(VI; 106)} \qquad \xi_1 = \frac{1}{2}s_1 q_1^2\gamma_1^2; \quad \eta_1 = \left(\frac{1}{2}q_1^2 - p_1\right)\gamma_1; \quad \chi_1 = (q_1^2 - p_1^2)\,\gamma_1^2.$$

Andererseits sind aber, nach (V; 60) und (V; 78),

$$\text{(VI; 107)} \qquad \xi_1 = \frac{\xi_0}{\Delta_0^3}; \quad \eta_1 = \frac{\sigma_0 F_0 + \varepsilon_0 G_0}{\Delta_0^2}\tau = \frac{\eta_0 F_0 + \dfrac{\xi_0 - \chi_0}{\gamma_0}}{\Delta_0^2}; \quad \chi_1 = \frac{\chi_0}{\Delta_0^2}$$

bekannte Größen. Wenn man daher aus (VI; 106) p_1, q_1, s_1 berechnet:

$$p_1 = 1 \pm \sqrt{1 + 2\frac{\eta_1}{\gamma_1} - \frac{\chi_1}{\gamma_1^2}}; \quad \frac{1}{2}q_1^2 = p_1 + \frac{\eta_1}{\gamma_1}; \quad s_1 = \frac{2\xi_1}{(q_1\gamma_1)^2},$$

(wobei in der Formel für p_1 das positive Zeichen vor der Quadratwurzel zu wählen ist, da $p \to 2$ für $\tau \to 0$), so enthalten diese Ausdrücke nur noch das unbekannte Verhältnis γ_1 für das Intervall $t_1 \to t_2$. Da aber bei kleinen Zwischenzeiten ξ_1, η_1, χ_1 klein sind, darf man in erster Näherung $\gamma_1 = \gamma_0$ setzen, zumal

sich das Verhältnis Sektor : Dreieck von Intervall zu Intervall nur wenig ändert. Mit

$$\xi_1, \quad q_1, \quad \Delta_1 = p_1 + s_1 - 1$$

kann man dann

$$m_1 = \frac{\xi_1}{q_1^3}, \quad l_1 = \frac{1 + \Delta_1 - q_1}{2q_1}$$

berechnen und mit ihnen ein neues y_1 bestimmen. Liegt der endgültige Wert von y_1 fest, so ist, mit den Größen p_1, q_1, s_1, y_1 der letzten Iteration,

$$F_1 = 1 - s_1; \quad G_1 = \frac{\tau}{y_1}; \quad \Delta_1 = p_1 - F_1; \quad u_1 = \frac{1}{2} q_1^2 - \Delta_1$$

und damit die Aufgabe im Prinzip gelöst.

Anstatt (VI; 101) schreibt man, indem man auf beiden Seiten $x_1 G_0$ subtrahiert, durch G_0 dividiert und

$$1 - F_1 = s_1, \quad \frac{G_1}{G_0} = \frac{y_0}{y_1}$$

einführt,

$$x_2 - x_1 = \frac{y_0}{y_1}(x_1 - x_0) - x_1\left(s_1 + \frac{y_0}{y_1}\frac{s_0}{\Delta_0}\right). \tag{VI; 108}$$

Die Formel (VI; 107) für η_1 läßt sich auf eine einfachere Form bringen, wenn man ξ_0, η_0, χ_0 durch (VI; 104, 105) ausdrückt und dann wieder $\frac{1}{2} q_0^2 = u_0 + \Delta_0$ und $1 - F_0 = s_0$ setzt. Es ist dann

$$\eta_1 = y_0\left(1 - \frac{s_0}{\Delta_0} - \frac{u_0}{\Delta_0^2}\right).$$

Nachfolgend sei das Programm für die Ephemeridenrechnung aus Randwerten in ähnlicher Form zusammengestellt, wie dies in Abschn. 46 für die Ephemeridenrechnung aus Anfangswerten geschehen ist. Diese Formeln sind besonders in Hinblick auf die Verwendung programmgesteuerter Rechenanlagen ausgewählt. Das ist auch der Grund, weshalb zur Berechnung von y das Iterationsverfahren (VI; 61, 62) an Stelle der für Handrechnung geeigneteren Methoden gewählt worden ist: Es ist streng und erfordert an Funktionswerten lediglich $W(w)$, dessen Berechnung durch die rasch konvergenten Reihen (VI; 98) für programmgesteuertes Rechnen kein Problem bedeutet.

A. *Gegebene Größen*

Gegeben seien die zu $t = t_0$ und $t = t_1$ gehörigen Ortskoordinaten

$$x_0, y_0, z_0; \quad x_1, y_1, z_1.$$

Die Zwischenzeit sei, in Einheiten von $1/k$ mittleren Tagen, durch

$$\tau = k(t_1 - t_0)$$

vorgegeben. Gefordert sei die Berechnung einer Ephemeride der Ortskoordinaten für die Zeitpunkte $t_2, t_3, \ldots$ in gleichabständiger Folge.

B. *Invarianten des Ausgangsintervalls*

Aus

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2; \quad r_0^2 u_0 = x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1; \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

berechnet man r_0, u_0, r_1, ferner

$$\xi_0 = \frac{\tau^2}{r_0^3}; \quad \Delta_0 = \frac{r_1}{r_0}; \quad q_0 = \sqrt{2(u_0 + \Delta_0)};$$

$$m_0 = \frac{\xi_0}{q_0^3}; \quad l_0 = \frac{1 + \Delta_0}{2q_0} - \frac{1}{2}; \quad h_0 = \frac{m_0}{\frac{5}{6} + l_0}.$$

C. *Verhältnis Sektor: Dreieck im Ausgangsintervall*

Mit der Ausgangsnäherung

$$\gamma_0 = 1 + \frac{10}{9} h_0 : \left[1 + \frac{11}{9} h_0 : \left\{1 + \frac{11}{9} h_0 : \left(1 + \frac{11}{9} h_0 \ldots\right)\right\}\right]$$

führt man die Iteration

$$w = \frac{m_0}{\gamma_0^2} - l_0;$$

$$W = \frac{4}{3}\left[1 + \frac{6}{5} w \left\{1 + \frac{8}{7} w \left(1 + \frac{10}{9} w \ldots\right)\right\}\right] \quad \text{oder}$$

$$\zeta = \frac{w}{1 - w}, \quad W = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - w}\left[1 + \frac{1}{5}\zeta\left\{1 - \frac{1}{7}\zeta\left(1 - \frac{3}{9}\zeta \ldots\right)\right\}\right];$$

$$\gamma_0 = 1 + W(w + l_0); \quad w = \cdots$$

durch, bis sich w nicht mehr ändert. Der Wert γ_0 der letzten Iteration ist dann endgültig. Mit ihm ermittelt man die weiteren Invarianten

$$s_0 = \frac{2\xi_0}{(\gamma_0 q_0)^2}; \quad F_0 = 1 - s_0; \quad p_0 = F_0 + \Delta_0; \quad \chi_0 = (q_0^2 - p_0^2)\,\gamma_0^2.$$

D. *Verhältnis Sektor : Dreieck im nächsten Intervall*

Aus dem vorhergehenden Intervall liegen die Größen

$$\gamma_0, \quad \Delta_0, \quad u_0, \quad s_0, \quad \xi_0, \quad \chi_0$$

vor, mit denen man

$$\xi_1 = \frac{\xi_0}{\Delta_0^3}; \quad \eta_1 = \gamma_0 \left(1 - \frac{s_0}{\Delta_0} - \frac{u_0}{\Delta_0^2} \right); \quad \chi_1 = \frac{\chi_0}{\Delta_0^2}$$

bestimmt. Zur Berechnung von γ_1 dient dann folgende Iteration:

$$v_1 = \frac{1}{\gamma_1}; \quad p_1 = 1 + \sqrt{1 + 2\eta_1 v_1 - \chi_1 v_1^2}; \quad q_1 = \sqrt{2(p_1 + \eta_1 v_1)};$$

$$s_1 = 2 \frac{\xi_1}{q_1^2} v_1^2; \quad F_1 = 1 - s_1; \quad \Delta_1 = p_1 - F_1; \quad u_1 = F_1 + \eta_1 v_1;$$

$$m_1 = \frac{\xi_1}{q_1^3}; \quad l_1 = \frac{1 + \Delta_1}{2 q_1} - \frac{1}{2};$$

$$w = m_1 v_1^2 - l_1; \quad W \text{ nach (VI; 98)}; \quad \gamma_1 = 1 + W(w + l); \quad v_1 = \frac{1}{\gamma_1} \cdots,$$

die man mit $\gamma_1 = \gamma_0$ beginnt und so lange wiederholt, bis sich w nicht mehr ändert.

E. *Koordinaten für $t = t_2$*

Mit den Größen γ_1, s_1 der letzten Iteration bildet man die rechtwinkligen Koordinaten für $t = t_2$ aus

$$x_2 - x_1 = \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(x_1 - x_0) - x_1 \left(s_1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \frac{s_0}{\Delta_0} \right)$$

und entsprechenden Formeln für y_2 und z_2.

F. *Kontrollen und Fortsetzung*

Mit den Randwerten des Intervalls $(t_1 \rightarrow t_2)$ und γ_1 bildet man

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

und die Größen

$$u_1 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1^2}; \quad \Delta_1 = \frac{r_2}{r_1};$$

$$\xi_1 = \frac{\tau^2}{r_1^3}; \quad \eta_1 = (u_1 - F_1)\gamma_1; \quad \chi_1 = (q_1^2 - p_1^2)\gamma_1^2,$$

die mit den unter (D) berechneten Größen übereinstimmen müssen. Mit

$$\xi_2 = \frac{\xi_1}{\Delta_1^3}; \quad \eta_2 = \gamma_1\left(1 - \frac{s_1}{\Delta_1} - \frac{u_1}{\Delta_1^2}\right); \quad \chi_2 = \frac{\chi_1}{\Delta_1^2}$$

führt man dann die Iteration (D) zur Bestimmung von γ_2 durch, die man mit $\gamma_2 = \gamma_1$ beginnen kann. Liegen bereits mehr als drei Ephemeridenörter vor, also mindestens drei Werte der Folge $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$, so kann man die Iteration (D) mit einem extrapolierten γ beginnen. Sind etwa $\gamma_{n-2}, \gamma_{n-1}, \gamma_n$ bekannt, so wird das parabolisch extrapolierte

$$\gamma_{n+1} = \gamma_{n-2} + 3(\gamma_n - \gamma_{n-1})$$

meist schon so nahe richtig sein, daß eine einzige Verbesserungsrechnung zur Sicherung des endgültigen Wertes genügt.

Andere Verfahren zur Berechnung gleichabständiger Ephemeriden beruhen auf den Methoden der numerischen Integration der Differentialgleichungen der Bewegung. Sie werden – im Zusammenhang mit dem Problem der speziellen Störungsrechnung – im Band II behandelt werden.

KAPITEL VII

REIHENENTWICKLUNGEN IM ZWEIKÖRPERPROBLEM

55. *Allgemeines über Reihenentwicklungen*

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir gelernt, die heliozentrischen Koordinaten und andere geometrische Größen der Zweikörperbewegung durch strenge Formeln zu berechnen, wobei der Weg im allgemeinen über die Lösung einer transzendenten Gleichung (KEPLERsche Gleichung, Hauptgleichung, Gleichung für das Verhältnis Sektor : Dreieck) führte. Vielfach ist es aber nützlich, direkte Formeln zur Verfügung zu haben, in denen diese Größen durch Reihenentwicklung nach Potenzen der Zeit oder nach anderen Funktionen der Zeit dargestellt werden. Solche Reihen werden in der Praxis häufig benutzt, wenn sie unter den gegebenen Umständen so rasch konvergieren, daß die Berechnung weniger Glieder ausreicht.

Bei den Problemen der Bahnbestimmung, die in den nächsten beiden Kapiteln behandelt werden sollen, wird man meist den Übergang von einem Bahnort auf einen benachbarten zu vollziehen haben, um die dynamischen Zusammenhänge zwischen diesen Örtern zum Ausdruck zu bringen. Man wird dann mit Vorteil Entwicklungen nach Potenzen der Zwischenzeit τ von der Form

$$f(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + \cdots \qquad \text{(VII; 1)}$$

benutzen, die bei genügend kleinem τ schon nach wenigen Gliedern abgebrochen werden können. Selbst wenn die vernachlässigten Restglieder bei der meist sechs- oder siebenstelligen Rechnung noch merkliche Beträge erreichen sollten, wird ihre Unterdrückung statthaft sein, weil die bei ersten Bahnbestimmungen immer zu vernachlässigenden *Störungen* der Bahnbewegung durch andere Himmelskörper (große Planeten) Fehler von der gleichen Größenordnung hervorrufen, die Genauigkeit der Rechnung also ohnehin beschränkt ist. Andererseits wird man bei der Lösung der Aufgaben der Störungstheorie genaue Entwicklungen der ungestörten Koordinaten brauchen, die sich über größere (in der Theorie der „allgemeinen Störungen“, die im Band III behandelt werden soll, sogar über sehr lange) Zeiträume erstrecken. Hier kann man, insbesondere wenn es sich um Planetoidenbahnen mit kleiner Exzentrizität handelt, an Stelle der strengen Formeln trigonometrische Reihen benutzen, die nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen der mittleren Anomalie M fortschreiten, deren allgemeine Form

$$\begin{aligned} f(M) = a_0 + a_1 \cos M + a_2 \cos 2M + \cdots \\ + b_1 \sin M + b_2 \sin 2M + \cdots \end{aligned} \qquad \left(M = k\,\frac{t - t_0}{\sqrt{a^3}}\right) \qquad \text{(VII; 2)}$$

lautet, und die beispielsweise bei kleiner Exzentrizität für beliebige Zeiten rasch konvergieren, da die Koeffizienten a_n, b_n gewöhnlich von der n-ten Ordnung in der Exzentrizität sind.

Natürlich haben solche trigonometrischen Reihen nur dann einen Sinn, wenn die Bewegung periodisch ist, d.h. für elliptische Bahnen. Die trigonometrische (FOURIERsche) Reihe (VII; 2) stellt dann die im Intervall $0 \leqq M \leqq 2\pi$ periodische und in allen hier vorkommenden Fällen überall stetige und beliebig oft differenzierbare Funktion $f(M)$ für alle Zeiten dar und ist stets konvergent.

Die praktische Bedeutung der Reihen (VII; 2) beruht darauf, daß M der Zeit proportional ist, so daß diese Reihen unmittelbar auch als Funktionen der Zeit angesehen werden dürfen. Diesem Vorteil steht der Nachteil gegenüber, daß ihre Konvergenz mit wachsendem e immer schlechter wird. Ganz anders verhalten sich in dieser Hinsicht andere Anomalien der Zweikörperbewegung, die wir kennen gelernt haben: die exzentrische Anomalie E, die wahre Anomalie v und die antifokale Anomalie w. Die meisten Bahngrößen lassen sich als geschlossene Ausdrücke in diesen Variablen darstellen, vielfach auch als endliche trigonometrische Reihen mit wenigen Gliedern. Man erinnere sich an die Formeln

$$r\cos v = a(\cos E - e), \qquad r = a(1 - e\cos E),$$

$$r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\sin E, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos v)$$

und andere, die sehr einfach sind, während die entsprechenden Zusammenhänge mit der mittleren Anomalie, die ja erst durch die transzendente KEPLERsche Gleichung vermittelt werden, sehr kompliziert werden. Es ist daher auch wünschenswert, die Differenzen $E - M$, $v - M$, $w - M$ usw. als periodische Funktionen der Zeit in Gestalt von FOURIERreihen nach Vielfachen der mittleren Anomalie darzustellen. Besondere Bedeutung kommt dabei den Entwicklungen $v - M$ und $w - M$ zu: Die erstere, die sogenannte *Mittelpunktsgleichung*, liefert die wahre Anomalie, also eine der Polarkoordinaten des Planeten in der Bahnebene, direkt als Funktion der Zeit, während die andere Koordinate, der Radiusvektor r, sodann durch die Kegelschnittgleichung erhalten wird; die letztere zeichnet sich dadurch aus, daß sie von der 2. Ordnung in der Exzentrizität, also für kreisähnliche Bahnen stets sehr klein ist. Die Potenzen von r, insbesondere die ungeraden negativen, werden in der Störungsrechnung gebraucht; ihre Entwicklung in trigonometrische Reihen ist daher ebenfalls von großer Bedeutung.

Die Funktionen F und G, die bei der Darstellung der rechtwinkligen Koordinaten auftreten, lassen sich bequem als endliche trigonometrische Ausdrücke in E bzw. v darstellen, während ihre Entwicklung nach M wiederum auf unendliche FOURIERreihen führt. Nach (V; 70) ist

$$F = 1 - c_2 \xi_0 z^2; \quad G = \tau(1 - c_3 \xi_0 z^3)$$

oder, wenn man die Hauptgleichung in der Form (V; 54) heranzieht,

$$G = \tau(c_1 z + c_2 \eta_0 z^2).$$

Setzt man nun $E - E_0 = \lambda$, ferner

$$c_1(\lambda^2) = \frac{\sin\lambda}{\lambda}, \quad c_2(\lambda^2) = \frac{1 - \cos\lambda}{\lambda^2}; \quad \xi_0 = \mu_0 \tau^2, \quad \eta_0 = \sigma_0 \tau, \quad \chi_0 = \varrho_0 \tau^2$$

und nach (V; 80)

$$z = \frac{\lambda}{\sqrt{\chi_0}},$$

so ergeben sich die einfachen Formeln

$$\text{(VII; 3)} \qquad \begin{cases} F = 1 - \dfrac{\mu_0}{\varrho_0}\,(1 - \cos 2g), \\[2ex] G = \dfrac{1}{\sqrt{\varrho_0}} \sin 2g + \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{\varrho_0}}\,(1 - \cos 2g), \end{cases}$$

in denen, wie in der Literatur allgemein üblich, $\lambda = 2g$ gesetzt worden ist.

Andererseits erhält man eine Darstellung dieser beiden Größen auch als Funktionen von $v - v_0 = 2f$, indem man (VI; 47, 48) nach F und G auflöst und definitionsgemäß $\Delta = \dfrac{r}{r_0}$ setzt. So folgt zunächst

$$\text{(VII; 4)} \qquad \begin{cases} F = \dfrac{r}{r_0}\left(\cos 2f - \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{\vartheta_0}} \sin 2f\right), \\[2ex] G = \dfrac{r}{r_0 \sqrt{\vartheta_0}} \sin 2f. \end{cases}$$

Es ist aber

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1 + e\cos v_0}{1 + e\cos v} = \frac{1 + e\cos v_0}{1 + e\cos(v_0 - 2f)}$$

und nach (V; 25) $\quad e\cos v_0 = \dfrac{\vartheta_0}{\mu_0} - 1, \quad e\sin v_0 = \dfrac{\sigma_0\sqrt{\vartheta_0}}{\mu_0}, \quad$ mithin

$$\frac{r_0}{r} = \frac{\mu_0}{\vartheta_0}\left[1 + \left(\frac{\vartheta_0}{\mu_0} - 1\right)\cos 2f - \frac{\sigma_0\sqrt{\vartheta_0}}{\mu_0} \sin 2f\right] =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{\mu_0}{\vartheta_0}\right)(1 - \cos 2f) - \frac{\sigma_0}{\sqrt{\vartheta_0}} \sin 2f.$$

Für F und G als Funktionen von $2f$ erhält man also die geschlossenen Ausdrücke

$$\text{(VII; 5)} \qquad \begin{cases} F = \dfrac{\cos 2f - \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{\vartheta_0}} \sin 2f}{1 - \left(1 - \dfrac{\mu_0}{\vartheta_0}\right)(1 - \cos 2f) - \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{\vartheta_0}} \sin 2f}, \\[4ex] G = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{\vartheta_0}} \sin 2f}{1 - \left(1 - \dfrac{\mu_0}{\vartheta_0}\right)(1 - \cos 2f) - \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{\vartheta_0}} \sin 2f}. \end{cases}$$

56. *Entwicklung der rechtwinkligen heliozentrischen Koordinaten nach Potenzen der Zeit*

Sind

$$x_0, y_0, z_0; \quad \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0 \tag{VII; 6}$$

die rechtwinkligen heliozentrischen Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten des Himmelskörpers zur Zeit $t = t_0$, so erhält man, wie gezeigt, die Koordinaten eines benachbarten Bahnpunktes durch

$$x(\tau) = x_0 F + \dot{x}_0 G; \quad y(\tau) = y_0 F + \dot{y}_0 G; \quad z(\tau) = z_0 F + \dot{z}_0 G, \tag{VII; 7}$$

wenn $\tau = k(t - t_0)$ die in Einheiten von $1/k$ mittleren Tagen ausgedrückte Zwischenzeit bedeutet. F und G sind dann Funktionen der Zwischenzeit und der „lokalen Invarianten“ $\mu_0, \sigma_0, \varepsilon_0$ oder eines anderen Tripels von unabhängigen Größen dieser Art, die aus den Koordinaten (VII; 6) symmetrisch aufgebaut sind. Die Taylorsche Entwicklung einer Koordinate nach Potenzen von τ hat dann die Form

$$x(\tau) = x_0 + \dot{x}_0 \tau + \ddot{x}_0 \frac{\tau^2}{2!} + \dddot{x}_0 \frac{\tau^3}{3!} + \cdots + x_0^{(n)} \frac{\tau^n}{n!} + \cdots, \tag{VII; 8}$$

wo $x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \ldots$ die Koordinate und ihre Ableitungen nach der Zeit, genommen für die Epoche $\tau = 0$, bedeuten. Andererseits lassen sich auch die Funktionen F und G in Potenzreihen

$$\begin{aligned} F &= f_0 + f_1 \tau + f_2 \frac{\tau^2}{2!} + \cdots + f_n \frac{\tau^n}{n!} + \cdots; \quad f_n = \left(\frac{d^n F}{d\tau^n}\right)_{\tau = 0}, \\ G &= g_0 + g_1 \tau + g_2 \frac{\tau^2}{2!} + \cdots + g_n \frac{\tau^n}{n!} + \cdots; \quad g_n = \left(\frac{d^n G}{d\tau^n}\right)_{\tau = 0} \end{aligned} \tag{VII; 9}$$

entwickeln. Setzt man das in (VII; 7) ein und berücksichtigt (VII; 8) so findet man

$$x_0^{(n)} = f_n x_0 + g_n \dot{x}_0,$$

$$x_0^{(n+1)} = \dot{f}_n x_0 + \dot{g}_n \dot{x}_0 + f_n \dot{x}_0 + g_n \ddot{x}_0$$

oder, da ja wegen der Bewegungsgleichung (V; 4) $\ddot{x} = -\mu x$,

$$x_0^{(n+1)} = (\dot{f}_n - \mu_0 g_n)\, x_0 + (\dot{g}_n + f_n)\, \dot{x}_0.$$

Die Größen f_n, g_n lassen sich also aus den Anfangswerten

$$f_0 = 1, \quad g_0 = 0$$

mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$f_{n+1} = \dot{f}_n - \mu_0 g_n; \quad g_{n+1} = \dot{g}_n + f_n \tag{VII; 10}$$

sukzessive berechnen, wobei offensichtlich die für $\tau = 0$ genommenen Ableitungen der Invarianten $\mu = r^{-3}$ auftreten. Diese Ausdrücke, die man auf die in Abschn. 40 geschilderte Weise nach (V; 14) bildet, erhalten verschiedene Form, wenn man bei ihrer Bildung verschiedene Tripel von Invarianten benutzt. Wählt man z.B. das Tripel μ, σ, ε, das bei schwach exzentrischen Bahnen gewisse Vorteile bietet, da σ und ε für Kreisbahnen identisch verschwinden, für kreisähnliche Ellipsen also stets klein von der Größenordnung der Exzentrizität sind, so hat man die Differentialformeln

$$\dot{\mu} = -3\mu\sigma; \quad \dot{\sigma} = \varepsilon - 2\sigma^2; \quad \dot{\varepsilon} = -\sigma(\mu + 2\varepsilon) \tag{VII; 11}$$

zu verwenden. Die Formeln (VII; 10) ergeben dann sukzessive (wobei jetzt der Index 0 überall weggelassen werden möge)

$$\begin{aligned}
f_1 &= \quad 0 \\
f_2 &= -\mu \\
f_3 &= +3\mu\sigma \\
f_4 &= -15\mu\sigma^2 + 3\mu\varepsilon + \mu^2 \\
f_5 &= +105\mu\sigma^3 - 45\mu\varepsilon\sigma - 15\mu^2\sigma \\
f_6 &= -945\mu\sigma^4 + 630\mu\varepsilon\sigma^2 + 210\mu^2\sigma^2 - 45\mu\varepsilon^2 - 24\mu^2\varepsilon - \mu^3 \\
f_7 &= +10395\mu\sigma^5 - 9450\mu\varepsilon\sigma^3 - 3150\mu^2\sigma^3 + 1575\mu\varepsilon^2\sigma + 882\mu^2\varepsilon\sigma \\
&\quad + 63\mu^3\sigma \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{VII; 12}$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= \quad 1 \\
g_2 &= \quad 0 \\
g_3 &= -\mu \\
g_4 &= +6\mu\sigma \\
g_5 &= -45\mu\sigma^2 + 9\mu\varepsilon + \mu^2 \\
g_6 &= +420\mu\sigma^3 - 180\mu\varepsilon\sigma - 30\mu^2\sigma \\
g_7 &= -4725\mu\sigma^4 + 3150\mu\varepsilon\sigma^2 + 630\mu^2\sigma^2 - 225\mu\varepsilon^2 - 54\mu^2\varepsilon - \mu^3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{VII; 13}$$

Multipliziert man f_n mit τ^n, g_n mit τ^{n-1}, so erkennt man, daß diese Polynome sich als Funktionen der drei Größen

$$\xi = \mu\tau^2, \quad \eta = \sigma\tau, \quad \zeta = \varepsilon\tau^2$$

schreiben lassen. Daraus folgt, daß F und G/τ [die letztere Größe ist, wie in Abschn. 51 (VI; 49) gezeigt worden ist, das Verhältnis Dreieck: Sektor im Intervall $t_0 \to t$] ebenfalls Funktionen von ξ_0, η_0, ζ_0 allein sind.

Das Gesetz der Koeffizienten der Polynome (VII; 12, 13) ist trotz der Einfachheit der Rekursionsformeln (VII; 10) sehr verwickelt. Es ist eingehend von K. STUMPFF untersucht worden.[1]) Es erübrigt sich aber, die Ergebnisse dieser Untersuchung hier im einzelnen wiederzugeben, da man in der Praxis (z. B. bei der Bahnbestimmung, wo Entwicklungen der rechtwinkligen heliozentrischen Koordinaten für kleine Zwischenzeiten häufig nötig sind) meist mit den ersten fünf Gliedern der Reihen (VII; 9) auskommt, deren Koeffizienten noch verhältnismäßig einfach gebaut sind.

Für schwach exzentrische Bahnen und hinreichend kleines τ liegt der Gedanke nahe, die Entwicklungen für F und G in der Form

$$\text{(VII; 14)}\quad \begin{aligned} F &= \Phi_{00} + \{\Phi_{10}\eta + \Phi_{01}\zeta\} + \{\Phi_{20}\eta^2 + \Phi_{11}\eta\zeta + \Phi_{02}\zeta^2\} + \cdots, \\ \sqrt{\mu}G &= \Psi_{10} + \{\Psi_{10}\eta + \Psi_{01}\zeta\} + \{\Psi_{20}\eta^2 + \Psi_{11}\eta\zeta + \Psi_{02}\zeta^2\} + \cdots \end{aligned}$$

zu schreiben, da η und ζ klein sind und man die Glieder 3. Ordnung, oft genug auch schon die quadratischen, vernachlässigen kann. Die Größen Φ_{ik}, Ψ_{ik} sind Funktionen von ξ allein und können als solche in Tafeln gebracht werden. Insbesondere ist

$$\Phi_{00} = \cos\sqrt{\xi} = \cos\tau\sqrt{\mu};\quad \Psi_{00} = \sin\sqrt{\xi} = \sin\tau\sqrt{\mu},$$

wie man unmittelbar aus (VII; 12, 13) abliest, wenn man $\eta = \zeta = 0$ setzt. Man kann dies auch auf elementare Weise zeigen. Für diesen Fall (Kreisbahn) ist, wenn $r = a = \text{const}$ den Halbmesser der Bahn bezeichnet,

$$x = a\cos v = a[\cos v_0 \cos(v - v_0) - \sin v_0 \sin(v - v_0)].$$

Da nun in der Kreisbahn

$$v - v_0 = M - M_0 = \frac{\tau}{\sqrt{a^3}} = \tau\sqrt{\mu};\quad \dot{v} = \sqrt{\mu};$$

$$\dot{x} = -a\sin v\cdot\dot{v} = -a\sqrt{\mu}\sin v,$$

so erhält man für $t = t_0$

$$x_0 = a\cos v_0,\quad \dot{x}_0 = -a\sqrt{\mu}\sin v_0$$

und daher

$$x = x_0 F + \dot{x}_0 G = x_0\cos\tau\sqrt{\mu} + \dot{x}_0\frac{\sin\tau\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}},$$

woraus die Behauptung folgt. Die übrigen Größen Φ_{ik}, Ψ_{ik} lassen sich als endliche Ausdrücke in den Cosinus und Sinus der Vielfachen von $\tau\sqrt{\mu}$ darstellen.

---

[1]) Astron. Nachr. *274*, 49 (1943) und *275*, 203 (1947).

An Stelle der Entwicklung (VII; 14) lassen sich noch zahlreiche Varianten bilden. Man kann etwa das Tripel μ, σ, ε durch ein anderes ersetzen, z.B. durch μ, σ, ϱ, was bei Parabeln oder parabelähnlichen Bahnen Vorteile bietet, da dann ϱ bzw. $\chi = \varrho\tau^2$ verschwindet oder klein ist. Außerdem gestattet jedes Tripel selbst drei Varianten, da man die Entwicklung als Potenzreihe nach zwei der drei Invarianten schreiben kann, während die Koeffizienten Funktionen der dritten sind. In der Bahnbestimmung der Kleinen Planeten hat sich z.B. die Entwicklung

$$\text{(VII; 15)}\quad \begin{aligned} F &= \varphi_{00} + \{\varphi_{10}\xi + \varphi_{01}\zeta\} + \{\varphi_{20}\xi^2 + \varphi_{11}\xi\zeta + \varphi_{02}\zeta^2\} + \cdots, \\ \frac{G}{\tau} &= \psi_{00} + \{\psi_{10}\xi + \psi_{01}\zeta\} + \{\psi_{20}\xi^2 + \psi_{11}\xi\zeta + \psi_{02}\zeta^2\} + \cdots \end{aligned}$$

bewährt, die gegenüber (VIII; 14) besondere praktische Vorzüge besitzt. In ihr bedeuten φ_{ik}, ψ_{ik} Funktionen der meist sehr kleinen Größe η. Aus (VII; 12, 13) liest man ab:

$$\varphi_{00} = \psi_{00} = 1,$$

außerdem

$$\text{(VII; 16)}\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{10} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta - \frac{5}{8}\eta^2 + \frac{7}{8}\eta^3 - \frac{21}{16}\eta^4 + \frac{33}{16}\eta^5 - \cdots, \\ \varphi_{20} &= \frac{1}{24} - \frac{1}{8}\eta + \frac{7}{24}\eta^2 - \frac{5}{8}\eta^3 + \cdots, \\ \varphi_{11} &= \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\eta + \frac{7}{8}\eta^2 - \frac{15}{8}\eta^3 + \cdots, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(VII; 17)}\quad \left\{ \begin{aligned} \psi_{10} &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\eta - \frac{3}{8}\eta^2 + \frac{7}{12}\eta^3 - \frac{15}{16}\eta^4 + \frac{99}{64}\eta^5 - \cdots, \\ \psi_{20} &= \frac{1}{120} - \frac{1}{24}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 - \frac{5}{16}\eta^3 + \cdots, \\ \psi_{11} &= \frac{3}{40} - \frac{1}{4}\eta + \frac{5}{8}\eta^2 - \frac{45}{32}\eta^3 + \cdots, \end{aligned} \right.$$

während φ_{01}, φ_{02}; ψ_{01}, ψ_{02} (allgemein alle φ_{0i}, ψ_{0i} für $i \geqq 1$) gleich null sind. Ferner besteht eine für die praktische Rechnung vorteilhafte Eigenschaft dieses Systems darin, daß

$$\text{(VII; 18)}\qquad \varphi_{11} = 3\varphi_{20}$$

ist. Außerdem findet man

$$\varphi_{11} - \psi_{11} = \frac{3}{2}(\varphi_{20} - \psi_{20}) = \frac{1}{20}\left(1 - \frac{5}{2}\eta + 5\eta^2 - \frac{75}{8}\eta^3 + \cdots\right)$$

oder, wenn man φ_{11} durch (VII; 18) eliminiert,

$$\psi_{11} = \frac{3}{2}(\varphi_{20} + \psi_{20}). \tag{VII; 19}$$

Setzt man also

$$F = 1 + \varphi; \quad G = \tau(1 + \psi),$$

so erhält man auf Grund von (VII; 18, 19)

$$\varphi = \xi[\varphi_{10} + \varphi_{20}(\xi + 3\zeta) + \cdots],$$
$$\psi = \varphi + \xi\left[(\varphi_{10} - \psi_{10}) + (\varphi_{20} - \psi_{20})\left(\xi + \frac{3}{2}\zeta\right) + \cdots\right].$$

Man kann daher die ersten Glieder der Entwicklung in der Form

$$\begin{aligned} \varphi &= \xi[A + B(\xi + 3\zeta)], \\ \psi &= \varphi + \xi\left[C + D\left(\xi + \frac{3}{2}\zeta\right)\right] \end{aligned} \tag{VII; 20}$$

zusammenfassen, wo A, B, C, D durch folgende Funktionen von η dargestellt werden:

$$A = -\frac{1}{2}\left(1 - \eta + \frac{5}{4}\eta^2 - \frac{7}{4}\eta^3 + \frac{21}{8}\eta^4 - \frac{33}{8}\eta^5 + \cdots\right),$$

$$B = \frac{1}{24}(1 - 3\eta + 7\eta^2 - 15\eta^3 + \cdots),$$

$$C = -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{4}\eta + \frac{3}{4}\eta^2 - \frac{7}{8}\eta^3 + \frac{9}{8}\eta^4 - \cdots\right),$$

$$D = \frac{1}{30}\left(1 - \frac{5}{2}\eta + 5\eta^2 - \frac{75}{8}\eta^3 + \cdots\right),$$

die man (siehe Anhang A VII) leicht in Tafeln bringen kann. Die Formeln (VII; 20) sind bis zur 5. Ordnung in der Zwischenzeit genau und enthalten auch noch erhebliche Teile der Glieder höherer Ordnung. Von den Gliedern 6. Ordnung sind nur die Größen

$$\frac{1}{720}\xi(\xi^2 + 24\xi\zeta + 45\zeta^2)$$

in der Reihe für φ vernachlässigt, die man in Zweifelsfällen durch die bequemere Formel

$$\frac{1}{720}\xi(\xi + 2\zeta)(\xi + 22\zeta)$$

abschätzen kann, in der nur ein Glied von der Gestalt $\frac{1}{720}\xi\zeta^2$ unberücksichtigt geblieben ist. Die Erfahrung hat gelehrt, daß die Formel (VII; 20) selbst in ungünstigen Fällen der Bahnbestimmung genau genug ist, zumal bei größeren Zwischenzeiten, wenn die vernachlässigten Glieder merklich werden, die Störungen Beträge von mindestens der gleichen Größenordnung erreichen können. In allen Fällen, in denen diese Formeln nicht ausreichen, also die unbequeme Berechnung höherer Glieder erforderlich wäre, wird der Rechner ohnehin die im Kapitel V entwickelten strengen Methoden bevorzugen, da die dann erforderliche Lösung der Hauptgleichung (V; 51) weniger Mühe macht.

In manchen Fällen ist es wünschenswert, auch den Radiusvektor r in eine Potenzreihe nach τ zu entwickeln. Die Berechnung der Koeffizienten der TAYLORschen Reihe

$$r = r_0 + \dot{r}_0\tau + \ddot{r}_0\frac{\tau^2}{2!} + \cdots$$

erfolgt etwa nach dem Schema

$$\dot{r} = r\sigma; \quad \dot{\sigma} = \varepsilon - 2\sigma^2; \quad \dot{\varepsilon} = -\sigma(\mu + 2\varepsilon); \quad \dot{\mu} = -3\mu\sigma$$

und ergibt

$$\text{(VII; 21)} \quad \begin{aligned} r &= r_0\left[1 + \sigma_0\tau + \frac{1}{2}(\varepsilon_0 - 2\sigma_0^2)\,\tau^2 + \frac{1}{6}\sigma_0(4\sigma_0^2 - 6\varepsilon_0 - \mu_0)\,\tau^3 + \cdots\right] \\ &= r_0\left[1 + \eta_0 + \frac{1}{2}(\zeta_0 - 2\eta_0^2) + \frac{1}{6}\eta_0(4\eta_0^2 - 6\zeta_0 - \xi_0) + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Ähnliche Potenzreihen lassen sich gleichermaßen für $\mu = r^{-3}$ und beliebige andere positive und negative Potenzen von r nach Bedarf aufstellen.

57. *Die BESSELschen Funktionen*

Bei der Lösung der Aufgabe, die Koordinaten und andere geometrische Größen des Zweikörperproblems in FOURIERreihen nach den Vielfachen der mittleren Anomalie zu entwickeln, wird man auf die *BESSELschen Funktionen* geführt. Ein kurz gefaßter Exkurs über diese für die Himmelsmechanik so wichtigen Funktionen und ihre hauptsächlichsten Eigenschaften wird daher nicht überflüssig sein.

Die BESSELschen Funktionen $J_n(x)$ treten als Koeffizienten von z^n auf, wenn man die „erzeugende Funktion"

$$H(z, x) = e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

nach den positiven und negativen Potenzen von z entwickelt. Es sei also

$$\text{(VII; 22)} \quad \begin{aligned} H(z, x) = J_0(x) + J_1(x)\,z + J_2(x)\,z^2 + \cdots \\ + J_{-1}(x)\,z^{-1} + J_{-2}(x)\,z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

Andererseits ist auf Grund der bekannten Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$H(z, x) = e^{\frac{xz}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2z}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{xz}{2}\right)^{\alpha} \cdot \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta}}{\beta!} \left(\frac{x}{2z}\right)^{\beta} =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \frac{1}{\alpha!\beta!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+\beta} z^{\alpha-\beta}.$$

Setzt man nun $\alpha - \beta = n$, also $\alpha = \beta + n$, und beschränkt man sich vorläufig auf die Glieder mit $n \geqq 0$, so erkennt man, daß der Koeffizient von z^n

$$J_n(x) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta}}{\beta!(\beta+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta+n}$$

lautet. Speziell ist also

$$J_0(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \cdots$$

und für ganze $n > 0$

$$\text{(VII; 23)} \qquad J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1!(n+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!(n+2)!} - \cdots.$$

Die Besselschen Funktionen mit negativem Index ergeben sich aus denen mit positivem Index sodann durch die Beziehungen

$$\text{(VII; 24)} \qquad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

wie man unmittelbar einsieht, wenn man bedenkt, daß die Funktion $H(z, x)$ und damit auch deren Entwicklung (VII; 22) unverändert bleibt, wenn man z mit $-z^{-1}$ vertauscht. Aus der Reihenentwicklung selbst folgt

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x),$$

also ist nach (VII; 24) auch

$$\text{(VII; 25)} \qquad J_{-n}(-x) = J_n(x).$$

Wegen (VII; 24) kann man (VII; 22) auch in der Form

$$\text{(VII; 26)} \qquad e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = J_0(x) + J_1(x)(z - z^{-1}) + J_2(x)(z^2 + z^{-2}) + \\ + J_3(x)(z^3 - z^{-3}) + \cdots$$

schreiben. Setzt man hierin $z = e^{i\varphi}$ und bedenkt, daß

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi; \quad e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi,$$

so erhält man

$$\text{(VII; 27)}\quad e^{ix\sin\varphi} = J_0(x) + 2[J_2(x)\cos 2\varphi + J_4(x)\cos 4\varphi + \cdots] + \\ + 2i[J_1(x)\sin\varphi + J_3(x)\sin 3\varphi + \cdots].$$

Andererseits ist $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, also, wenn man die reellen und die imaginären Teile beider Seiten von (VII; 27) trennt,

$$\text{(VII; 28)}\quad \begin{cases} \cos(x\sin\varphi) = J_0(x) + 2[J_2(x)\cos 2\varphi + J_4(x)\cos 4\varphi + \cdots], \\ \sin(x\sin\varphi) = \qquad\qquad 2[J_1(x)\sin\varphi + J_3(x)\sin 3\varphi + \cdots]. \end{cases}$$

Aus (VII; 28) folgt, daß man die BESSELschen Funktionen auch in Form von bestimmten Integralen schreiben kann. Entwickelt man eine im Intervall $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ periodische Funktion $f(\varphi)$ in eine FOURIERreihe

$$f(\varphi) = a_0 + a_1\cos\varphi + a_2\cos 2\varphi + \cdots + a_n\cos n\varphi + \cdots + \\ + b_1\sin\varphi + b_2\sin 2\varphi + \cdots + b_n\sin n\varphi + \cdots,$$

so lassen sich, wie aus der Theorie dieser Reihen bekannt, die Koeffizienten in der Integralform

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi; \qquad \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi \end{aligned} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

darstellen. Wendet man diesen Satz auf die Reihen (VII; 28) an, so folgt unmittelbar

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi,$$

$$\text{(VII; 29)}\quad J_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x\sin\varphi)\cos 2n\varphi\,d\varphi,$$

$$J_{2n-1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x\sin\varphi)\sin(2n-1)\varphi\,d\varphi.$$

Andererseits bemerkt man, daß die Integrale

$$\text{(VII; 30)}\quad \int_0^{2\pi} \sin(x\sin\varphi)\sin 2n\varphi\,d\varphi, \quad \int_0^{2\pi} \cos(x\sin\varphi)\cos(2n-1)\varphi\,d\varphi$$

verschwinden, da nach (VII; 28) die trigonometrische Entwicklung von $\cos(x \sin\varphi)$ nur Funktionen der geraden, die von $\sin(x\sin\varphi)$ nur Funktionen der ungeraden Vielfachen von φ enthält, und da

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0 \quad \text{für ganze } m \neq n$$

ist. Man kann also zu den Ausdrücken (VII; 29) beliebige Vielfache der Integrale (VII; 30) hinzufügen und beweist so die Formel

$$\text{(VII; 31)} \qquad J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

die man, da der Integrand symmetrisch zu $\varphi = \pi$ verläuft, auch

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi$$

schreiben kann.

Zwischen je drei aufeinanderfolgenden Besselschen Funktionen desselben Arguments besteht eine Rekursionsformel. Differenziert man (VII; 26) nach z, so erhält man

$$\frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right) e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_n(x)\, z^{n-1}$$

und durch Vergleich der Koeffizienten von z^n auf beiden Seiten:

$$\text{(VII; 32)} \qquad n J_n(x) = \frac{x}{2}\left[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right].$$

Eine ähnliche Beziehung ergibt sich, wenn man (VII; 26) nach x differenziert. Es ist dann

$$\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{dJ_n(x)}{dx} z^n,$$

woraus durch Koeffizientenvergleich

$$\text{(VII; 33)} \qquad \frac{dJ_n(x)}{dx} = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right]$$

folgt.

Man kann (VII; 32, 33) zur Herleitung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung benutzen, der alle Besselschen Funktionen genügen: Man differenziere (VII; 33) noch einmal nach x:

$$\frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{dJ_{n-1}(x)}{dx} - \frac{dJ_{n+1}(x)}{dx}\right]$$

und wende auf die rechte Seite (VII; 33) an. Dann folgt zunächst

$$\text{(VII; 34)} \qquad \frac{d^2 J_n(x)}{d x^2} = \frac{1}{4}[J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)].$$

Nach (VII; 32) ist ferner

$$(n+1)\, J_{n+1}(x) = \frac{x}{2}[J_n(x) + J_{n+2}(x)],$$

$$(n-1)\, J_{n-1}(x) = \frac{x}{2}[J_n(x) + J_{n-2}(x)],$$

also, wenn man diese beiden Gleichungen addiert,

$$n(J_{n+1} + J_{n-1}) + (J_{n+1} - J_{n-1}) = \frac{x}{2}(J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2}) + 2xJ_n.$$

Formt man dies nach (VII; 32, 33, 34) um und dividiert durch $2x$, so erhält man die *Besselsche Differentialgleichung*

$$\text{(VII; 35)} \qquad \frac{d^2 J_n(x)}{d x^2} + \frac{1}{x}\frac{d J_n(x)}{d x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0$$

für die Funktionen $J_n(x)$.

58. *Entwicklung von Funktionen der exzentrischen Anomalie in Fourierreihen nach der mittleren Anomalie*

Wir haben gesehen, daß verschiedene Bahngrößen (z.B. die rechtwinkligen Koordinaten $x = r\cos v$, $y = r\sin v$ in der Bahnebene, die Hilfsgrößen F und G, der Radiusvektor und seine Potenzen) sich sehr einfach als endliche Ausdrücke in den Cosinus und Sinus der exzentrischen Anomalie und ihrer Vielfachen darstellen lassen. Die Aufgabe, diese Größen in periodische Reihen nach der Zeit, d.h. in Fourierreihen nach den Vielfachen der mittleren Anomalie M zu entwickeln, wird also bereits weitgehend gelöst sein, wenn es gelingt, die Funktionen $\cos E$ und $\sin E$, allgemeiner $\cos nE$ und $\sin nE$, durch solche Reihen darzustellen. Bei der Lösung dieser Aufgabe werden uns die Ergebnisse des vorigen Abschnitts sehr nützlich sein.

Offenbar ist der Ansatz

$$\cos nE = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\cos M + a_2^{(n)}\cos 2M + \cdots + a_\nu^{(n)}\cos \nu M + \cdots,$$

$$\sin nE = \qquad b_1^{(n)}\sin M + b_2^{(n)}\sin 2M + \cdots + b_\nu^{(n)}\sin \nu M + \cdots$$

gerechtfertigt, denn da $E(-M) = -E(M)$, ist $\cos nE$ eine gerade Funktion von E und M, so daß ihre Reihenentwicklung nur cos-Glieder enthalten wird.

Ebenso ist $\sin nE$ ungerade in E und M, kann also nur sin-Glieder enthalten. Die FOURIERkoeffizienten der obigen Entwicklung sind demnach durch

$$a_0^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nE\, dM; \quad a_\nu^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos nE \cos \nu M\, dM,$$

$$b_\nu^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin nE \sin \nu M\, dM \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

gegeben.

Zur Berechnung von $a_0^{(n)}$ setzt man

$$dM = dE(1 - e\cos E),$$

was ja unmittelbar durch Differenzieren der KEPLERschen Gleichung

$$M = E - e\sin E \tag{VII; 36}$$

folgt. Es ist demnach, da E und M die Intervallgrenzen 0 und 2π gleichzeitig durchlaufen,

$$a_0^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nE(1 - e\cos E)\, dE.$$

Da nun

$$\int_0^{2\pi} \cos nE\, dE = 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos nE \cos E\, dE = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n > 1, \\ \pi & \text{für} \quad n = 1, \end{cases}$$

so ergibt sich

$$a_0^{(1)} = -\frac{e}{2}; \quad a_0^{(n)} = 0 \quad \text{für} \quad n > 1. \tag{VII; 37}$$

Das Integral für $a_\nu^{(n)}$ $(\nu > 0)$ formt man durch partielle Integration um:

$$a_\nu^{(n)} = \frac{1}{\nu\pi}\int_0^{2\pi} \cos nE \frac{d\sin \nu M}{dM}\, dM =$$

$$= \left[\frac{\cos nE \sin \nu M}{\nu\pi}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\nu\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\cos nE}{dM} \sin \nu M\, dM.$$

Das erste Glied rechts ist null, das zweite läßt sich schreiben:

$$a_\nu^{(n)} = -\frac{1}{\nu\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\cos nE}{dE}\sin \nu M\, dE = \frac{n}{\nu\pi}\int_0^{2\pi} \sin nE \sin \nu M\, dE.$$

Substituiert man nun M durch (VII; 36), so erhält man

$$a_n^{(\nu)} = \frac{n}{\nu\pi}\int_0^{2\pi} \sin nE \sin(\nu E - \nu e \sin E)\, dE$$

oder nach Anwendung einer bekannten trigonometrischen Formel

$$a_\nu^{(n)} = \frac{n}{2\nu\pi}\int_0^{2\pi} \{\cos[(\nu - n)E - \nu e \sin E] - \cos[(\nu + n)E - \nu e \sin E]\}\, dE.$$

Das ist aber nach (VII; 31)

$$a_\nu^{(n)} = \frac{n}{\nu}[J_{\nu-n}(\nu e) - J_{\nu+n}(\nu e)].$$

Auf ganz entsprechende Weise berechnet man

$$b_\nu^{(n)} = -\frac{1}{\nu\pi}\int_0^{2\pi} \sin nE \frac{d\cos \nu M}{dM}\, dM,$$

woraus nach partieller Integration

$$b_\nu^{(n)} = \frac{n}{\nu\pi}\int_0^{2\pi} \cos nE \cos \nu M\, dE = \frac{n}{\nu\pi}\int_0^{2\pi} \cos nE \cos(\nu E - \nu e \sin E)\, dE$$

oder, nach Umformung des Cosinusproduktes und Anwendung von (VII; 31),

$$b_\nu^{(n)} = \frac{n}{\nu}[J_{\nu-n}(\nu e) + J_{\nu+n}(\nu e)]$$

folgt.

Für $n > 1$ erhält man somit

$$\text{(VII; 38)} \qquad \begin{cases} \cos nE = n \sum_{\nu=1}^{\infty} [J_{\nu-n}(\nu e) - J_{\nu+n}(\nu e)] \dfrac{\cos \nu M}{\nu}, \\[2ex] \sin nE = n \sum_{\nu=1}^{\infty} [J_{\nu-n}(\nu e) + J_{\nu+n}(\nu e)] \dfrac{\sin \nu M}{\nu} \end{cases}$$

oder, wenn man nach (VII; 25) $J_{\nu+n}(\nu e) = J_{\nu-n}(-\nu e)$ setzt,

$$\text{(VII; 39)} \qquad \begin{cases} \cos nE = n \sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' J_{-\nu-n}(\nu e) \dfrac{\cos \nu M}{\nu}, \\ \sin nE = n \sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' J_{\nu-n}(\nu e) \dfrac{\sin \nu M}{\nu}, \end{cases}$$

wobei das Zeichen Σ' bedeuten soll, daß bei der Summierung das Glied mit $\nu = 0$ auszuschließen ist.

Für $n = 1$ tritt der Sonderfall ein, daß nach (VII; 37) das konstante Glied nicht verschwindet. Ferner lassen sich die Koeffizienten der periodischen Glieder mit Hilfe von (VII; 32, 33) umformen:

$$a_\nu^{(1)} = \frac{1}{\nu}[J_{\nu-1}(\nu e) - J_{\nu+1}(\nu e)] = \frac{2}{\nu}\frac{dJ(\nu e)}{d(\nu e)} = \frac{2}{\nu^2}\frac{dJ(\nu e)}{de},$$

$$b_\nu^{(1)} = \frac{1}{\nu}[J_{\nu-1}(\nu e) + J_{\nu+1}(\nu e)] = \frac{2}{\nu e}J_\nu(\nu e).$$

Es ist also

$$\text{(VII; 40)} \qquad \begin{cases} \cos E = 2\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{dJ_\nu(\nu e)}{de}\dfrac{\cos \nu M}{\nu^2} - \dfrac{e}{2}, \\ \sin E = \dfrac{2}{e}\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(\nu e)\dfrac{\sin \nu M}{\nu}. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Formeln (VII; 40) lassen sich bereits verschiedene in der elliptischen Zweikörperbewegung auftretende Größen in FOURIERreihen nach den Vielfachen der mittleren Anomalie entwickeln. So folgt z. B. aus

$$\text{(VII; 41)} \qquad r = a(1 - e\cos E)$$

unmittelbar

$$\text{(VII; 42)} \qquad \frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - 2e\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{dJ_\nu(\nu e)}{de}\frac{\cos \nu M}{\nu^2}.$$

Hierbei möge darauf hingewiesen werden, daß $J_\nu(\nu e)$, wenn e klein von der 1. Ordnung ist, die Ordnung ν, also $\dfrac{dJ_\nu(\nu e)}{de}$ die Ordnung $\nu - 1$ hat. Das Glied mit $\cos \nu M$ in obiger Reihe ist also von der ν-ten Ordnung in der Exzentrizität.

Auch die auf die Apsidenlinie als Abszissenachse bezogenen rechtwinkligen heliozentrischen Koordinaten eines Planeten in der Bahnebene lassen sich sofort als trigonometrische Reihen nach M hinschreiben. Aus

$$x = r\cos v = a(1 - e\cos E); \quad y = r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\sin E$$

folgt

(VII; 43)
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = 2\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{d J_\nu(\nu e)}{d e} \dfrac{\cos \nu M}{\nu^2} - \dfrac{3}{2} e, \\ \dfrac{y}{a} = 2 \dfrac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(\nu e) \dfrac{\sin \nu M}{\nu}. \end{cases}$$

Die Entwicklung des reziproken Radiusvektors erhält man bequem auf folgende Weise: Auf Grund der KEPLERschen Gleichung ist zunächst

(VII; 44)
$$E - M = e \sin E = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(\nu e) \frac{\sin \nu M}{\nu}.$$

Differenziert man diese Gleichung nach M, so erhält man wegen

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E} = \frac{a}{r}$$

(VII; 45)
$$\frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(\nu e) \cos \nu M.$$

Von den übrigen Potenzen von r wollen wir an dieser Stelle nur die häufig gebrauchten Funktionen r^2 und r^{-3} entwickeln. Die Reihe für r^2 ergibt sich ohne Schwierigkeit, wenn man

(VII; 46)
$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = (1 - e \cos E)^2 = 1 - 2e \cos E + \frac{e^2}{2}(1 + \cos 2E)$$

mit Hilfe von (VII; 38, 40) umformt. Man findet, wenn man kurz $J_\nu(\nu e) = J_\nu$ schreibt,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{e^2}{2} - \left[4e \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d J_\nu}{d e} \frac{\cos \nu M}{\nu^2} - e^2\right] + e^2 [J_{\nu-2} - J_{\nu+2}] \frac{\cos \nu M}{\nu} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2} e^2 - 2e \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu M}{\nu^2} \left[2 \frac{d J_\nu}{d e} - \frac{\nu e}{2} (J_{\nu-2} - J_{\nu+2})\right].$$

Setzt man nun nach (VII; 33), mit $x = \nu e$,

$$2 \frac{d J_\nu}{d e} = \nu (J_{\nu-1} - J_{\nu+1})$$

und nach (VII; 32), wenn man $\nu - 1$ bzw. $\nu + 1$ statt n einführt,

$$\nu J_{\nu-1} = \frac{\nu e}{2} (J_{\nu-2} + J_\nu) + J_{\nu-1},$$

$$-\nu J_{\nu+1} = -\frac{\nu e}{2} (J_\nu + J_{\nu+2}) + J_{\nu+1},$$

so erhält man

$$2\frac{dJ_\nu}{de} - \frac{\nu e}{2}(J_{\nu-2} - J_{\nu+2}) = J_{\nu-1} - J_{\nu+1} = \frac{2}{e}J_\nu(\nu e),$$

also schließlich die einfache Formel

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2}e^2 - 4\sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(\nu e)\frac{\cos\nu M}{\nu^2}. \tag{VII; 47}$$

Eine kürzere und elegantere Ableitung von (VII; 47) ergibt sich, wenn man (VII; 46) differenziert:

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) = 2(1 - e\cos M)\, e\sin E\,\frac{dE}{dM} = 2e\sin E = 4\sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(\nu e)\frac{\sin\nu M}{\nu}.$$

Integriert man dies wieder über M, so findet man

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = -4\sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(\nu e)\frac{\cos\nu M}{\nu^2} + \text{const.}$$

Der Wert der Integrationskonstanten folgt aber aus (VII; 46) und aus der oben bewiesenen Tatsache, daß die Entwicklung von $\cos E$ das konstante Glied $-\frac{e}{2}$ hat, während das der Entwicklung von $\cos 2E$ gleich null ist.

In der Störungstheorie werden Entwicklungen der Funktionen

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv; \quad \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv$$

gebraucht, wo n eine beliebige ganze, m eine positive ganze Zahl bedeutet. Wir wollen an dieser Stelle, außer den schon erledigten Fällen $m = n = 1$ und $m = 0$; $n = 2$, 1 und -1, nur noch die beiden Fälle $m = 1$; $n = 0$ und -2 behandeln. Der erstere ergibt die Funktionen $\cos v$ und $\sin v$ selbst. Aus der Kegelschnittgleichung erhält man

$$\cos v = \frac{1 - e^2}{e}\cdot\frac{a}{r} - \frac{1}{e} \tag{VII; 48}$$

und aus $\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{dr}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dM} = \frac{1}{a}\frac{e\sin v}{\sqrt{a(1-e^2)}}\sqrt{a^3}$

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right). \tag{VII; 49}$$

Setzt man in (VII; 48) die Reihe (VII; 45) und in (VII; 49) die Ableitung der

Reihe (VII; 42) nach M ein, so ist

$$\text{(VII; 50)} \qquad \begin{cases} \cos v = 2\dfrac{1-e^2}{e}\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(\nu e)\cos\nu M - e, \\ \sin v = 2\sqrt{1-e^2}\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{dJ_\nu(\nu e)}{de}\dfrac{\sin\nu M}{\nu}. \end{cases}$$

Der zweite Fall betrifft die Funktionen $r^{-2}\cos v$ und $r^{-2}\sin v$, deren Bedeutung sichtbar wird, wenn man die Differentialgleichungen der ebenen Zweikörperbewegung,

$$\ddot{x} = -xr^{-3}, \quad \ddot{y} = -yr^{-3}$$

betrachtet. Es sind nämlich, wegen $x = r\cos v$, $y = r\sin v$,

$$\frac{\cos v}{r^2} = -\ddot{x}, \quad \frac{\sin v}{r^2} = -\ddot{y}$$

die negativ genommenen Beschleunigungskoordinaten des Himmelskörpers. Da nun

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dM^2}\left(\frac{dM}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{a^3}\frac{d^2x}{dM^2}, \quad \text{ebenso} \quad \ddot{y} = \frac{1}{a^3}\frac{d^2y}{dM^2},$$

so ergeben sich die gesuchten Formeln, wenn man (VII; 43) zweimal nach M differenziert. Es ist demnach

$$\text{(VII; 51)} \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{a}{r}\right)^2\cos v = 2\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{dJ_\nu(\nu e)}{de}\cos\nu M, \\ \left(\dfrac{a}{r}\right)^2\sin v = 2\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e}\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\nu J_\nu(\nu e)\sin\nu M. \end{cases}$$

Statt dessen kann man auch symmetrischer

$$\text{(VII; 52)} \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{a}{r}\right)^2\cos v = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\nu(J_{\nu-1} - J_{\nu+1})\cos\nu M = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty}\nu J_{\nu-1}(\nu e)\cos\nu M, \\ \left(\dfrac{a}{r}\right)^2\sin v = \sqrt{1-e^2}\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\nu(J_{\nu-1} + J_{\nu+1})\sin\nu M = \\ \qquad = \sqrt{1-e^2}\sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty}\nu J_{\nu-1}(\nu e)\sin\nu M \end{cases}$$

schreiben, indem man (VII; 33, 32) benutzt und $J_{\nu+1}(\nu e)$ nach (VII; 25) durch $J_{-\nu-1}(-\nu e)$ ersetzt. In diesen Summen braucht man nicht, wie in (VII; 39), das Glied mit $\nu = 0$ auszuschließen, da dieses ohnehin verschwindet.

Wenn man will, kann man auch die wichtigen Größen F und G in Fourierreihen nach Vielfachen von M entwickeln, da sie nach (VII; 3) lineare Funk-

tionen von

$$\cos 2g = \cos (E - E_0) = \cos E_0 \cos E + \sin E_0 \sin E,$$

$$\sin 2g = \sin (E - E_0) = \cos E_0 \sin E - \sin E_0 \cos E$$

sind, wobei

$$\cos E_0 = \frac{\varepsilon_0}{e\mu_0}; \quad \sin E_0 = \frac{\sigma_0 \sqrt{\varrho_0}}{e\mu_0}$$

nur von e und den lokalen Invarianten der Epoche $t = t_0$ abhängen. Man braucht also nur die Entwicklungen (VII; 38) einzusetzen. Aber diese Reihen haben kaum praktischen Wert, da bei der Entwicklung der rechtwinkligen Koordinaten die Zwischenzeit $\tau = k(t - t_0)$ als unabhängige Variable auftritt, eine gleichwertige trigonometrische Entwicklung also nicht nach Vielfachen von M, sondern vielmehr nach denen von $M - M_0 = \frac{\tau}{\sqrt{a^3}} = \tau \frac{\sqrt{\varrho_0^3}}{\mu_0}$ erfolgen müßte. Eine solche Entwicklung ist mit Hilfe des Ansatzes

$$\cos 2g = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} [\alpha_\nu \cos \nu (M - M_0) + \beta_\nu \sin \nu (M - M_0)],$$

$$\sin 2g = \gamma_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} [\gamma_\nu \cos \nu (M - M_0) + \delta_\nu \sin \nu (M - M_0)]$$

tatsächlich möglich. Die von den lokalen Invarianten abhängigen FOURIERkoeffizienten erweisen sich aber als so verwickelt, daß ein praktisches Bedürfnis nach Formeln dieser Art kaum besteht. Es zeigt sich überdies, daß – abgesehen von den konstanten Gliedern, die von der Ordnung der Exzentrizität sind – die Terme mit $\cos n(M - M_0)$ und $\sin n(M - M_0)$ von der $(n - 1)$-ten Ordnung sind, so daß man auch bei kleinen Exzentrizitäten, wie sie bei der Mehrzahl der Planetoidenbahnen vorkommen, ziemlich viele Glieder berechnen müßte, um die Genauigkeit sechs- oder siebenstelliger Rechnung auszuschöpfen. Die früher bewiesenen strengen Formeln für F und G leisten das bedeutend müheloser.

59. *Entwicklung von Anomaliedifferenzen*

Die Anomalien M, E und v unterscheiden sich um Größen von der Ordnung der Exzentrizität voneinander. Es ist daher nützlich, die Entwicklungen der Differenzen $E - M$, $v - M$, $v - E$ in FOURIERreihen nach Vielfachen der mittleren Anomalie zu besitzen, die für kleine e rasch konvergieren. Diese Aufgaben, die sich leicht vermehren lassen, wenn man 1. auch die „antifokale Anomalie" w und andere in der Zweikörperbewegung vorkommende Winkel von Anomaliecharakter mit einbezieht, 2. auch trigonometrische Reihen nach E, v, w usw. zu entwickeln sucht, bieten sehr unterschiedliche Schwierigkeiten. Sehr leicht ist z.B. die Differenz $E - M$ nach E und M zu entwickeln, wie dies in (VII; 44) geschehen ist.

Verhältnismäßig einfach lösbar ist auch die Aufgabe, die Differenzen zwischen den Winkeln E, v und w nach Funktionen der Vielfachen jedes dieser drei Winkel zu entwickeln. Man bedient sich dazu der schon früher (II; 14, 21) bewiesenen Zusammenhänge

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}; \quad \operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{w}{2}; \quad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}\frac{w}{2}.$$

Diese Beziehungen sind von der Form

$$\operatorname{tg} y = a \operatorname{tg} x,$$

wo a (im Falle schwach exzentrischer Ellipsen, für den allein das Problem praktische Bedeutung hat) wenig von der Einheit verschieden ist. In diesem Falle läßt sich $y - x$ in der Form der aus der Analysis wohlbekannten trigonometrischen Reihe[1])

$$y - x = \frac{a-1}{a+1}\sin 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 \sin 4x + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 \sin 6x + \cdots$$

schreiben. Setzt man in den vorliegenden Fällen für a die Werte $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \frac{1+e}{1-e}$ ein, so erhält man für $\frac{a-1}{a+1}$ beziehungsweise

$$\frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2};$$

$$\frac{(1+e) - (1-e)}{(1+e) + (1-e)} = e = \sin\varphi$$

und daher die Reihen

$$v - E = 2\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin E + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\sin 2E + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\sin 3E + \cdots\right],$$

$$\text{(VII; 53)} \quad E - w = 2\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin w + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\sin 2w + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\sin 3w + \cdots\right],$$

$$v - w = 2\left[e\sin w + \frac{1}{2}e^2\sin 2w + \frac{1}{3}e^3\sin^3 w + \cdots\right].$$

---

[1]) Den Beweis findet man in den meisten Lehrbüchern der Sphärischen Astronomie, z.B. auch in K. Stumpff: „Geographische Ortsbestimmungen", S. 208/209 (Berlin 1955).

Umgekehrt ist aber auch

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}; \quad \operatorname{tg}\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}\frac{v}{2},$$

so daß man in (VII; 53) die beiden Variablen miteinander und gleichzeitig e mit $-e$ vertauschen darf. Es gilt demnach ebenfalls

$$v - E = 2\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin v - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\sin 2v + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\sin 3v - \cdots\right],$$

$$\text{(VII; 54)} \quad E - w = 2\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin E - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\sin 2E + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\sin 3E - \cdots\right],$$

$$v - w = 2\left[e\sin v - \frac{1}{2}e^2\sin 2v + \frac{1}{3}e^3\sin 3v - \cdots\right].$$

Durch Bildung von Differenzen zwischen je zwei dieser Reihen erhält man zusätzlich die Formeln

$$v - E = (v - w) - (E - w) =$$
$$= 2\left[\left(e - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\sin w + \frac{1}{2}\left(e^2 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)\sin 2w + \cdots\right],$$

$$\text{(VII; 55)} \quad E - w = (v - w) - (v - E) =$$
$$= 2\left[\left(e - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\sin v - \frac{1}{2}\left(e^2 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)\sin 2w + \cdots\right],$$

$$v - w = (v - E) + (E - w) =$$
$$= 4\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin E + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\sin 3E + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5\frac{\varphi}{2}\sin 5E + \cdots\right],$$

in denen die Differenz zweier der drei Anomalien durch die dritte ausgedrückt wird. Die letzte dieser Reihen kann dazu dienen, den Winkel

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \frac{v - w}{2}$$

zu berechnen, der von den Vektoren des Ortes und der Geschwindigkeit eingeschlossen wird [siehe (III; 66)]. Diese Reihe konvergiert besonders rasch, da sie nur die ungeraden Potenzen der Exzentrizität enthält.

Nach einem Vorschlag von J. G. Behrens[1]) lassen sich trigonometrische Reihen von bemerkenswert guter Konvergenz auch finden, wenn man als wei-

---

[1]) Astron. Nachr. *284,* 145 (1958).

tere „Anomalie“ den Richtungswinkel ψ der Bahnnormale gegen die Perihelrichtung der großen Achse hinzunimmt oder, was dasselbe ist, den Winkel, den der Geschwindigkeitsvektor mit der Richtung der Perihelgeschwindigkeit bildet. Dieser Winkel, der ebenso wie die anderen Anomalien während eines Umlaufs von Perihel zu Perihel von 0 bis 2π wächst, ist, wie in Abschn. 23 (III; 67) gezeigt wurde,

$$\psi = \frac{v + w}{2}, \tag{VII; 56}$$

und man findet leicht, daß

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \operatorname{tg}\frac{w}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{v}{2}\operatorname{tg}\frac{w}{2}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} + \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right)\operatorname{tg}\frac{E}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{E}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{tg}E.$$

Es bestehen also die Zusammenhänge

$$\operatorname{tg}\psi = \sec\varphi\operatorname{tg}E; \quad \operatorname{tg}E = \cos\varphi\operatorname{tg}\psi, \tag{VII; 57}$$

aus denen man wegen

$$\frac{\sec\varphi - 1}{\sec\varphi + 1} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}; \quad \frac{\cos\varphi - 1}{\cos\varphi + 1} = -\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$$

die beiden für kleines $\varphi = \operatorname{arc}\sin e$ rasch abklingenden Reihen

$$\begin{aligned}\psi - E &= \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\sin 2E + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^4\frac{\varphi}{2}\sin 4E + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^6\frac{\varphi}{2}\sin 6E + \cdots \\ &= \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\sin 2\psi - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^4\frac{\varphi}{2}\sin 4\psi + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^6\frac{\varphi}{2}\sin 6\psi + \cdots\end{aligned} \tag{VII; 58}$$

herleitet. Weiter folgt aus (VII; 57)

$$\begin{aligned} A\sin\psi &= \sin E, \\ A\cos\psi &= \sqrt{1-e^2}\cos E. \end{aligned} \qquad \left(A = \sqrt{1 - e^2\cos^2 E}\right) \tag{VII; 59}$$

Setzt man rechts die Ausdrücke (III; 60)

$$\sin E = \sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin v}{1 + e\cos v}; \quad \cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e\cos v}$$

ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} B\sin\psi &= \sin v, \\ B\cos\psi &= \cos v + e. \end{aligned} \qquad \left(B = \sqrt{1 + 2e\cos v + e^2}\right) \tag{VII; 60}$$

Multipliziert man die beiden Gleichungen (VII; 60) mit $\cos\psi$ bzw. $-\sin\psi$ und

addiert, so entsteht

$$\sin(v - \psi) = e \sin\psi; \quad v - \psi = \operatorname{arc\,sin}(e \sin\psi)$$

oder, wenn man den arc sin in eine Potenzreihe entwickelt,

$$v - \psi = e \sin\psi + \frac{1}{6}(e \sin\psi)^3 + \frac{3}{40}(e \sin\psi)^5 + \frac{5}{112}(e \sin\psi)^7 + \cdots.$$

Mit Hilfe der bekannten trigonometrischen Formeln

$$\begin{aligned}
2^2 \sin^3\psi &= 3 \sin\psi - \sin 3\psi, \\
2^4 \sin^5\psi &= 10 \sin\psi - 5 \sin 3\psi + \sin 5\psi, \\
2^6 \sin^7\psi &= 35 \sin\psi - 21 \sin 3\psi + 7 \sin 5\psi - \sin 7\psi, \qquad \text{(VII; 61)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$2^{2n} \sin^{2n+1}\psi = \binom{2n+1}{n} \sin\psi - \binom{2n+1}{n-1} \sin 3\psi + \binom{2n+1}{n-2} \sin 5\psi - \cdots$$

verwandelt man diese Reihe, bis zur 7. Ordnung genau, in

$$\begin{aligned}
\text{(VII; 62)} \quad v - \psi = \sin\psi &\left[e + \frac{1}{8}e^3 + \frac{3}{64}e^5 + \frac{25}{1024}e^7 + \cdots\right] - \\
- \sin 3\psi &\left[\frac{1}{24}e^3 + \frac{3}{128}e^5 + \frac{15}{1024}e^7 + \cdots\right] + \\
+ \sin 5\psi &\left[\frac{3}{640}e^5 + \frac{5}{1024}e^7 + \cdots\right] - \\
- \sin 7\psi &\left[\frac{5}{7168}e^7 + \cdots\right] + \cdots.
\end{aligned}$$

Nun ist nach (II; 23), wenn s den Abstand des Planeten vom Antifokus bedeutet,

$$r \frac{dv}{dt} = s \frac{dw}{dt}.$$

Es ist demnach

$$\begin{aligned}
\frac{d(v - \psi)}{dt} &= \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt} - \frac{dw}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}\left(1 - \frac{r}{s}\right), \\
\frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt} + \frac{dw}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}\left(1 + \frac{r}{s}\right),
\end{aligned}$$

mithin

$$\frac{d(v-\psi)}{d\psi} = \frac{s-r}{s+r}$$

oder, da $s = 2a - r$,

$$\frac{d(v-\psi)}{d\psi} = 1 - \frac{r}{a}.$$

Differenziert man also (VII; 62) nach ψ, so ergibt sich für r/a die Entwicklung

$$\text{(VII; 63)} \quad \frac{r}{a} = 1 - \cos\psi\left[e + \frac{1}{8}e^3 + \frac{3}{64}e^5 + \frac{25}{1024}e^7 + \cdots\right] + \\ + \cos 3\psi\left[\frac{1}{8}e^3 + \frac{9}{128}e^5 + \frac{45}{1024}e^7 + \cdots\right] - \\ - \cos 5\psi\left[\frac{3}{128}e^5 + \frac{25}{1024}e^7 + \cdots\right] + \\ + \cos 7\psi\left[\frac{5}{1024}e^7 + \cdots\right] - \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert erheblich rascher als die Entwicklung (VII; 42) dieser Größe nach den Cosinus der Vielfachen der mittleren Anomalie, die man auch in der expliziten Form

$$\text{(VII; 64)} \quad \frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - \cos M\left[e - \frac{3}{8}e^3 + \frac{5}{192}e^5 - \frac{7}{9216}e^7 + \cdots\right] - \\ - \cos 2M\left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{3} + \frac{e^6}{16} - \cdots\right] - \\ - \cos 3M\left[\frac{3}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^5 + \frac{567}{5120}e^7 - \cdots\right] - \\ - \cos 4M\left[\frac{1}{3}e^4 - \frac{2}{5}e^6 + \cdots\right] - \\ - \cos 5M\left[\frac{125}{384}e^5 - \frac{4375}{9216}e^7 + \cdots\right] - \\ - \cos 6M\left[\frac{27}{80}e^6 - \cdots\right] - \\ - \cos 7M\left[\frac{16807}{46080}e^7 - \cdots\right] - \cdots$$

schreiben kann, wenn man die BESSELschen Funktionen durch ihre Potenzreihen nach e ersetzt.

60. *Die Mittelpunktsgleichung*

Bedeutsamer als die Entwicklungen nach Funktionen von E, v, w, ψ sind die trigonometrischen Reihen, die nach den Vielfachen der mittleren Anomalie fortschreiten, da sie die zu entwickelnden Größen unmittelbar als periodische Funktionen der Zeit liefern. Für verschiedene Bahngrößen haben wir dieses Problem schon in Abschn. 58 gelöst, so für einige Potenzen des Radiusvektors, für trigonometrische Funktionen von E und v, für die Differenz $E - M$ und andere. Unter allen Formeln dieser Art ist aber die unter dem Namen „Mittelpunktsgleichung" bekannte Differenz $v - M$ besonders wichtig, da sie die wahre Anomalie direkt als Funktion der seit dem Periheldurchgang verflossenen Zeit auszudrücken gestattet.

In der klassischen Literatur ist daher auch auf die Berechnung der von e abhängigen Koeffizienten der Reihe

$$v - M = \alpha_1 \sin M + \alpha_2 \sin 2M + \alpha_3 \sin 3M + \cdots \tag{VII; 65}$$

sehr viel Mühe verwendet worden, und die Mathematiker haben außerordentlich reizvolle, tief in die Funktionentheorie führende Überlegungen angestellt, um diese Aufgabe zu lösen. Der Leser, der sich für diese Dinge interessiert, sei besonders auf die schöne und glänzend dargestellte Untersuchung dieses Problems hingewiesen, die F. TISSERAND im Kapitel XIV des Bandes I seines „Traité de Mécanique céleste" ausgeführt hat. Jeder, der sich eingehender mit Himmelsmechanik beschäftigt, sollte diese klassische Darstellung gelesen haben, deren mathematische Eleganz und Klarheit unübertrefflich ist. Es möge daher hier ein anderer Weg gezeigt werden, der ohne anspruchsvolle Hilfsmittel zu dem gewünschten Ziele führt.

Man kann etwa so vorgehen, daß man zunächst

$$v - M = (E - M) + (v - E)$$

setzt und für die beiden Summanden der rechten Seite ihre Entwicklungen nach Funktionen von E einsetzt, die nach (VII; 44, 53) bereits vorliegen. Man erhält dann

$$v - M = 2\left[\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{e}{2}\right)\sin E + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\sin 2E + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\sin 3E + \cdots\right].$$

Setzt man hierin nun nach (VII; 38) die Entwicklungen von $\sin nE$ ein, so ergibt sich unmittelbar eine Reihe von der Form (VII; 65). Man erkennt leicht, daß α_n, der Koeffizient von $\sin nM$, von der n-ten Ordnung in der Exentrizität ist. In der Reihe (VII; 38) für $\sin nE$ enthält nämlich jeder Koeffizient einen Beitrag nullter Ordnung, nämlich $J_0(ne)$, während alle übrigen Glieder von höherer Ordnung sind. Der Koeffizient $\operatorname{tg}^n\frac{\varphi}{2}$ ist aber von der n-ten Ordnung.

Es bietet somit wenig Schwierigkeiten, wenn man noch

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e} = \frac{1}{2}e + \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{16}e^5 + \frac{5}{128}e^7 + \cdots$$

berücksichtigt, die oben angedeutete Rechnung bis zu einer mäßig hohen Ordnung in e durchzuführen. So ergibt sich bis zur 7. Ordnung

$$\begin{aligned}
\text{(VII; 66)} \quad v - M = {} & \sin M\left[2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5 + \frac{107}{4608}e^7 + \cdots\right] + \\
& + \sin 2M\left[\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{96}e^6 - \cdots\right] + \\
& + \sin 3M\left[\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5 + \frac{95}{512}e^7 - \cdots\right] + \\
& + \sin 4M\left[\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6 + \cdots\right] + \\
& + \sin 5M\left[\frac{1097}{960}e^5 - \frac{5957}{4608}e^7 + \cdots\right] + \\
& + \sin 6M\left[\frac{1223}{960}e^6 - \cdots\right] + \\
& + \sin 7M\left[\frac{47273}{32256}e^7 - \cdots\right] + \cdots.
\end{aligned}$$

Auf gleiche Weise erhält man aus (VII; 44, 54) $w - M = (E - M) - (E - w)$, also nach Ausführung der Rechnung

$$\begin{aligned}
\text{(VII; 67)} \quad w - M = {} & -\sin M\left[\frac{1}{2}e^3 + \frac{5}{24}e^5 + \frac{113}{768}e^7 + \cdots\right] + \\
& + \sin 2M\left[\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{13}{112}e^6 - \cdots\right] + \\
& + \sin 3M\left[\frac{1}{6}e^3 - \frac{3}{16}e^5 + \frac{41}{1280}e^7 - \cdots\right] + \\
& + \sin 4M\left[\frac{5}{32}e^4 - \frac{19}{96}e^6 + \cdots\right] + \\
& + \sin 5M\left[\frac{37}{240}e^5 - \frac{181}{768}e^7 + \cdots\right] + \\
& + \sin 6M\left[\frac{31}{192}e^6 - \cdots\right] + \\
& + \sin 7M\left[\frac{4721}{26880} - \cdots\right] + \cdots.
\end{aligned}$$

Man bemerkt auch hier die schon früher bewiesene Eigenschaft der antifokalen Anomalie, sich von der mittleren nur um Größen 2. und höherer Ordnung in der Exzentrizität zu unterscheiden – jene Eigenschaft, die den zweiten Brennpunkt der Bahnellipse für kleine Exzentrizitäten angenähert zum „punctum aequans" der antiken Planetentheorie macht. Außerdem ist in (VII; 67) die Konvergenz der Potenzreihen in e, durch die die FOURIERkoeffizienten von der 2. Ordnung an dargestellt werden, erheblich besser als die der entsprechenden Ausdrücke in (VII; 66).

Noch bessere Konvergenz erzielt man, wenn man die Mittelpunktsgleichung nach der „Geschwindigkeitsanomalie" ψ entwickelt. Zur Vorbereitung dieser Aufgabe entwickeln wir zunächst

$$E - M = e \sin E$$

nach ψ. Aus (VII; 59) folgt

$$A^2 = 1 - e^2 \cos^2 E = 1 - e^2 + e^2 A^2 \sin^2 \psi,$$

also $A^2(1 - e^2 \sin^2 \psi) = 1 - e^2$ und somit

$$E - M = eA \sin \psi = \sqrt{1 - e^2} \frac{e \sin \psi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi}} =$$

$$= \sqrt{1 - e^2} \left[e \sin \psi + \frac{1}{2} (e \sin \psi)^3 + \frac{3}{8} (e \sin \psi)^5 + \frac{5}{16} (e \sin \psi)^7 + \cdots \right].$$

Ersetzt man hierin die Potenzen von $\sin \psi$ nach (VII; 61) durch die Sinus der Vielfachen von ψ, und setzt man für $\sqrt{1 - e^2}$ die Potenzreihe

$$\sqrt{1 - e^2} = 1 - \left(\frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + \frac{1}{16} e^6 + \cdots \right)$$

ein, so erhält man schließlich

$$\text{(VII; 68)} \qquad \begin{aligned} E - M = {} & \sin \psi \left[e - \frac{1}{8} e^3 - \frac{5}{64} e^5 - \frac{57}{1024} e^7 - \cdots \right] - \\ & - \sin 3\psi \left[\frac{1}{8} e^3 + \frac{7}{128} e^5 + \frac{29}{1024} e^7 + \cdots \right] + \\ & + \sin 5\psi \left[\frac{3}{128} e^5 + \frac{23}{1024} e^7 + \cdots \right] - \\ & - \sin 7\psi \left[\frac{5}{1024} e^7 + \cdots \right] + \cdots . \end{aligned}$$

Die Mittelpunktsgleichung läßt sich dann in der Form

$$v - M = (\psi - E) + (v - \psi) + (E - M)$$

schreiben, wobei man für die drei Differenzen der rechten Seite die in (VII; 58, 62, 68) gefundenen Reihen einsetzt und noch

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}\right)^2 = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + \frac{5}{64} e^6 + \cdots$$

berücksichtigt. Ebenso erhält man, wegen $w - \psi = -(v - \psi)$,

$$w - M = (\psi - E) - (v - \psi) + (E - M).$$

Nach Ausführung der einfachen Rechnung ergeben sich die Reihen

$$\text{(VII; 69)} \quad \begin{aligned} v - M = {} & \sin \psi \left[2e - \frac{1}{32} e^5 - \frac{1}{32} e^7 - \cdots\right] + \\ & + \sin 2\psi \left[\frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + \frac{5}{64} e^6 + \cdots\right] - \\ & - \sin 3\psi \left[\frac{1}{6} e^3 + \frac{5}{64} e^5 + \frac{11}{256} e^7 + \cdots\right] - \\ & - \sin 4\psi \left[\frac{1}{32} e^4 + \frac{1}{32} e^6 + \cdots\right] + \\ & + \sin 5\psi \left[\frac{9}{320} e^5 + \frac{7}{256} e^7 + \cdots\right] + \\ & + \sin 6\psi \left[\frac{1}{192} e^6 + \cdots\right] - \\ & - \sin 7\psi \left[\frac{5}{896} e^7 + \cdots\right] - \cdots \end{aligned}$$

und

$$\text{(VII; 70)} \quad \begin{aligned} w - M = {} & -\sin \psi \left[\frac{1}{4} e^3 + \frac{1}{8} e^5 + \frac{41}{512} e^7 + \cdots\right] + \\ & + \sin 2\psi \left[\frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + \frac{5}{64} e^6 + \cdots\right] - \\ & - \sin 3\psi \left[\frac{1}{12} e^3 + \frac{1}{32} e^5 + \frac{7}{512} e^7 + \cdots\right] - \\ & - \sin 4\psi \left[\frac{1}{32} e^4 + \frac{1}{32} e^6 + \cdots\right] + \\ & + \sin 5\psi \left[\frac{3}{160} e^5 + \frac{9}{512} e^7 + \cdots\right] + \end{aligned}$$

$$+ \sin 6\psi \left[\frac{1}{192} e^6 + \cdots\right] -$$

$$- \sin 7\psi \left[\frac{15}{3584} e^7 + \cdots\right] - \cdots,$$

die man noch, indem man zwischen (VII; 66) und (VII; 67) das arithmetische Mittel bildet, durch die mäßig konvergente Entwicklung von ψ nach Vielfachen von M,

$$\text{(VII; 71)} \qquad \psi - M = \sin M \left[e - \frac{3}{8} e^3 - \frac{5}{64} e^5 - \frac{571}{9216} e^7 - \cdots\right] +$$

$$+ \sin 2M \left[\frac{3}{4} e^2 - \frac{7}{24} e^4 + \frac{47}{384} e^6 - \cdots\right] +$$

$$+ \sin 3M \left[\frac{5}{8} e^3 - \frac{55}{128} e^5 + \frac{557}{5120} e^7 - \cdots\right] +$$

$$+ \sin 4M \left[\frac{59}{96} e^4 - \frac{91}{160} e^6 + \cdots\right] +$$

$$+ \sin 5M \left[\frac{83}{128} e^5 - \frac{7043}{9216} e^7 + \cdots\right] +$$

$$+ \sin 6M \left[\frac{689}{960} e^6 - \cdots\right] +$$

$$+ \sin 7M \left[\frac{37813}{46080} e^7 - \cdots\right] + \cdots$$

ergänzen kann.

61. *Konvergenz der Reihen in der elliptischen Bewegung*

Die Frage nach der Konvergenz der Reihenentwicklungen ist für den praktischen Rechner meist von untergeordneter Bedeutung, da er Entwicklungen nach Potenzen oder anderen Funktionen der unabhängigen Variablen nur dort verwenden wird, wo er sicher sein darf, daß wenige Glieder der Reihe ausreichen, um die betreffende Größe mit der gewünschten Genauigkeit darzustellen. Den Theoretiker wird dagegen auch die Begrenzung des Konvergenzbereiches interessieren, also etwa die Frage, für wie große Zwischenzeiten $\tau = k(t - t_0)$ die nach Potenzen von τ fortschreitenden Reihen noch konvergieren und die betreffende Funktion darstellen.

Die trigonometrischen Entwicklungen nach den Sinus bzw. Cosinus der Vielfachen der mittleren und anderer Anomalien, von denen wir in den Abschn. 58 bis 60 die wichtigsten kennengelernt haben, sind für alle $e < 1$ sicher konvergent, also für alle Fälle elliptischer Bahnbewegung, denn die periodischen Funk-

tionen, die hier in FOURIERreihen entwickelt werden, gehören alle dem Typus von beschränkten, überall stetigen und beliebig oft differenzierbaren, in ihrem ganzen Verlauf „glatten“ Funktionen an, deren Entwickelbarkeit in FOURIERreihen außer Frage steht. Gewisse Schwierigkeiten treten aber mitunter auf, wenn sich e der Einheit nähert. So verliert z.B. die Reihe (VII; 58)

$$\psi - E = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \sin 2E + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2} \sin 4E + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^6 \frac{\varphi}{2} \sin 6E + \cdots$$

für $e = 1$ ihren Sinn. Dann wird nämlich die exzentrische Anomalie null, und die Gleichung würde für $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 1$ den Wert $\psi = 0$ liefern, während aus der Geometrie der Parabel $\psi = \frac{v}{2}$ folgt. Der Fehlschluß ist darauf zurückzuführen, daß die Reihe

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \cdots$$

im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & \text{für} \quad 0 < x < 2\pi, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = 2\pi \end{cases}$$

periodisch darstellt, also eine sägezahnartige Kurve ergibt, die für $x = 0$, $x = 2n\pi$ unstetig ist. Im Parabelfall wird also die stetige Funktion ψ durch die obige Reihe nicht mehr dargestellt, und für parabelnahe Ellipsen wird die Reihe in der Umgebung des Perihels schlecht konvergieren, da E dort sehr klein ist und die rechte Seite nur durch sehr viele kleine Summanden angenähert werden könnte.

Die FOURIERreihen, die nach den Vielfachen von E, v, w oder ψ fortschreiten, sind für alle $e < 1$ sogar *unbedingt* konvergent, d.h., die Konvergenz der Reihe und ihre Summe ändern sich nicht, wenn die Reihenfolge der Glieder beliebig geändert wird. Man kann z.B. die Glieder gleicher Ordnung in e zusammenfassen und die Reihe als Potenzreihe nach der Exzentrizität auffassen. Das ist häufig notwendig, z.B. in der Störungstheorie, wo Entwicklungen nach Potenzen von e gebraucht werden.

Für endliche Reihen, wie etwa (VII; 36, 41), versteht sich das von selbst. Gebrochene rationale Funktionen von $\cos E$, $\sin E$ usw., wie

$$\text{(VII; 72)} \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} = (\cos E - e)\,(1 + e \cos E + e^2 \cos^2 E + \cdots),$$

lassen sich durch Anwendung der binomischen Reihe direkt nach Potenzen von e entwickeln: Die Reihe (VII; 72) konvergiert bekanntlich für $|e \cos E| < 1$, also erst recht für $e < 1$. Ebenso sind alle Reihen, die wir aus Gleichungen von der Form

$$\operatorname{tg} y = a \operatorname{tg} x$$

erhalten haben, auch als Potenzreihen nach e für alle elliptischen Bahnfälle konvergent. Diese Reihen waren ja sämtlich von der Form

$$y - x = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots,$$

und es war immer $a_n = \alpha_n e^n$, wo α_n beschränkt, d.h. $|\alpha_n|$ für alle n kleiner als eine endliche Schranke war. Reihen dieser Art konvergieren aber mindestens so gut wie die geometrische Reihe, deren Konvergenzradius gleich der Einheit ist. Sie konvergieren also sicher für $e < 1$ und für diese Werte sogar absolut und unbedingt, so daß beliebige Umordnungen, z.B. nach Potenzen von e, vorgenommen werden dürfen.

Größere Schwierigkeiten bereitet die Konvergenzfrage bei den Entwicklungen nach der Zeit $\tau = k(t - t_0)$ bzw. nach der ihr proportionalen mittleren Anomalie M. Wir müssen hier zwei Fragestellungen unterscheiden: die nach der Konvergenz der trigonometrischen Reihen nach den Vielfachen von M und die nach der Konvergenz der nach Potenzen von M bzw. τ fortschreitenden Reihen.

Es läßt sich zeigen, daß die FOURIERreihen nach den Vielfachen von M, die natürlich für alle in der elliptischen Bahnbewegung vorkommenden periodischen Funktionen konvergieren, nicht immer *unbedingt* konvergent sind, d.h., daß es nicht immer erlaubt ist, sie beliebig umzuordnen, also etwa als Potenzreihen nach e zu schreiben. Sammelt man in den Reihen (VII; 42 bzw. 64) und (VII; 44) die Glieder mit gleicher Potenz der Exzentrizität, so erhält man zunächst formal

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2M) + \frac{3}{8} e^3 (\cos M - \cos 3M) + \cdots,$$

$$E - M = e \sin M + \frac{e^2}{4} \sin 2M + \frac{e^3}{8} (3 \sin 3M - \sin M) + \cdots$$

oder allgemein, wenn man das Koeffizientengesetz der Potenzreihenentwicklung (VII; 23) der BESSELschen Funktionen berücksichtigt,

$$\begin{aligned}\frac{r}{a} &= 1 + \frac{e^2}{2} - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ n^{n-2} \cos nM - \binom{n}{1} (n-2)^{n-2} \cos (n-2) M + \right. \\ &\qquad \left. + \binom{n}{2} (n-4)^{n-2} \cos (n-4) M - \cdots \right\}, \\ E - M &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ n^{n-1} \sin nM - \binom{n}{1} (n-2)^{n-1} \sin (n-2) M + \right. \\ &\qquad \left. + \binom{n}{2} (n-4)^{n-1} \sin (n-4) M - \cdots \right\},\end{aligned} \tag{VII; 73}$$

wobei die Summen in den geschweiften Klammern bis zu denjenigen Gliedern fortzusetzen sind, die die trigonometrischen Funktionen von M (bei ungeradem n) bzw. $2M$ (bei geradem n) enthalten. Die Reihen (VII; 73) lassen sich noch bequemer in der Form

$$\text{(VII; 74)} \qquad \begin{aligned} 1 - \frac{r}{a} &= e \cos E = e \cos M - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{(n-1)!} \frac{d^{n-2} \sin^n M}{dM^{n-2}}, \\ E - M &= e \sin E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1} \sin^n M}{dM^{n-1}} \end{aligned}$$

schreiben, wie man leicht beweist, wenn man die trigonometrischen Gleichungen ($n = 2m$ gerade bzw. $n = 2m + 1$ ungerade)

$$2^{2m-1} \sin^{2m} x = \frac{1}{2}\binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-1} \cos 2x + \binom{2m}{m-2} \cos 4x - \cdots + \\ + (-1)^m \cos 2mx,$$

$$2^{2m} \sin^{2m+1} x = \binom{2m+1}{m} \sin x - \binom{2m+1}{m-1} \sin 3x + \\ + \binom{2m+1}{m-2} \sin 5x - \cdots + (-1)^m \sin (2m+1) x$$

$(n-2)$mal bzw. $(n-1)$mal nach M differenziert und die Ergebnisse mit den Koeffizienten von e^n der Reihen (VII; 73) vergleicht. Übrigens folgen, wie hier nur am Rande vermerkt werden soll, die merkwürdigen Formeln (VII; 74) aus einem sehr viel allgemeineren Satz, der zuerst von LAGRANGE bewiesen worden ist und folgendes besagt: Ist $f(y)$ eine in einem gewissen Gebiet reguläre Funktion, z ein Parameter, und gilt die Funktionalgleichung

$$\text{(VII; 75)} \qquad y(z) = y_0 + z f(y),$$

so lassen sich im gleichen Gebiet reguläre Funktionen $g(y)$ in Potenzreihen nach z von der Form

$$\text{(VII; 76)} \qquad g(y) = g(y_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dy_0^{n-1}} \left[\left(\frac{dg}{dy}\right)_{y=y_0} \cdot f^n(y_0)\right]$$

entwickeln. Die KEPLERsche Gleichung ist von der Form (VII; 75), und zwar ist $z = e$, $y(z) = E$, $f(y) = \sin E$ und $y_0 = y(0) = M$. Setzt man nun in (VII; 76) $g(E) = e \cos E$ bzw. $g(E) = E$, so erhält man in der Tat die Potenzreihen (VII; 74).

Um nun den Konvergenzbereich der Reihen (VII; 74) und anderer aus der KEPLERschen Gleichung abgeleiteter Potenzreihenentwicklungen nach e zu bestimmen, genügt es, die Entwicklung von $E(e)$ selbst zu untersuchen, wobei M als konstanter Parameter von beliebiger Größe angesehen werden möge.

Denn alle übrigen Ausdrücke, um die es sich hier handeln könnte, werden entweder (wie $e \cos E$) durch Differentiation der KEPLERschen Gleichung oder als analytische Funktionen von $\sin E$ bzw. $\cos E$ erhalten, so daß die Konvergenz ihrer Entwicklung nach Potenzen von e überall dort gesichert ist, wo die Entwicklung $E = E(e)$ selbst konvergiert.

Um den Konvergenzradius von $E(e)$ zu ermitteln, ist es erforderlich, die singulären Stellen in der komplexen e-Ebene zu bestimmen, die diese Funktion für beliebige Werte des Parameters M aufweist. Der Konvergenzradius von $E(e; M)$ ist dann der Abstand der nächstgelegenen Singularität vom Nullpunkt. Sind die Abstände (Beträge) der Singularitäten für verschiedene M verschieden groß, so wird der kleinste dieser Beträge den Radius desjenigen Kreises angeben, in dem die Reihe für *alle M* konvergiert. Oder, anders ausgedrückt: Ist e_0 der Betrag der dem Nullpunkt nächstgelegenen Singularität, so konvergieren die Reihen für alle $e < e_0$, während sie für $e \geqq e_0$ höchstens für gewisse Bereiche der mittleren Anomalie konvergieren.

Aus der KEPLERschen Gleichung

$$E - M = e \sin E$$

folgt durch Differenzieren nach e, wenn M konstant ist,

$$\frac{dE}{de} = \sin E + e \cos E \frac{dE}{de}$$

oder

$$\frac{dE}{de} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E}.$$

Da nun die Funktion $E(e)$ überall regulär ist, wo ihr Differentialquotient existiert, so folgt, daß die singulären Stellen durch diejenigen Lösungen der KEPLERschen Gleichung gegeben sind, für die der Nenner dieses Ausdruckes verschwindet. Das Gleichungssystem

$$\text{(VII; 77)} \qquad \begin{aligned} E - e \sin E &= M, \\ 1 - e \cos E &= 0 \end{aligned}$$

wird also durch diejenigen komplexen e befriedigt, für die $E(e; M)$ singulär ist. Man kann statt dessen auch

$$\text{(VII; 78)} \qquad \begin{aligned} E - \operatorname{tg} E &= M, \\ \sec E &= e \end{aligned}$$

schreiben.

Es sei nun $E = \alpha + i\beta$ eine komplexe Funktion in der e-Ebene, die diese Gleichungen für irgendein reelles M befriedigt. Die Argumente $e(M)$, die diesen Lösungen entsprechen, liegen, wenn man M alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läßt, auf irgendeiner Kurve, die den Nullpunkt nicht enthält, da ja $e = 0$ der zweiten Gleichung (VII; 78) widerspricht, solange E endlich ist.

Die Aufgabe besteht also darin, dasjenige M zu suchen, für das der Betrag des zugehörigen $e(M)$ ein Minimum besitzt.

Nun ist aber nach (VII; 78)

$$e = \sec E = \frac{1}{\cos(\alpha + i\beta)},$$

und es folgt durch Differenzieren der beiden Gleichungen (VII; 78)

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - \sec^2 E}; \quad \frac{de}{dM} = \frac{\sin E}{\cos^2 E} \cdot \frac{dE}{dM} = -\frac{1}{\sin E} = -\frac{1}{\sin(\alpha + i\beta)}.$$

Die Gleichungen (VII; 77) bzw. (VII; 78) sind ebenfalls erfüllt, wenn man E und e durch ihre konjugiert komplexen Werte $\bar{E}$ und $\bar{e}$ ersetzt. Setzt man nämlich

$$\sin E = \sin(\alpha + i\beta) = \sin\alpha \operatorname{Cos}\beta + i\cos\alpha \operatorname{Sin}\beta = a + ib,$$

$$\cos E = \cos(\alpha + i\beta) = \cos\alpha \operatorname{Cos}\beta - i\sin\alpha \operatorname{Sin}\beta = c + id$$

und ferner $e = f + ig$, so erhält man aus (VII; 77)

$$\alpha + i\beta - (f + ig)(a + ib) = A + iB = M,$$

$$(f + ig)(c + id) = C + iD = 1.$$

Geht man nun auf die konjugiert komplexen Werte über, d.h., wechselt man das Vorzeichen von β, g, b, d, so bleiben die Größen A und C unverändert, während B und D das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen. Da aber M und 1 reell, also B und D null sind, so ändert sich gar nichts, und die Gleichungen bleiben erfüllt. Man darf also schreiben

$$\bar{e} = \frac{1}{\cos(\alpha - i\beta)}, \quad \frac{d\bar{e}}{dM} = -\frac{1}{\sin(\alpha - i\beta)}.$$

Es ist nun $|e^2| = e \cdot \bar{e}$, also

$$\frac{d|e^2|}{dM} = e\frac{d\bar{e}}{dM} + \bar{e}\frac{de}{dM} =$$

$$= -\left\{\frac{1}{\cos(\alpha + i\beta)\sin(\alpha - i\beta)} + \frac{1}{\sin(\alpha + i\beta)\cos(\alpha - i\beta)}\right\} =$$

$$= -2\left\{\frac{1}{\sin 2\alpha - i\operatorname{Sin} 2\beta} + \frac{1}{\sin 2\alpha + i\operatorname{Sin} 2\beta}\right\} =$$

$$= -\frac{4\sin 2\alpha}{\sin^2 2\alpha + \operatorname{Sin}^2 2\beta} = -\lambda^2 \sin 2\alpha,$$

wo $\lambda^2 > 0$ und (wenn wir den Fall $\alpha = \beta = 0$ ausschließen, der ja der Parabellösung $e = 1$ entsprechen würde) endlich ist. Dieser Ausdruck verschwindet

also nur für $\alpha = k\frac{\pi}{2}$, wo k irgendeine ganze Zahl bedeutet. Die *Minima* der Funktion $|e^2|$ entsprechen den *ungeraden* k, da an diesen Stellen $\frac{d|e^2|}{dM}$ von negativen zu positiven Werten übergeht, die zweite Ableitung also positiv ist. Setzt man $\alpha = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ in die erste Gleichung (VII; 78) ein, so erhält man

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} + i\beta - \operatorname{tg}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} + i\beta\right] = M$$

oder, wenn man den reellen und den imaginären Teil dieser Gleichung gesondert schreibt,

$$M = (2n+1)\frac{\pi}{2}\,; \quad \beta = \mathfrak{Ctg}\,\beta.$$

Das Minimum $|e_0|$ von $|e|$ tritt demnach ein für

$$e_0 = \sec(\alpha_0 + i\beta_0)\,; \quad \bar{e}_0 = \sec(\alpha_0 - i\beta_0),$$

wenn $\alpha_0 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ gesetzt wird und β_0 die Lösung der Gleichung

$$\beta = \mathfrak{Ctg}\,\beta \tag{VII; 79}$$

bedeutet. Man findet daher

$$|e_0^2| = e_0 \cdot \bar{e}_0 = \frac{2}{\cos 2\alpha_0 + \mathfrak{Cos}\,2\beta_0} = \frac{1}{\cos^2\alpha_0 + \mathfrak{Sin}^2\,\beta_0}$$

oder, da

$$\cos\alpha_0 = \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$|e_0| = \frac{1}{|\mathfrak{Sin}\,\beta_0|}.$$

Setzt man hierin die Lösung $\beta_0 = 1.199678..$ von (VII; 79) ein, so ergibt sich

$$e_0 = 0.662744 \tag{VII; 80}$$

als obere Grenze derjenigen Exzentrizitäten, bei denen die Reihen (VII; 73) und andere, wie z.B. die als Potenzreihe nach e geschriebene Mittelpunktsgleichung (VII; 66)

$$v - M = 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + \frac{1}{12}e^3(13\sin 3M - 3\sin M) +$$

$$+ \frac{1}{96}e^4(103\sin 4M - 44\sin 2M) + \cdots,$$

für alle M konvergieren, und zwar tritt für $e = e_0$ die Singularität ein, wenn M ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist. Der Grenzwert (VII; 80) wurde denn auch zuerst von LAPLACE gefunden, als er zeigte, daß für $M = \frac{\pi}{2}$ die Glieder der Potenzreihen (VII; 74) für $e \geqq e_0$ über alle Grenzen wachsen.

Um den Verlauf der Kurve in der komplexen e-Ebene zu bestimmen, auf der alle zu beliebigen M gehörenden Singularitäten liegen, sind weitere Überlegungen nötig. Um einer Verwechslung mit der Basis der natürlichen Logarithmen vorzubeugen, bezeichnen wir vorübergehend die Exzentrizität der Bahnellipse mit ε. Aus (VII; 77) entnimmt man dann, daß für die singulären Stellen $E(\varepsilon; M)$

$$\cos E = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \sin E = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1}, \quad iE = iM \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

und

$$e^{iE} = e^{iM \pm \sqrt{1-\varepsilon^2}} = \cos E + i \sin E = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2}\right)$$

ist. Multipliziert man dies mit ε, was immer gestattet ist, da ja $\varepsilon = 0$, wie schon weiter oben erwähnt, der Kurve der Singularitäten nicht angehört, so erhält man

$$1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \varepsilon e^{iM \pm \sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

oder, wenn man $\varepsilon = \sin\varphi$ setzt, je nach Wahl des Vorzeichens,

$$2\cos^2\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi\, e^{iM + \cos\varphi}; \quad 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi\, e^{iM - \cos\varphi}$$

bzw.

$$1 = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\, e^{iM + \cos\varphi}; \quad 1 = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\, e^{iM - \cos\varphi}.$$

Es ist also

$$\eta = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\, e^{\cos\varphi} = e^{\pm iM} = \cos M \pm i \sin M \tag{VII; 81}$$

die Gleichung, aus der für gegebenes M diejenigen $\varphi = \arcsin\varepsilon$ zu bestimmen sind, für die $E(\varepsilon)$ singulär wird. Alle η, die diesen ε entsprechen, liegen also auf dem Einheitskreis. Potenzreihen nach η sind also, wie zuerst von T. LEVI-CIVITÀ (1904) bemerkt worden ist, für alle $|\eta| < 1$ konvergent, insbesondere also auch für alle reellen $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

Zur Diskussion der Singularitätskurve $\varepsilon(M)$ kann man folgenden Weg einschlagen. Es ist, wenn man sich auf positive M beschränkt,

$$\eta^2 = \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}\, e^{2\cos\varphi} = e^{2iM} \tag{VII; 82}$$

eine Funktion von $\cos\varphi$. Setzt man

$$\cos\varphi = u + iv,$$

so kann man (VII; 82) in der Form

$$(1 - u - iv)\, e^{2u} (\cos 2v + i \sin 2v) = (1 + u + iv)\, (\cos 2M + i \sin 2M)$$

schreiben, da man mit $1 + \cos\varphi$, das für $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ nirgends verschwindet, heraufmultiplizieren darf. Schreibt man den reellen und den imaginären Teil dieser Gleichung gesondert, so erhält man

$$\begin{array}{l|l|l} & \text{(I)} & \text{(II)} \\ e^{2u}[(1 - u)\cos 2v + v \sin 2v] = (1 + u)\cos 2M - v \sin 2M & \cos 2v & \sin 2v \\ e^{2u}[(1 - u)\sin 2v - v \cos 2v] = (1 + u)\sin 2M + v \cos 2M & \sin 2v & -\cos 2v \end{array}$$

zur Bestimmung von u und v. Multipliziert man diese Gleichungen mit den unter (I) und (II) angegebenen Faktoren und addiert, so entstehen die Gleichungen

$$e^{2u}(1 - u) = (1 + u)\cos 2(v - M) + v \sin 2(v - M),$$

$$e^{2u}\, v \qquad = (1 + u)\sin 2(v - M) - v \cos 2(v - M),$$

aus denen man durch Elimination von e^{2u}

$$\text{(VII; 83)} \qquad \operatorname{tg} 2(v - M) = \frac{2v}{1 - (u^2 + v^2)}$$

und durch Quadrieren und Addieren

$$\text{(VII; 84)} \qquad e^{4u} = \frac{(1 + u)^2 + v^2}{(1 - u)^2 + v^2}$$

erhält. Die Gleichungen (VII; 83, 84) lassen sich auch in der Form

$$\text{(VII; 85)} \qquad u^2 = 1 - v^2 - 2v \operatorname{ctg} 2(v - M),$$

$$\text{(VII; 86)} \qquad v^2 = -(1 + u^2) + 2u\, \mathfrak{Ctg}\, 2u$$

schreiben, wenn man berücksichtigt, daß $\frac{e^{4u} + 1}{e^{4u} - 1} = \mathfrak{Ctg}\, 2u$ ist. (VII; 84) ist immer erfüllt, wenn $u = 0$ ist. Das zugehörige v bestimmt sich dann nach (VII; 85) aus

$$\operatorname{tg} 2(v - M) = \frac{2 \operatorname{tg}(v - M)}{1 - \operatorname{tg}^2(v - M)} = \frac{2v}{1 - v^2},$$

einer Gleichung, die auf

$$\operatorname{tg}(v - M) = v \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}(v - M) = -\frac{1}{v}$$

führt, so daß jedem beliebigen v unendlich viele M zugeordnet sind. Jedem Punkt der v-Achse $u = 0$ entspricht also sicher für irgendein M eine Singu-

larität. Schließen wir $u = 0$ aus, so liefern die Gleichungen (VII; 85, 86) die übrigen Singularitäten, und zwar genügt es, (VII; 86) zu betrachten, die den Parameter M nicht enthält. Denn für jedes Wertepaar (u, v), das diese Gleichung befriedigt, liefert (VII; 85) bestimmte Wertefolgen M. Die Kurve (VII; 86) ist daher neben der Geraden $u = 0$ der geometrische Ort aller Singularitäten unseres Problems in der $\cos\varphi$-Ebene.

Die Kurve (VII; 86) ist zu den Achsen $u = 0$ und $v = 0$ symmetrisch, da sich die Gleichung nicht ändert, wenn man die Vorzeichen von u oder v wechselt. Die Funktion $v^2(u)$ hat zwei Nullstellen, nämlich die Wurzeln der Gleichung

$$\mathfrak{Tg}\, 2u = \frac{2\,\mathfrak{Tg}\, u}{1 + \mathfrak{Tg}^2 u} = \frac{2u}{1 + u^2}\,.$$

Diese quadratische Gleichung für $\mathfrak{Tg}\, u$ führt auf die Lösungen

$$\mathfrak{Tg}\, u = u \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{Ctg}\, u = u,$$

die nur für $u = 0$ bzw. $u = 1.199678\ldots$ [siehe (VII; 79)] erfüllt sind. Zwischen diesen beiden Nullstellen ist v reell, da $v^2 > 0$ für kleine u ist. Die Kurve besitzt daher die in Abb. 47 dargestellte lemniskatenähnliche Gestalt.

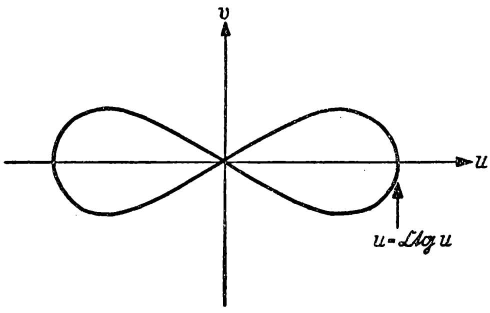


Abb. 47. Elliptische Bewegung: Singularitätskurve in der $\cos\varphi$-Ebene.

Sind die Punkte (u, v) bekannt, so lassen sich die zugehörigen Exzentrizitäten $\varepsilon = \varrho e^{i\psi}$ leicht ermitteln. Denn aus

$$\cos\varphi = u + iv = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

folgt ja

$$\text{(VII; 87)} \qquad \varepsilon^2 = \varrho^2 (\cos 2\psi + i \sin 2\psi) = 1 - u^2 + v^2 - 2iuv,$$

also

$$\text{(VII; 88)} \qquad \begin{aligned} \varrho^2 \cos 2\psi &= 1 - u^2 + v^2, \\ \varrho^2 \sin 2\psi &= -2uv. \end{aligned}$$

Die Gerade $u = 0$ geht also in $\psi = 0$, $\varrho = \pm\sqrt{1 + v^2}$ über, d.h. in die reelle Achse der ε-Ebene, mit Ausnahme derjenigen Strecke, die im Innern des Einheitskreises liegt. Die leminiskatenähnliche Figur hingegen wird in der ε-Ebene zu einer im Innern des Einheitskreises verlaufenden Kurve. Diese besteht aus zwei zu den Hauptachsen symmetrischen Bögen, die die Punkte $+1$ und -1 verbinden und die imaginäre Achse in den Punkten $\pm i \cdot 0.6627\ldots$ schneiden. Setzen wir nämlich für u, v die Koordinaten der äußersten Punkte der Kurve (VII; 86) ein, also $v = 0$, $u = \mathfrak{Ctg}\, u$, so ergibt sich

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \mathfrak{Ctg}\, u; \quad \varepsilon^2 = 1 - \mathfrak{Ctg}^2 u = -\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 u}; \quad \varepsilon = \pm\frac{i}{|\mathfrak{Sin}\, u|},$$

also für den Betrag der Exzentrizität genau der LAPLACEsche Wert (VII; 80),

An den Verzweigungspunkten $\varepsilon = \pm 1$, die in der $\cos\varphi$-Ebene dem Nullpunkt $u = v = 0$ entsprechen, stoßen die drei Äste der singulären Kurve zusammen. Um zu untersuchen, unter welchen Winkeln dies geschieht, bestimmen wir zunächst die Richtungswinkel der Tangenten an die Kurve (VII; 86) im Nullpunkt. Durch Differenzieren von (VII; 86) erhält man

$$2v\,dv = -2u\,du + \left[2\,\mathfrak{Ctg}\,2u - \frac{4u}{\mathfrak{Sin}^2\,2u}\right]du$$

oder

$$\frac{v}{u}\frac{dv}{du} = \frac{\mathfrak{Sin}\,4u - 4u}{2u\,\mathfrak{Sin}^2\,2u} - 1.$$

Für sehr kleine u geht die rechte Seite bei Vernachlässigung höherer Potenzen in $\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ über; in der Umgebung des Nullpunkts ist daher genähert

$$\frac{dv^2}{du^2} = \frac{1}{3}.$$

Die Kurve (VII; 86) verhält sich dort also wie das Geradenpaar

$$v^2 = \frac{1}{3}u^2 \quad \text{oder} \quad v = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}u,$$

d.h., es ist im Nullpunkt

$$\frac{v}{u} = \frac{dv}{du} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{VII; 89}$$

Setzen wir nun $\varepsilon = \alpha + i\beta$, so ist nach (VII; 87)

$$\varepsilon^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\,\alpha\beta = 1 - u^2 + v^2 - 2i\,uv,$$

d.h., es gilt

$$\alpha^2 - \beta^2 = 1 - u^2 + v^2,$$

$$\alpha\beta = -uv.$$

Differenziert man dies, so erhält man

$$\alpha\,d\alpha - \beta\,d\beta = \quad v\,dv - u\,du,$$

$$\beta\,d\alpha + \alpha\,d\beta = -u\,dv - v\,du$$

und hieraus, nachdem man diese Gleichungen nach $d\alpha$, $d\beta$ aufgelöst hat,

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\frac{dv}{du}\left(\alpha + \beta\frac{v}{u}\right) + \left(\alpha\frac{v}{u} - \beta\right)}{\frac{dv}{du}\left(\alpha\frac{v}{u} - \beta\right) - \left(\alpha + \beta\frac{v}{u}\right)}. \tag{VII; 90}$$

In der Umgebung von $\varepsilon = 1$ ($\alpha = 1$, $\beta = 0$) bzw. $\cos\varphi = 0$ ($u = v = 0$) ist

demnach, wenn wir diese Werte und (VII; 89) einsetzen,

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \pm\sqrt{3},$$

d.h., die drei Zweige der singulären Kurve in der ε-Ebene treffen in $\varepsilon = \pm 1$ unter Winkeln von je 120° zusammen.

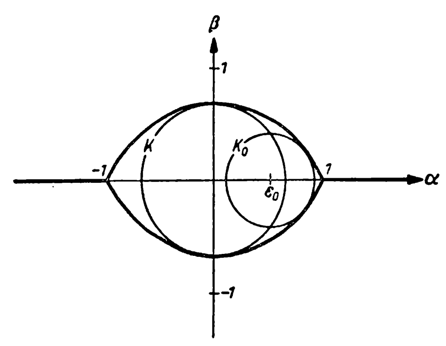


Abb. 48. Elliptische Bewegung. Singularitätskurve in der $\varepsilon = (\alpha + i\beta)$-Ebene.

K = Konvergenzkreis der Potenzreihen nach ε

K_0 = Konvergenzkreis der Potenzreihen nach $\varepsilon - \varepsilon_0$

Abb. 48 läßt erkennen, daß der Konvergenzkreis der Entwicklungen nach Potenzen der Exzentrizität die beiden Zweige der singulären Kurve in den beiden Punkten $\pm i \cdot 0.6627..$ der imaginären Achse berührt. Innerhalb dieses Kreises sind also diese Potenzreihen, unabhängig von M, konvergent. Entwickelt man die zu entwickelnden Größen nach Potenzen von $\varepsilon - \varepsilon_0$, wo $\varepsilon_0 < 1$ irgendeine von null verschiedene reelle Exzentrizität sein möge, so ist der Konvergenzkreis kleiner, umfaßt aber noch Werte, die größer sind als die Schranke (VII; 80).

62. *Konvergenz der Reihen in der hyperbolischen Bewegung*

Die Entwicklung der geometrischen Bahngrößen in FOURIERreihen ist an sich nur sinnvoll, wenn es sich um elliptische Bahnen, also um Funktionen handelt, die nach Ablauf einer endlichen Zeit (Umlaufszeit) periodisch in sich zurückkehren. Wendet man die Theorie der FOURIERreihen an, so lassen sich manche dieser Entwicklungen sehr leicht durchführen. So führt der Ansatz

$$\frac{a}{r} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cos \nu M; \quad r = a(1 - e\cos E)$$

auf die FOURIERkoeffizienten

$$c_0 = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dM}{r}; \quad c_\nu = \frac{a}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\nu M}{r}\,dM, \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

und berücksichtigt man die Beziehung

$$dM = (1 - e\cos E)\,dE = \frac{r}{a}\,dE; \quad M = E - e\sin E,$$

so findet man sofort

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dE = 1; \quad c_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\,[\nu(E - e\sin E)]\,dE = 2J_\nu(\nu e),$$

wenn man die durch (VII; 31) definierten BESSELschen Funktionen einführt.

H. BUCERIUS[1]) hat gezeigt, wie man dieses einfache Verfahren durch Anwendung des *FOURIERschen Integraltheorems* auch auf den hyperbolischen Fall übertragen kann. Wenn wir wie in Abschn. 22 den Betrag der (bei Hyperbeln negativen) großen Halbachse mit $\alpha = -a$ bezeichnen, so wird $\sqrt{a^3} = -\alpha\sqrt{-\alpha} = -i\sqrt{\alpha^3}$, die mittlere Anomalie nimmt also den rein imaginären Wert

$$M = -\frac{\tau}{i\sqrt{\alpha^3}} = \frac{i\tau}{\sqrt{\alpha^3}}$$

an. Es ist demnach

$$N = -iM = \tau\alpha^{-\frac{3}{2}}$$

eine reelle Größe, die in der Hyperbelbewegung die Rolle der mittleren Anomalie vertritt und wie diese der Zeit proportional verläuft. Wenn wir (aus denselben Gründen wie im vorigen Abschnitt) die Exzentrizität wieder mit ε bezeichnen, so nimmt die KEPLERsche Gleichung die Form

$$iE - i\varepsilon\sin E = -N$$

an oder, wenn $iE = F$, $i\sin E = \mathfrak{Sin}\,F$ gesetzt wird,

$$\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,F - F = N. \tag{VII; 91}$$

Ebenso geht die Formel für r/a in

$$\frac{r}{\alpha} = \varepsilon\,\mathfrak{Cof}\,F - 1 \tag{VII; 92}$$

über. Die Funktion α/r läßt sich dann durch das FOURIERsche Integral

$$\frac{\alpha}{r} = \int_0^{\infty} c(\nu)\cos\nu N\,d\nu$$

darstellen, wobei die Koeffizientenfunktion $c(\nu)$ durch

$$c(\nu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha}{r}\cos\nu N\,d\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\,[\nu(\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,F - F)]\,dF =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu(\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,F - F)}\,dF = iH_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon),$$

[1]) Astron. Nachr. *275*, 193 (1949).

also durch die den BESSELschen Funktionen verwandten *HANKELschen Funktionen* mit rein imaginären Argumenten und Indices ausgedrückt wird.

Die sich an diese Bemerkung knüpfenden reizvollen mathematischen Überlegungen sollen hier nicht weiter ausgeführt werden, da sie für die Praxis wenig Bedeutung haben. Von größerem Interesse ist aber die Frage, wie es sich im Falle der Hyperbelbewegung mit der Konvergenz von Reihen verhält, die nach Potenzen der Exzentrizität fortschreiten. In der Tat lassen sich die im vorigen Abschnitt erzielten Ergebnisse leicht auf den Hyperbelfall übertragen, wie es zuerst von H. G. BLOCK[1]) versucht worden ist.

Sei N irgendein reeller Parameter, der alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann, und sei $F(\varepsilon)$ eine komplexe Funktion der komplexen Variablen ε, für die (VII; 91) gilt, so ist

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \frac{\operatorname{Sin} F}{1 - \varepsilon \operatorname{Cos} F}, \tag{VII; 93}$$

und $F(\varepsilon, N)$ wird singulär für diejenigen $\varepsilon(N)$, für die neben (VII; 91) die Beziehung

$$\varepsilon \operatorname{Cos} F = 1 \tag{VII; 94}$$

gilt. Um den Verlauf der singulären Kurve in Abhängigkeit von N zu bestimmen, setze man also nach (VII; 94, 91)

$$\operatorname{Cos} F = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \operatorname{Sin} F = \pm\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1}\,; \quad F = \pm\sqrt{1 - \varepsilon^2} - N$$

und

$$e^F = \operatorname{Cos} F + \operatorname{Sin} F = \frac{1}{\varepsilon} \pm \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} = e^{\pm\sqrt{1-\varepsilon^2} - N}.$$

Multipliziert man mit ε, so ergibt sich daher

$$\varepsilon e^F = 1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \varepsilon e^{\pm\sqrt{1-\varepsilon^2} - N}.$$

Sei nun $\varepsilon = \sin\varphi$, $\pm\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \cos\varphi$, so erhält man

$$2\cos^2\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi\, e^{\cos\varphi - N} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\, e^{\cos\varphi - N} = 1,$$

also

$$\eta = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\, e^{\cos\varphi} = e^N; \quad \eta^2 = \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}\, e^{2\cos\varphi} = e^{2N}.$$

Setzt man wieder, wie in Abschn. 61, $\cos\varphi = u + iv$, und schließt man den Fall $\cos\varphi = -1$ aus, der für endliche N nicht eintreten kann, so läßt sich diese Gleichung in der Form

$$(1 - u - iv)\, e^{2u} (\cos 2v + i \sin 2v) = (1 + u + iv)\, e^{2N}$$

---

[1]) Meddelande från Lunds Observatorium Nr. 23, 1904.

schreiben oder, wenn man den reellen und den imaginären Teil trennt,

$$e^{2(u-N)}\,[(1-u)\cos 2v + v\sin 2v] = 1 + u,$$

$$e^{2(u-N)}\,[(1-u)\sin 2v - v\cos 2v] = v.$$

Eliminiert man $e^{2(u-N)}$, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} 2v = \frac{2v}{1-(u^2+v^2)}, \tag{VII; 95}$$

und durch Quadrieren und Addieren erhält man

$$e^{4(u-N)}\,[(1-u)^2 + v^2] = (1+u)^2 + v^2. \tag{VII; 96}$$

Statt (VII; 95, 96) kann man auch schreiben

$$u^2 = 1 - v^2 - 2v\operatorname{ctg} 2v, \tag{VII; 97}$$

$$v^2 = -(1+u^2) + 2u\,\mathfrak{Ctg}\,2(u-N). \tag{VII; 98}$$

Die Gleichung (VII; 97), die den Parameter N nicht enthält, stellt den geometrischen Ort der singulären Punkte dar. In der Form (VII; 95) ist sie überdies für beliebige u erfüllt, wenn $v = 0$ ist. Jedem Wertepaar (u, v), das (VII; 97) befriedigt, ist durch (VII; 98),

$$\mathfrak{Tg}\,2(u-N) = \frac{2u}{1+u^2+v^2},$$

ein reelles N zugeordnet, da der Betrag der rechten Seite stets $\leqq 1$ ist. Die singulären Punkte des Problems erfüllen also die Kurven (VII; 97) und $v = 0$ überall dicht. Die Kurve (VII; 97) verläuft zu den Achsen der (u, v)-Ebene symmetrisch. Die Funktion $u(v)$ nimmt unendlich große Werte an, wenn v ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist; sie besteht also aus unendlich vielen voneinander getrennten Zweigen. Hier interessiert nur derjenige Zweig, der durch $u = v = 0$ hindurchgeht, also unmittelbar an $\cos\varphi = 0$, $\varepsilon = 1$ anschließt. Man erkennt leicht, daß dieser Zweig die Gestalt der Abb. 49 hat, d.h. im Nullpunkt einen Doppelpunkt besitzt und sich den Geraden $v = \pm\frac{\pi}{2}$ asymptotisch nähert.

Abb. 49. Hyperbolische Bewegung: Singularitätskurve in der $\cos\varphi$-Ebene.

Überträgt man wieder mit Hilfe der Gleichungen (VII; 87) diese Singularitätskurve auf die uns hier alleininteressierende rechte Halbebene der $\varepsilon = \varrho e^{i\psi}$, so findet man zunächst, daß die Achse $v = 0$ in $\psi = 0$, $\varrho = \sqrt{1-u^2}$ übergeht, d.h. in dasjenige Stück der positiven reellen Achse, das im Innern des Einheitskreises

der ε-Ebene liegt. Der Nullpunkt der (u, v)-Ebene, in dem sich die Kurve verzweigt, geht in den Endpunkt $\varepsilon = +1$ dieser Strecke über. Differenzierung von (VII; 97) ergibt

$$2u\,du = -2v\,dv + \left[\frac{4v}{\sin^2 2v} - 2\operatorname{ctg} 2v\right] dv$$

$$\text{oder} \quad \frac{u\,du}{v\,dv} = \frac{4v - \sin 4v}{2v \sin^2 2v} - 1.$$

Für sehr kleine v geht diese Gleichung (unter Vernachlässigung höherer Potenzen) in

$$u\,du = \frac{1}{3} v\,dv \quad \text{oder} \quad \frac{dv^2}{du^2} = 3$$

über, d.h., es ist in der Umgebung des Nullpunkts

$$\text{(VII; 99)} \qquad \frac{v}{u} = \frac{dv}{du} = \pm\sqrt{3}.$$

Setzt man $\varepsilon = \alpha + i\beta$, so kann man zur Bestimmung der Tangentenrichtungen im Verzweigungspunkt $\varepsilon = 1$ die Formel (VII; 90) benutzen, indem man $\alpha = 1$, $\beta = 0$ und die Werte (VII; 99) einsetzt. Man erhält dann

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \pm\sqrt{3},$$

d.h., die drei Zweige der Singularitätskurve in der ε-Ebene treffen sich in $\varepsilon = 1$ unter Winkeln von je $120°$. Die singulären Kurvenäste des hyperbolischen Falles gehen also im Verzweigungspunkt stetig und differenzierbar in die entsprechenden Kurvenäste des elliptischen Falles über. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 50 angedeutet, in der die hyperbolische Singularitätskurve stark ausgezogen, die elliptische gestrichelt gezeichnet ist.

Um die Frage der Entwickelbarkeit in Potenzreihen nach der Exzentrizität zu klären, weisen wir noch nach, daß auf dem in der reellen Achse liegenden Ast $0 < \varepsilon < 1$ bereits *für jedes reelle* N Singularitätspunkte liegen. Hier ist nämlich $v = 0$ und in der ε-Ebene $\beta = 0$, $\alpha = \sqrt{1 - u^2}$, d.h., es ist $|u| < 1$. Andererseits ergeben sich zu diesen u und zu $v = 0$ die zugehörigen N-Werte nach (VII; 98) aus der Gleichung

$$\mathfrak{Tg}\, 2(u - N) = \frac{\mathfrak{Tg}\, 2u - \mathfrak{Tg}\, 2N}{1 - \mathfrak{Tg}\, 2u\, \mathfrak{Tg}\, 2N} = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Setzt man nun

$$u = \mathfrak{Tg}\, w, \quad \mathfrak{Tg}\, 2(u - N) = \mathfrak{Tg}\, 2w,$$

was wegen $|u| = |\mathfrak{Tg}\, w| < 1$ für alle u dieses Bereiches erlaubt ist, so erhält man

$$N = u - w.$$

Da aber w für $|u| < 1$ alle reellen Werte annehmen kann, gilt dasselbe auch für $N = u - w$.

Jeder Kreis um den Nullpunkt der ε-Ebene, dessen Radius $\geqq 1$ ist, enthält also sicher für jedes N, d.h. für alle Zeiten, mindestens eine Singularität, so daß für $\varepsilon > 1$ keine für alle N konvergenten Potenzreihenentwicklungen nach ε möglich sind. Dagegen läßt sich um jedes reelle $\varepsilon = \varepsilon_0 > 1$ ein Kreis schlagen, in dessen Innern keine Singularitäten liegen. Man kann also Entwicklungen nach Potenzen von $\varepsilon - \varepsilon_0$ ausführen, die für beschränkte Beträge $|\varepsilon - \varepsilon_0|$ konvergieren. Daß dies für beliebig große ε_0 möglich ist, folgt aus der Tatsache, daß die singuläre Kurve $\beta = \beta(\alpha)$ außer für $|\alpha| \leqq 1$ keine Nullstellen besitzt, denn (VII; 94) ist ja für kein reelles $\varepsilon > 1$ erfüllt. Die übrigen Zweige der singulären Kurve $\beta = \beta(\alpha)$, die Nullstellen $|\alpha| > \pi/2$ enthalten, sind also auszuschließen. Ist ε_0 nur wenig größer als 1, so hat der Konvergenzkreis der Potenzreihe nach $\varepsilon - \varepsilon_0$, der die beiden dort nur schwach gekrümmten Äste der singulären Kurve (Abb. 50) berührt, ungefähr den Radius

$$R_0 = (\varepsilon_0 - 1) \sin 60° = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 - 1) \sqrt{3},$$

und zwar ist R_0 eine untere Schranke für den wahren Konvergenzradius R.

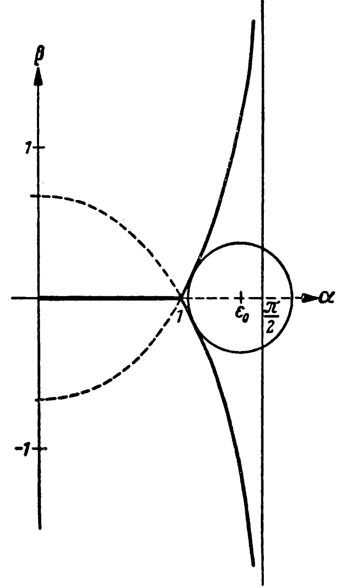


Abb. 50. Hyperbelbewegung. Singularitätskurve in der $\varepsilon = (\alpha + \beta i)$-Ebene.

K = Konvergenzkreis der Potenzreihen nach $\varepsilon - \varepsilon_0$

63. *Konvergenz der Potenzreihen nach der Zeit*

Ein Problem von großer praktischer Bedeutung betrifft die Ermittlung des Konvergenzbereichs für Reihen, die nach Potenzen der von irgendeiner Epoche $t = t_0$ aus gezählten „Zwischenzeit" $\tau = k(t - t_0)$ fortschreiten. Diese Aufgabe wird auf ganz ähnlichem Wege gelöst wie die in den Abschn. 61 und 62 behandelte. Die Koordinaten eines Planeten und andere Größen der Zweikörperbewegung (z.B. die für die Berechnung von Ephemeriden so wichtigen Funktionen F und G) sind ja als einfache Funktionen der exzentrischen Anomalie darstellbar. So sind, wenn wir mit $\lambda = E - E_0$ die Differenz der zu den Zeitpunkten t und t_0 gehörenden exzentrischen Anomalien bezeichnen, die rechtwinkligen Koordinaten in der Bahnebene durch

$$x = a[\cos(E_0 + \lambda) - e]; \quad y = a\sqrt{1 - e^2} \sin(E_0 + \lambda)$$

und die Größen F und G durch (VII; 3)

$$F = 1 - \frac{\mu_0}{\varrho_0}(1 - \cos\lambda); \quad G = \frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}\sin\lambda + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\varrho_0}}(1 - \cos\lambda)$$

darstellbar. Entwickelt man nun $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$ nach Potenzen von λ, so sind die Potenzreihen

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \lambda^\nu, \quad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \lambda^\nu; \quad F = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu \lambda^\nu, \quad G = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \lambda^\nu$$

für alle λ konvergent, da ja die Funktionen $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$ in der ganzen λ-Ebene regulär sind. Entwickelt man nun $\lambda = \lambda(\tau)$ in eine Potenzreihe

$$\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu \tau^\nu,$$

so haben die entstehenden Reihen

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \tau^\nu, \quad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \tau^\nu, \quad \ldots$$

den gleichen Konvergenzradius wie $\lambda(\tau)$ selbst. Um diesen zu bestimmen, ist es erforderlich, in der komplexen τ-Ebene diejenigen Stellen aufzusuchen, an denen für gegebene reelle Exzentrizitäten die komplexe Funktion $\lambda(\tau)$ singulär wird oder, was auf dasselbe herauskommt, die Singularitäten von $E(e, M)$ in der M-Ebene als Funktionen der Exzentrizität als eines reellen Parameters zu bestimmen, den wir jetzt wieder wie früher (da Verwechslungen nicht mehr zu befürchten sind) mit e bezeichnen wollen. Der Unterschied des vorliegenden Problems gegen das frühere ist also der, daß dort die Exzentrizität e als komplexes Argument, die mittlere Anomalie M als reeller Parameter auftrat, während hier die Rollen von e und M vertauscht sind.

Die Funktion $E(M)$ wird, konstantes $e > 0$ vorausgesetzt, singulär, wenn die Keplersche Gleichung

$$E - e\sin E = M \tag{VII; 100}$$

erfüllt ist, aber der Differentialquotient

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e\cos E}$$

nicht existiert, also

$$1 - e\cos E = 0 \tag{VII; 101}$$

ist. Die Singularitätsbedingungen (VII; 100, 101) sind also die gleichen wie die Bedingungen (VII; 77) des früheren Problems, nur, daß hier e reell und positiv, $M = u + iv$ komplex ist. Setzen wir ferner $E = \alpha + i\beta$, so sind die Gleichungen

$$\alpha + i\beta - e(\sin\alpha \operatorname{Cos}\beta + i\cos\alpha \operatorname{Sin}\beta) = u + iv, \tag{VII; 102}$$

$$e(\cos\alpha \operatorname{Cos}\beta - i\sin\alpha \operatorname{Sin}\beta) = 1 \tag{VII; 103}$$

gleichzeitig zu erfüllen.

Die Gleichung (VII; 103) erfordert, daß

$$\cos\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\beta = \frac{1}{e}, \tag{VII; 104}$$

$$\sin\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta = 0 \tag{VII; 105}$$

ist. Die Lösung von (VII; 105) ist entweder

$$\beta = 0; \quad \alpha \text{ beliebig}$$

oder

$$\alpha = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \ldots); \quad \beta \text{ beliebig.}$$

Im ersteren Fall liefert (VII; 104) $\cos\alpha = 1/e$, so daß diese Möglichkeit nur für $e > 1$ (Hyperbelbahnen) gegeben ist; der Grenzfall $e = 1$ soll vorläufig ausgeschlossen werden, da er eine gesonderte Behandlung erfordert. Im zweiten Fall bleibt, da $\mathfrak{Cof}\,\beta$ und e beide positiv sind, α auf die *geraden* Vielfachen von π beschränkt. Dann ist aber $\mathfrak{Cof}\,\beta = 1/e$, was nur für $e < 1$ (Ellipsenbahnen) auf reelle β führt. Die Singularitätsbedingungen für E sind also für nichtparabolische Bahnen folgende:

a) für *Ellipsen:*

$\alpha = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; $\mathfrak{Cof}\,\beta = \frac{1}{e}$ oder $\beta = \pm \ln \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, wenn $e = \sin\varphi$ gesetzt wird. Die letztere Formel beweist man, indem man

$$\mathfrak{Cof}\,\beta = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} = \frac{1}{\sin\varphi}$$

setzt. Das ergibt für e^{β} die quadratische Gleichung

$$e^{2\beta} - \frac{2}{\sin\varphi}\,e^{\beta} = -1,$$

deren Lösung, $e^{\beta} = \frac{1 \pm \cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ bzw. $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, auf $\beta = \pm \ln \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ führt;

b) für *Hyperbeln:*

$$\beta = 0; \quad \cos\alpha = \frac{1}{e} \quad \text{oder}$$

$$\alpha = \pm\left(\arccos\frac{1}{e} - 2\,k\pi\right) = \pm\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^2 - 1} - 2k\pi\right).$$

Es bleibt noch übrig zu zeigen, welche Werte M bzw. welche Wertepaare u, v sich ergeben, wenn man diese Lösungen in (VII; 102) einsetzt. Schreibt man den reellen und den imaginären Teil dieser Gleichung gesondert, so wird

$$u = \alpha - e\sin\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\beta,$$
$$v = \beta - e\cos\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta.$$

Für *Ellipsen* erhält man also mit den Lösungen (a)

$$u = 2k\pi,$$

(VII; 106) $$v = \pm \ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \mp e \sqrt{\mathfrak{Cof}^2 \beta - 1} = \pm \left[\ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - \cos \varphi \right] = \pm v_0 .$$

Für *Hyperbeln* setzt man statt $M = u + iv$, wie in Abschn. 62,

$$N = -iM = v - iu = \bar{u} + i\bar{v}$$

und führt die Lösungen (b) ein. Es wird dann

(VII; 107) $$\bar{u} = v = 0$$
$$\bar{v} = -u = \pm \left(\sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{e^2 - 1} + 2k\pi \right).$$

Im elliptischen Fall ergibt sich das in Abb. 51 gezeichnete Bild. Für jedes Vielfache von 2π als Abszisse gibt es zwei konjugiert komplexe Singularitäts-

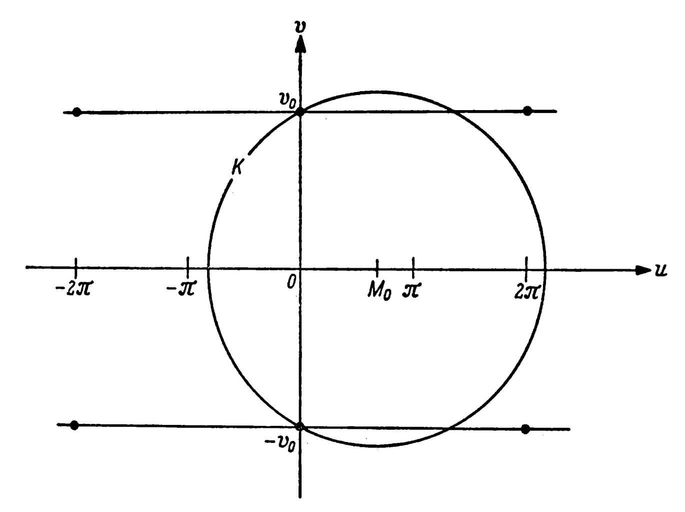


Abb. 51. Elliptische Bewegung. Singuläre Punkte in der M-Ebene.
K = Konvergenzkreis der Potenzreihen nach $M - M_0$

stellen mit den nach (VII; 106) berechneten Ordinaten $v = \pm v_0$. Da es wegen der Periodizität der elliptischen Bewegung genügt, sich auf den Bereich $-\pi < M < +\pi$ zu beschränken, so ist für irgendein reelles M_0 dieses Intervalls die Entwicklung nach Potenzen von $M - M_0$ konvergent, wenn $|M - M_0|$ kleiner ist als der Abstand des Punktes M_0 von der auf der (positiven oder negativen) imaginären Achse liegenden Singularitätsstelle. Der zu M_0 gehörige Konvergenzradius $R(M_0)$ ist demnach

(VII; 108) $$R = \sqrt{v_0^2 + M_0^2}, \quad v_0 = \ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - \cos \varphi .$$

Im hyperbolischen Fall zeigt Abb. 52 die hier etwas anders liegenden Verhältnisse. In der N-Ebene liegen die Singularitätspunkte, die zu einem gegebenen $e > 1$ gehören, sämtlich auf der imaginären Achse, und zwar, wenn arc tg den Hauptwert dieser Funktion bezeichnet, von den Punkten

$$\bar{v}_0 = \pm\left(\sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{e^2 - 1}\right)$$

aus in Abständen von der Länge 2π beliebig oft abgetragen, d.h., es ist

$$|\bar{v}| = |\bar{v}_0| + 2k\pi,$$

wo k eine ganze positive Zahl oder null sein kann. Daß k nicht negativ sein kann, hat einen besonderen Grund. Wäre nämlich $k < 0$, so gäbe es immer ein $e > 1$, für das

$$\sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{e^2 - 1} + 2k\pi = 0,$$

also nach (VII;107) $\bar{u} = \bar{v} = 0$ (d.h. $N = M = 0$) wäre. Das ist aber mit den Singularitätsbedingungen nur für $e = 1$ vereinbar. Dann ist aber nach der obigen Gleichung $k = 0$. In diesen Grenzfall muß derjenige Zweig der Singularitätskurve einmünden, der uns hier interessiert. Wenn wir also e von $e = 1$ aus wachsen lassen, wird derjenige Singularitätspunkt, der dem Nullpunkt am nächsten liegt, auf der imaginären Achse die Ordinaten $\bar{v}_0$ einnehmen, deren Beträge mit e ständig zunehmen. Wenn man also eine Reihenentwicklung nach Potenzen von $N - N_0$ vornimmt, wo N_0 irgendein reeller Wert ist, so wird der Konvergenzradius

$$R = \sqrt{\bar{v}_0^2 + N_0^2}$$

sein.

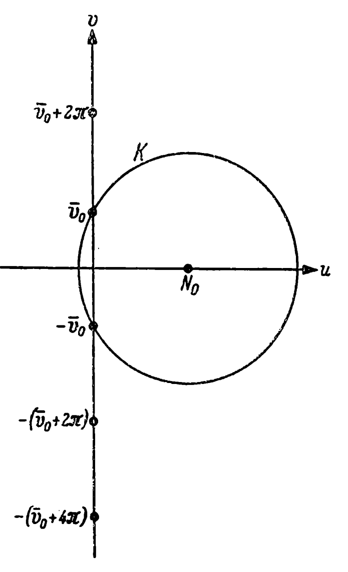


Abb. 52. Hyperbolische Bewegung. Singuläre Punkte in der N-Ebene.

K = Konvergenzkreis der Potenzreihen nach $N - N_0$

Im hyperbolischen Fall ist der Konvergenzradius am kleinsten für $N_0 = 0$, also für das Perihel der Bahn, und wächst über alle Grenzen, wenn der Bahnpunkt, für den $N = N_0$ ist und von dem die Entwicklung ausgeht, ins Unendliche rückt. Das ist auch anschaulich verständlich, denn die Bewegung des Himmelskörpers nähert sich ja bei wachsender Entfernung vom Zentralkörper asymptotisch der geradlinig-gleichförmigen Bewegung; sie kann also für Zeiträume, die mit N_0 immer größer werden, praktisch schon durch das lineare Glied der Potenzreihenentwicklung nach der Zwischenzeit genau genug angenähert werden.

Im elliptischen Fall hat der Konvergenzradius für $M_0 = 0$, also für das Perihel als Ausgangspunkt, ein Minimum, für $M_0 = \pi$, also für das Aphel, ein Maximum. Im Fall einer Kreisbahn ($e = 0$) wird $v_0 = \infty$ und daher auch, unabhängig von M_0, $R = \infty$. Tatsächlich läßt sich die Kreisbewegung ja in der

Bahnebene durch $x = a\cos M$, $y = a\sin M$ darstellen, also in stets konvergente Reihen nach Potenzen von M entwickeln.

Besondere Überlegungen erfordert noch der Fall einer Parabelbahn. Hier verlieren die Größen M bzw. N ihren Sinn, ebenso wie die exzentrische Anomalie E oder die entsprechende hyperbolische Größe $iE = F$. Dagegen bleibt die wahre Anomalie v für alle Zeiten reell und durch die kubische Gleichung (III; 43)

$$\text{(VII; 109)} \qquad \operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2} = \frac{k(t-T)}{\sqrt{2q^3}} = \frac{2k(t-T)}{\sqrt{p^3}} = P(t)$$

als Funktion der Zeit bestimmbar. In der komplexen P-Ebene werden also die Singularitäten der Funktion $v(P)$ dort liegen, wo für die Lösungen der Gleichung (VII; 109)

$$\frac{d\operatorname{tg}\frac{v}{2}}{dP} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}}$$

nicht existiert, also

$$1 + \operatorname{tg}^2\frac{v}{2} = 0; \quad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \pm i$$

ist. Setzen wir dies in (VII; 109) ein, so erhalten wir für die singulären Punkte P

$$P = \pm\frac{2}{3}i, \quad k(t-T) = \pm\frac{1}{3}i\sqrt{p^3}.$$

Der Konvergenzradius für Potenzreihen nach $\tau = k(t-t_0)$ ist demnach

$$R = \sqrt{|k(t-T)|^2 + k^2(t_0-T)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{p^3}\sqrt{1 + \frac{9k^2}{p^3}(t_0-T)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{p^3}\sqrt{\frac{4}{9} + P_0^2},$$

mit $\quad P_0 = \dfrac{2k}{\sqrt{p^3}}(t_0 - T).$

Der parabolische Fall ist zuerst von W. A. Hamilton[1]) behandelt worden. F. A. Moulton[2]) hat die Untersuchung auf alle Bahnformen ausgedehnt. Betrachtet man auch in den nichtparabolischen Fällen die Entwicklungen nach der Zwischenzeit $t - t_0$ selbst statt nach $M - M_0$ bzw. $N - N_0$, so erhält man leicht wegen

$$M = \frac{k(t-T)}{\sqrt{a^3}}; \quad N = \frac{k(t-T)}{\sqrt{\alpha^3}}; \quad P = \frac{2k(t-T)}{\sqrt{p^3}}$$

---

[1]) Astron. Journal *23*, 49 (1903).
[2]) Astron. Journal *23*, 93 (1903).

die folgende Zusammenstellung aller Konvergenzbedingungen:

$$\text{(VII; 110)}\quad \begin{aligned} &1)\quad e = \sin\varphi < 1: \quad R(t_0) = \frac{\sqrt{a^3}}{k}\sqrt{M_0^2 + v_0^2}\,, \\ &\left(v_0 = \ln \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi\right), \\ &2)\quad e = 1: \qquad R(t_0) = \frac{\sqrt{p^3}}{2k}\sqrt{P_0^2 + \frac{4}{9}}\,, \\ &3)\quad e > 1: \qquad R(t_0) = \frac{\sqrt{\alpha^3}}{k}\sqrt{N_0^2 + \bar{v}_0^2}\,, \\ &\left(\bar{v}_0 = \sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^2 - 1}\right). \end{aligned}$$

Hier bedeutet $R(t_0)$ den Konvergenzradius für Entwicklungen nach Potenzen von $t - t_0$. Die Größen $N_0 = N(t_0)$, $P_0 = P(t_0)$ können alle reellen Werte annehmen, während für M_0 die Beschränkung $|M_0| \leqq \pi$ gilt. Abgesehen von Kreisbahnen (und von nichtelliptischen Bahnen in hinreichend großer Entfernung vom Zentralkörper) sind also die Potenzreihen nach der Zwischenzeit nur für beschränkte Zeitintervalle möglich. MOULTON hat loc. cit. Tabellen für die Konvergenzgrenzen in verschiedenen Fällen berechnet, die für den Rechner sehr nützlich sind (siehe Anhang A VIII).

Zu Beginn dieses Abschnitts hatten wir festgestellt, daß diese Konvergenzbeschränkungen für Potenzreihen nach E bzw. F nicht gelten, da sich die zu entwickelnden Funktionen im allgemeinen in einfacher Weise aus Ausdrücken wie $\sin E$, $\cos E$, ... zusammensetzen, die für alle Werte des Arguments in konvergente Potenzreihen entwickelbar sind. Dasselbe gilt auch, wenn wir Entwicklungen nach Potenzen der Lösung z der Hauptgleichung (V; 51) durchführen oder besser noch Entwicklungen nach Potenzen von

$$y = z\tau,$$

einer Variablen, die den Charakter einer Anomalie besitzt und im elliptischen Fall wegen (V; 80)

$$z = \frac{E - E_0}{\tau\sqrt{\varrho_0}}$$

der Differenz $\lambda = E - E_0$ proportional ist. Wenn wir die Hauptgleichung mit τ multiplizieren, erhalten wir die transzendente Gleichung

$$\tau = y + c_2(\varrho_0 y^2)\cdot\sigma_0 y^2 + c_3(\varrho_0 y^2)\cdot\varepsilon_0 y^3,$$

aus der y, unabhängig von der Bahnform, als Funktion von τ bestimmt werden kann. Alle Bahngrößen, wie die Funktionen F und G oder wie

$$\Delta = \frac{r}{r_0} = 1 + c_1(\varrho_0 y^2)\cdot\sigma_0 y + c_2(\varrho_0 y^2)\cdot\varepsilon_0 y^2,$$

lassen sich dann, ohne daß man auf Fallunterscheidungen wegen der Exzentrizität Rücksicht zu nehmen hat, in stets konvergente Potenzreihen nach y entwickeln, denn die Funktionen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ konvergieren ja für jeden Wert ihres Arguments, und zwar mit wachsendem Index immer besser und stets besser als $c_0 = \cos\left(y\sqrt{\varrho_0}\right)$.

Ebenso wie man durch Einführung der Variablen z oder y die Bahnbewegung einheitlich für alle Bahntypen formulieren kann, lassen sich auch die Konvergenzbedingungen (VII; 110) für Potenzreihen nach τ auf eine einheitliche Gestalt bringen. Setzt man der Einfachheit halber

$$\Theta_0 = k(t_0 - T)$$

für die Zeit vom Periheldurchgang bis zu dem Zeitpunkt t_0, um den entwickelt werden soll, und sei wie bisher $\tau = k(t - t_0)$ die unabhängige Variable der Potenzreihenentwicklung, so ist

$$M_0\sqrt{a^3} = N_0\sqrt{\alpha^3} = \frac{1}{2}P_0\sqrt{p^3} = \Theta_0$$

in den drei Fällen (VII; 110) zu setzen. Der Konvergenzradius der Potenzreihen um Θ_0 ist dann

$$\text{für} \quad e < 1: \quad R(\Theta_0) = \sqrt{\Theta_0^2 + a^3 v_0^2}; \quad a = \frac{p}{1 - e^2},$$

$$\text{für} \quad e = 1: \quad R(\Theta_0) = \sqrt{\Theta_0^2 + \frac{1}{9}p^3};$$

$$\text{für} \quad e > 1: \quad R(\Theta_0) = \sqrt{\Theta_0^2 + \alpha^3 \bar{v}_0^2}; \quad \alpha = \frac{p}{e^2 - 1}.$$

Setzt man nun

$$x^2 = 1 - e^2, \quad \text{d.h.} \quad x = \sqrt{1 - e^2}, \quad i x = \sqrt{e^2 - 1},$$

so erhält man für

$$e < 1: \quad \sqrt{a^3}\, v_0 = \sqrt{p^3}\,\frac{\ln \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi}{\sqrt{(1 - e^2)^3}} = \sqrt{p^3}\,\frac{\frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x} - x}{x^3},$$

$$e > 1: \quad \sqrt{\alpha^3}\, \bar{v}_0 = \sqrt{p^3}\,\frac{\sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{(e^2 - 1)^3}} = \sqrt{p^3}\,\frac{i x - \operatorname{arc\,tg} i x}{(i x)^3}.$$

Es ist also für beliebige Exzentrizitäten

$$R(\Theta_0) = \sqrt{\Theta_0^2 + R_0^2},$$

wo

$$\text{(VII; 111)} \qquad R_0 = \sqrt{p^3}\, C(x^2)$$

den Konvergenzradius für Entwicklungen vom Perihel aus darstellt. Dabei ist

$$C(x^2) = \frac{\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - x}{x^3} = \frac{ix - \operatorname{arc\,tg} ix}{(ix)^3}$$

eine Funktion von $x^2 = 1 - e^2$, die für alle positiven und negativen Argumente x^2 definiert ist und für $-1 \leqq x^2 < +1$, d.h. für $\sqrt{2} \geqq e > 0$ in der Form einer konvergenten Potenzreihe

$$C(x^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{7}x^4 + \cdots$$

geschrieben werden kann. Für Kreisbahnen ($x = 1$) wird $C(x^2)$ und damit auch der Konvergenzradius unendlich. Für Parabeln ($x = 0$) beschränkt sich C auf das konstante Glied, und es wird $R_0 = \frac{1}{3}\sqrt{p^3}$. Wächst die Exzentrizität über 1 hinaus, so nimmt C weiterhin ab: So ergibt sich für $x^2 = -1$ $\left(e = \sqrt{2}\right)$

$$C(-1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots = 1 - \frac{\pi}{4} = 0.21460\ldots$$

Für größere e versagt die Reihenentwicklung, und C wird durch

$$C = \frac{\sqrt{e^2-1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^2-1}}{\sqrt{(e^2-1)^3}}$$

dargestellt. Wächst e über alle Grenzen, so geht C offensichtlich gegen null wie e^{-2}. Da andererseits

$$p = q(1+e),$$

so geht bei konstant gehaltener Periheldistanz q auch der Konvergenzradius im Perihel,

$$R_0 = \sqrt{q^3(1+e)^3} \cdot C,$$

immer noch wie $e^{-\frac{1}{2}}$ gegen null, wenn e gegen unendlich strebt.

64. *Reihenentwicklung bei geradliniger Bewegung. Zusammenstoß und Regularisierung*

Bei den bisherigen Betrachtungen haben wir den in Abschn. 26 behandelten geradlinigen Bahntypus ganz außer acht gelassen. Der Vollständigkeit halber soll das jetzt nachgeholt werden. Nach (III; 87, 84, 89) ist, wenn wir mit T die Zeit der Koinzidenz der beiden Massen (also die Zeit des Zusammenstoßes bzw. der Ejektion) bezeichnen, zu der der Abstand $r = 0$ gehört,

a) *elliptischer Typ* $[0 < r < 2a;\quad a > 0]$:

$$k(t - T) = \pm\sqrt{a^3}\left\{2 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{r}{2a - r}} - \frac{\sqrt{r(2a - r)}}{a}\right\},$$

b) *parabolischer Typ* $(0 < r < \infty)$:

$$\text{(VII; 112)}\qquad k(t - T) = \pm\frac{1}{3}\sqrt{2r^3},$$

c) *hyperbolischer Typ* $[0 < r < \infty;\quad \alpha = -a > 0]$:

$$k(t - T) = \pm\sqrt{\alpha^3}\left\{\ln\frac{\sqrt{2\alpha + r} - \sqrt{r}}{\sqrt{2\alpha + r} + \sqrt{r}} + \frac{\sqrt{r(2\alpha + r)}}{\alpha}\right\}.$$

In allen drei Fällen ist nach (III; 82)

$$\text{(VII; 113)}\qquad \frac{dr}{dt} = \pm k\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}.$$

Sei also in der komplexen t-Ebene $r(t)$ als komplexe Funktion definiert, so sind singuläre Punkte nur dort vorhanden, wo dr/dt als endliche Größe nicht mehr existiert; das ist aber, da ja $a \neq 0$ vorausgesetzt werden darf (denn $a = 0$ würde ja bedeuten, daß beide Massen dauernd zusammenfallen, eine Bewegung also nicht stattfindet), nur für $r = 0$ der Fall. Der einzige singuläre Punkt ist also $t = T$, d.h. derjenige Punkt der reellen t-Achse, in dem $r = 0$ wird. Entwicklungen der Funktion $r(t)$ nach Potenzen von $t - t_0$ sind daher dann und nur dann konvergent, wenn $|t - t_0| < |t_0 - T|$ ist. Dasselbe folgt auch aus (VII; 111), denn für geradlinige Bewegung ist ja $p = 0$; lassen wir also p gegen null streben, so wird $R_0 = 0$ und daher $R = |t_0 - T|$, wie oben.

Daß diese Singularität besteht, folgt auch aus den Betrachtungen des Abschn. 45. Dort ist gezeigt worden, daß die Spitzen der Enveloppe der Geradenschar $z = \text{const}$ in die Grenzparabel einmünden, die ja den geometrischen Ort derjenigen Fälle der Ephemeridenrechnung darstellt, die einer geradlinigen Bewegung entsprechen. Ist etwa $r_0 = r(t_0)$ der Ausgangspunkt, $r_1 = r(t_1)$ der Endpunkt der Entwicklung, so entspricht, wie dort bewiesen worden ist, die Enveloppenspitze demjenigen Spezialfall, in dem $r_1/r_0 = 0$ ist, d.h. der Endpunkt der Entwicklung im Attraktionszentrum liegt. Die Entwicklung selbst läßt sich, wenn $r_0 > 0$, immer nach (VII; 21) durchführen, wenn man berücksichtigt, daß im Fall der geradlinigen Bewegung $\omega = \sigma^2$ und

$$\frac{p}{r_0^4} = \vartheta_0 = 2\varepsilon_0 + \varrho_0 - \sigma_0^2 = 0, \quad \text{also} \quad 2\zeta_0 + \chi_0 - \eta_0^2 = 0$$

ist. Die Geschwindigkeit des Körpers ist ja hier durch $V = \pm\dot{r}$ definiert, wo $\dot{r}$ positiv in der Steigbewegung, negativ in der Fallbewegung ist. Es ist daher in

der geradlinigen Bewegung

$$\sigma_0 = \frac{\dot{r}_0}{r_0}, \quad \omega_0 = 2\varepsilon_0 + \varrho_0 - \sigma_0^2 = \left(\frac{\dot{r}_0}{r_0}\right)^2.$$

Setzt man demnach in (VII; 21) $\mu = \omega - \varepsilon = \sigma^2 - \varepsilon$; $\xi = \eta^2 - \zeta$, so erhält man

$$r = r_0\left[1 + \eta + \frac{1}{2}(\zeta - 2\eta^2) + \frac{1}{6}\eta\,(3\eta^2 - 5\zeta) + \cdots\right].$$

Befindet sich der Ausgangspunkt der Entwicklung im singulären Punkt selbst, so divergiert diese Reihe natürlich immer, da für $r_0 = 0$ schon $r_0\eta = \dot{r}_0\tau$ der Geschwindigkeit proportional ist, die im Kollisionspunkt unendlich wird. Man kann aber dennoch vom singulären Punkt aus Reihenentwicklungen durchführen, wenn man statt der Zwischenzeit $\tau = k(t - T)$ eine neue Variable Θ benutzt, für die die Singularität nicht besteht. Dieses Verfahren, in der Umgebung von Kollisionen oder Ejektionen das Verhalten des bewegten Massenpunktes zu untersuchen, wird später (Band II) bei der Diskussion der Dreikörperbewegung, in der Zusammenstöße eine wichtige Rolle spielen, noch häufig angewandt werden. Im Zweikörperproblem sind Zusammenstöße (unter der Voraussetzung ausdehnungsloser Massen) nur bei der geradlinigen Bewegung möglich. Der hier betrachtete Fall ist daher der einfachste in der Himmelsmechanik, in dem eine „Regularisierung" durch Einführung neuer Variabler notwendig wird.

Es zeigt sich, daß es genügt,

$$\tau = \varkappa\Theta^{\frac{3}{2}}; \quad \frac{d\tau}{d\Theta} = \frac{3}{2}\varkappa\Theta^{\frac{1}{2}}$$

zu setzen, wo $\varkappa$ ein noch geeignet zu bestimmender konstanter Faktor ist. Man erhält dann

$$\frac{dr}{d\Theta} = \frac{3}{2}\varkappa\Theta^{\frac{1}{2}}\frac{dr}{d\tau},$$

also wegen (VII; 113) und für $\varkappa = 1$

$$\frac{dr}{d\Theta} = \pm\frac{3}{2}\varkappa\sqrt{\Theta\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}. \tag{VII; 114}$$

Man erkennt hieraus, daß der Ansatz

$$r = \alpha_1\Theta + \alpha_2\Theta^2 + \alpha_3\Theta^3 + \cdots$$

zum Ziel führt, denn setzt man in (VII; 114) rechts diese Potenzreihe und links

$$\frac{dr}{d\Theta} = \alpha_1 + 2\alpha_2\Theta + 3\alpha_3\Theta^2 + \cdots$$

ein, so führt diese Beziehung für $\Theta = 0$ auf

$$\alpha_1 = \pm \frac{3}{2} \varkappa \sqrt{\frac{2}{\alpha_1}} \quad \text{oder} \quad \alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} \varkappa^2}.$$

Speziell wird $\alpha_1 = 1$, wenn man $\varkappa^2 = \frac{2}{9}$ setzt.

Eine solche Regularisierung ist von C. Burrau[1]) für den Fall eines Zusammenstoßes zweier Massenpunkte im Dreikörperproblem durchgeführt worden. Man kann seine Ergebnisse aber leicht auf den hier vorliegenden Fall der geradlinigen Zweikörperbewegung spezialisieren. Setzt man $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = \lambda$, so kann man auch

$$r = \Theta[1 + \lambda\Theta + \beta_2 (\lambda\Theta)^2 + \beta_3 (\lambda\Theta)^3 + \cdots],$$

(VII; 115) $$\frac{dr}{d\Theta} = 1 + 2\lambda\Theta + 3\beta_2 (\lambda\Theta)^2 + 4\beta_3 (\lambda\Theta)^3 + \cdots]$$

schreiben. Andererseits ist nach (VII; 114) mit $\varkappa^2 = \frac{2}{9}$

$$r\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 = \Theta\left(1 - \frac{r}{2a}\right).$$

Setzt man die Reihen (VII; 115) ein und führt die Multiplikationen aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\Theta[1 + 5\lambda\Theta + (8 + 7\beta_2)(\lambda\Theta)^2 + (4 + 22\beta_2 + 9\beta_3)(\lambda\Theta)^3 + \\ + (15\beta_2^2 + 16\beta_2 + 28\beta_3 + 11\beta_4)(\lambda\Theta)^4 + \cdots = \\ = \Theta\left[1 - \frac{\Theta}{2a}(1 + \lambda\Theta + \beta_2 (\lambda\Theta)^2 + \beta_3 (\lambda\Theta)^3 + \cdots)\right] = \\ = \Theta[1 + 5\lambda\Theta(1 + \lambda\Theta + \beta_2 (\lambda\Theta)^2 + \beta_3 (\lambda\Theta)^3 + \cdots)],\end{aligned}$$

da ja aus der Gleichsetzung der quadratischen Glieder $-\frac{\Theta}{2a} = 5\lambda$ folgt. Die Koeffizientenvergleichung der höheren Glieder ergibt dann sukzessive

$$\beta_2 = -\frac{3}{7}; \quad \beta_3 = \frac{23}{63}; \quad \beta_4 = -\frac{1894}{4851}; \quad \ldots,$$

also schließlich

$$r = \Theta\left[1 - \frac{1}{10}\frac{\Theta}{a} - \frac{3}{700}\left(\frac{\Theta}{a}\right)^2 - \frac{23}{63000}\left(\frac{\Theta}{a}\right)^3 - \frac{1894}{48510000}\left(\frac{\Theta}{a}\right)^4 - \cdots\right].$$

Für den parabolischen Typ der geradlinigen Bewegung ($1/a = 0$) erhält man einfach

$$r = \Theta = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\tau^2},$$

was auch unmittelbar aus (VII; 112b) folgt.

---

[1]) Astron. Nachr. *136*, 161 (1894).

KAPITEL VIII

BAHNBESTIMMUNG DER HIMMELSKÖRPER NACH DEM LAPLACESCHEN PRINZIP

65. *Allgemeines und Historisches über das Problem der Bahnbestimmung*

Mit der Aufgabe, die Bahnelemente eines Himmelskörpers zu bestimmen, wenn für eine gewisse Anzahl von Zeitpunkten seine Örter an der Sphäre (Rektaszension und Deklination oder ekliptikale Länge und Breite) durch Beobachtung bekannt sind, hat sich bereits NEWTON in seinem Werk „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1687) beschäftigt. Er gibt dort (im Abschn. 5 des Bandes III) eine im wesentlichen graphische Methode der Bestimmung einer parabolischen Kometenbahn an, die über sukzessive Näherungen zur Lösung führt, und er wendet dieses noch recht komplizierte Verfahren auf die Bestimmung der Bahn des großen Kometen von 1680/81 an.

Die Bemühungen um dieses von NEWTON selbst als schwierig bezeichnete Problem dauerten im 18. Jh. an und beschäftigten die großen Mathematiker jener Zeit. Bei dieser Gelegenheit fand L. EULER die berühmte nach ihm benannte Gleichung (VI; 13). Seine 1740 veröffentlichte Methode der parabolischen Bahnbestimmung fußt auf dem angenähert gültigen Satz, daß bei drei benachbarten Kometenörtern P_1, P_2, P_3 der Radiusvektor von P_2 die Sehne $P_1 P_3$ im Verhältnis der Zwischenzeiten $(t_2 - t_1) : (t_3 - t_2)$ teilt. In Wirklichkeit ist das Verhältnis der beiden Sehnenabschnitte dem Verhältnis der Inhalte der beiden Dreiecke gleich, die von den Radiusvektoren nach P_1 und P_2 bzw. nach P_2 und P_3 eingeschlossen werden, wie eine einfache geometrische Überlegung lehrt. Andererseits ist das Verhältnis der Zwischenzeiten nach dem Flächensatz dem Verhältnis der Inhalte der beiden Kegelschnittsektoren gleich, die diesen Dreiecken entsprechen. Die EULERsche Näherung beruht also darauf, daß man bei hinreichend dicht benachbarten Örtern des Himmelskörpers das Verhältnis der Sektoren durch das der Dreiecke ersetzen kann, ohne allzu große Fehler befürchten zu müssen. Es ist also, wenn wir die Inhalte der beiden Dreiecke mit D_1, D_3, die der Sektoren mit S_1, S_3 und die Sehnenabschnitte mit s_1, s_3 bezeichnen und wenn die Zwischenzeiten $\tau_1 = k(t_1 - t_2)$, $\tau_3 = k(t_3 - t_2)$ sind,

$$\frac{s_1}{s_3} = \frac{D_1}{D_3}; \quad \frac{S_1}{S_3} = \left|\frac{\tau_1}{\tau_3}\right|.$$

Andererseits ist nach (VI; 49) das Verhältnis Sektor : Dreieck

$$\frac{S}{D} = y = \frac{\tau}{G} = \frac{1}{1 - c_3 \xi z^3}; \quad \xi = \frac{\tau^2}{r_2^3},$$

wenn z die Lösung der Hauptgleichung (V; 51) für den Übergang von P_2 auf P_1 bzw. P_3 bedeutet. Sind die Zwischenzeiten klein, so ist $z \approx 1$, $c_3 \approx \frac{1}{6}$ (bei Para-

beln streng $c_3 = \frac{1}{6}\Big)$, und es ist also genähert

$$\text{(VIII; 1)} \qquad \frac{s_1}{s_3} = \frac{D_1}{D_3} = \frac{S_1 G_1}{\tau_1} : \frac{S_3 G_3}{\tau_3} = \left|\frac{\tau_1}{\tau_3}\right| \frac{1 - \frac{1}{6 r_2^3} \tau_1^2 z_1^3}{1 - \frac{1}{6 r_2^3} \tau_3^2 z_3^3} =$$

$$= \left|\frac{\tau_1}{\tau_3}\right| \left\{1 - \frac{1}{6 r_2^3} (\tau_1^2 - \tau_3^2) + \cdots\right\},$$

und man erkennt, daß die Abweichungen von der EULERschen Näherung im allgemeinen von der 2. Ordnung, bei gleichen (oder nahezu gleichen) Zwischenzeiten ($\tau_1 = -\tau_3$) sogar von der 3. Ordnung in den Zwischenzeiten sind.

Obwohl die EULERschen Ergebnisse, die einige Jahrzehnte später von J. H. LAMBERT weiterentwickelt wurden, wichtige Ansätze für eine analytische Lösung des Bahnbestimmungsproblems gebracht haben, erwies sich der eingeschlagene Weg als ungeeignet für die praktische Anwendung. Erst W. OLBERS gelang es, auf Grund der EULERschen Gleichung und des oben bewiesenen Satzes eine Methode zu entwickeln, die durch eine rasch fördernde Hypothesenrechnung zum Ziele führt und mit wenigen Verbesserungen noch heute zur Berechnung vorläufiger parabolischer Elemente von neu entdeckten Kometen benutzt wird. OLBERS' Schrift „Über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen" (Weimar 1797) ist in das klassische Schrifttum der praktischen Himmelsmechanik eingegangen.

Vor dem Beginn des 19. Jhs. war die Aufgabe der Bestimmung von Kometenbahnen das den Praktiker fast ausschließlich interessierende Problem. Trotzdem haben sich die Theoretiker auch schon damals mit dem allgemeineren Fall der Bestimmung KEPLERscher Bahnen ohne Voraussetzung über die Exzentrizität beschäftigt. Fast gleichzeitig haben LAGRANGE (1778) und LAPLACE (1780) Lösungen dieser komplizierteren Aufgabe entwickelt, die aber in ihrer ursprünglichen Form wenig Beachtung gefunden haben. Erst sehr viel später, seit dem Ende des vorigen Jahrhunderts und im Laufe der ersten Jahrzehnte des jetzigen, ist das von ihnen befolgte Prinzip in einer Reihe von Bahnbestimmungsmethoden, die sich durch große Eleganz und Durchsichtigkeit auszeichnen, wieder zu Ehren gelangt.

Die praktische Notwendigkeit, rasch zum Ziele führende Methoden zur Bestimmung elliptischer Planetenbahnen zur Hand zu haben, ergab sich erst, als 1801 der erste der „Kleinen Planeten", Ceres, von PIAZZI entdeckt wurde. C. F. GAUSS begründete seinen Ruhm als großer Mathematiker mit jenem Verfahren, mit dem er damals, kaum 24-jährig, die Bahn der Ceres aus den PIAZZIschen Beobachtungen zu berechnen wußte und die Wiederauffindung des inzwischen verlorengegangenen Planetoiden ermöglichte. Er hat diese Methode später in seinem berühmten Werk „Theoria corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium" (Hamburg 1809) zu großer Vollkommenheit ent-

wickelt; auch sie ist heute, mit gewissen von ENCKE, TIETJEN, HANSEN u.a. eingeführten unwesentlichen Verbesserungen, noch allgemein im Gebrauch. Das Prinzip, das der GAUSSschen Methode und ihren zahlreichen in neuerer Zeit entwickelten Abarten (die insbesondere auf Verwendbarkeit für das Maschinenrechnen abzielen) zugrundeliegt, unterscheidet sich wesentlich von dem Prinzip der Methoden von LAGRANGE-LAPLACE. Während diese als Arbeitsunbekannte die Koordinaten des heliozentrischen Ortes und der heliozentrischen Geschwindigkeit einer der beobachteten Planetenpositionen (bei drei Beobachtungen der mittleren) einführen, berechnet GAUSS die Koordinaten zweier Örter (bei drei Beobachtungen die der beiden äußeren). In jedem Falle beträgt also die Zahl der zu berechnenden Unbekannten sechs, entsprechend der Zahl der zu bestimmenden Bahnelemente des Himmelskörpers. Sind diese Größen bekannt, so läßt sich ja, wie in Kapitel V (Abschn. 39) und Kapitel VI (Abschn. 50–52) gezeigt worden ist, das System der Kegelschnittelemente als Lösung eines Anfangswertproblems bzw. eines Randwertproblems leicht finden.

Die Hauptschwierigkeit der Bahnbestimmung liegt darin, daß die sechs Unbekannten mit den beobachteten Daten, also den topozentrischen sphärischen Koordinaten α_i, δ_i von drei oder mehr Planetenörtern in sehr komplizierter Weise verbunden sind. Eine Lösung des Problems ist, wenn überhaupt, nur durch Näherungsmethoden möglich, d.h., es wird zuerst eine noch rohe provisorische Lösung gesucht, die dann durch Iteration in mehreren Schritten verbessert wird, bis alle Widersprüche zwischen Beobachtung und Rechnung verschwunden sind. Wir haben im Kapitel I (Abschn. 10) gesehen, daß schon PTOLEMÄUS ein solches Näherungsverfahren einschlagen mußte, um auf Grund seiner Epizykeltheorie die Bahnelemente der großen Planeten festzulegen. Er kannte aber bereits den zeitlichen Ablauf der scheinbaren Bewegungen der Planeten an der Sphäre und konnte daher die sphärischen Örter, die er zur Bahnbestimmung heranzog, so auswählen, daß die Rechnung mit den einfachen geometrischen Hilfsmitteln, die ihm zur Verfügung standen, leicht durchführbar war. So benutzte er z.B. für die Bahnbestimmung der äußeren Planeten drei Oppositionsörter. In der modernen Bahnbestimmung hat der Rechner von einem eben entdeckten Planetoiden oder Kometen nur wenige, zeitlich dicht aufeinanderfolgende, Beobachtungen zur Hand, und er kennt zu Beginn der Hypothesenrechnung noch keines der Bahnelemente (auch nicht die Umlaufszeit, die PTOLEMÄUS bei seiner Rechnung schon vorgegeben fand). Um nun die dynamischen Beziehungen zwischen den beobachteten Örtern berücksichtigen zu können, wird der Rechner die Entwicklung der Koordinaten (oder geeigneter Funktionen der Koordinaten) nach Potenzen der Zwischenzeiten benutzen. Diese Entwicklungen sind aber nur dann von praktischem Wert, wenn sie so rasch konvergieren, daß wenige Glieder ausreichen; denn nur in den ersten Gliedern sind die unbekannten Größen des Problems in so einfacher Form enthalten, daß ihre schrittweise Eliminierung ohne allzugroße Schwierigkeiten möglich ist. Die Hypothesenrechnung wird daher nur dann rasch zum Abschluß kommen, wenn die Zwischenzeiten hinreichend klein sind. Andererseits wird aber das Ergebnis der Rechnung um so ungenauer ausfallen, je kürzer der Bahnbogen ist, auf dem sich der Himmelskörper während der Zeit seiner

Entdeckungsbeobachtungen bewegt hat. Es wird also, je nach den obwaltenden Umständen, ein gewisses Optimum für die Länge der Zwischenzeiten geben. Sind sie zu groß, so wird das Iterationsverfahren nur langsam oder gar nicht konvergieren; außerdem werden sich bei größeren Zwischenzeiten auch die Störungen der Bahnbewegung durch die großen Planeten (bei Planetoiden insbesondere die des Jupiter) unliebsam bemerkbar machen. Sind dagegen die Zwischenzeiten sehr klein, so werden die den Ausgangsdaten anhaftenden zufälligen Beobachtungsfehler mit allzu großem Gewicht in die Rechnung eingehen und das Ergebnis in unkontrollierbarer Weise fälschen.

Wir werden im folgenden die wichtigsten Verfahren der Bahnbestimmung behandeln, ohne auf Feinheiten einzugehen, die nur den praktischen Rechner interessieren, und ohne explizite Rechenvorschriften bis ins Einzelne anzugeben, die der Leser in speziellen Lehrbüchern der Bahnbestimmung[1]) und in Originalabhandlungen finden wird. Uns kommt es mehr darauf an, die geistige Struktur der verschiedenen Methoden bloßzulegen und sichtbar werden zu lassen. Wir beginnen dabei mit den auf LAGRANGE und LAPLACE zurückgehenden Methoden, die sich durch mathematische Eleganz und Klarheit der Gedankenführung besonders auszeichnen und die wir hier der Kürze halber als die Methoden nach dem *LAPLACEschen Prinzip* bezeichnen wollen. Erst im Kapitel IX werden wir uns den Methoden zuwenden, die auf dem *GAUSSschen Prinzip* beruhen. Sie stehen in dem Ruf größerer Undurchsichtigkeit; es läßt sich aber zeigen, daß die Kompliziertheit der Rechenvorschriften hauptsächlich darauf beruht, daß sie in ihrer ursprünglichen Form ganz auf logarithmisch-trigonometrisches Rechnen zugeschnitten waren.

Außer dem allgemeinen Fall der Bahnbestimmung werden die Spezialfälle der Kreis- und Parabelbewegung behandelt werden. Da eine Kreisbahn durch vier Elemente bestimmt ist, sind zu ihrer Berechnung nur zwei vollständige sphärische Örter nötig. Eine Parabelbahn erfordert fünf unabhängige Daten zur Bestimmung ihrer fünf Elemente. Es sind also zur Berechnung einer parabolischen Bahn drei Beobachtungen notwendig, doch ist dann eine der sechs sphärischen Koordinaten überzählig. Man kann also etwa eine Koordinate der mittleren Beobachtung beiseite lassen und nach Abschluß der Bahnrechnung als Kontrollwert benutzen. Oder man verwendet, wie es OLBERS getan hat, von der mittleren Beobachtung nur eine Funktion der beiden Koordinaten und benutzt die Koordinaten selbst zur Kontrolle der Rechnung oder als Test für die Richtigkeit der Annahme, daß der betreffende Himmelskörper sich wirklich auf einer Parabel bewegt.

66. *Reduktion der Beobachtungen*

Die sphärischen Koordinaten eines Planetoiden oder Kometen werden meist durch direkten Anschluß an benachbarte Fixsterne gewonnen, sei es durch

---

[1]) Z. B. G. STRACKE: Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. Berlin 1929.

mikrometrische Messung am Fernrohr oder (heute fast ausschließlich) durch Ausmessung photographischer Himmelsaufnahmen. Sie liegen also meist in Form von Rektazension und Deklination vor und beziehen sich auf eine bestimmte Lage des Himmelsäquators und des Frühlingspunktes, und zwar entweder auf das für den jeweiligen Beobachtungszeitpunkt gültige Koordinatensystem (scheinbare Örter) oder auf die mittlere (von Aberration und Nutation freie) Lage der Koordinatenebenen zu Beginn des Beobachtungsjahres (mittlere Örter für den Jahresanfang, z.B. 1959.0) oder auf ein mittleres Normaläquinoktium (1925.0, 1950.0, 1975.0 usw.). Ferner wird die Zeit der Beobachtung angegeben, und zwar entweder als mittlere Ortszeit, als Zonenzeit (z.B. Mitteleuropäische Zeit) oder als Weltzeit (Universal Time = U.T.), d.h. als mittlere Zeit des Meridians von Greenwich. Der Bahnrechner hat darauf zu achten, daß sich sowohl die Zeitangaben auf das gleiche Zeitsystem als auch die sphärischen Örter auf das gleiche Koordinatensystem beziehen. Ist dies nicht der Fall, so muß vor Beginn der Bahnrechnung eine Reduktion der Angaben vorgenommen werden. Sind scheinbare Örter gegeben, so werden diese durch Berücksichtigung von Präzession, Nutation und Aberration auf das mittlere Äquinoktium des Jahresanfangs zu reduzieren sein; sind bereits mittlere Örter gegeben, beziehen sich diese aber (wie es oft vorkommt, wenn die Beobachtungen sich über eine Jahreswende erstrecken) auf verschiedene Jahresanfänge, so wird man einen Teil der Daten durch Berücksichtigung der Präzession auf das mittlere Äquinoktium der übrigen bringen müssen. Die für diese Reduktionsarbeit nötigen Formeln werden in der Sphärischen Astronomie entwickelt; ihre Ableitung und Zusammenstellung findet man in den Lehrbüchern dieser Disziplin und in allen Spezialwerken über Bahnbestimmung.

Es gibt aber noch zwei weitere Umstände, die berücksichtigt werden müssen, wenn man die beobachteten sphärischen Örter für eine Bahnbestimmung benutzen will: Die vom Beobachter gelieferten Daten enthalten noch die *tägliche Parallaxe* und die *Lichtzeit*. Die Bewegung der Erde um die Sonne (die man braucht, um geozentrische in heliozentrische Koordinaten zu verwandeln) wird als bekannt vorausgesetzt. Die dazu nötigen Unterlagen sind in den astronomischen Jahrbüchern in Form von geozentrischen Koordinaten der Sonne enthalten, die täglich für 0^h Weltzeit gegeben werden, und zwar sowohl als rechtwinklige Äquatorkoordinaten (X, Y, Z) als auch in Form von ekliptikalen Polarkoordinaten (R, L, B), wobei die Breite B sehr klein ist. Zwischen den rechtwinkligen geozentrischen Koordinaten (ξ, η, ζ) des beobachteten Himmelskörpers, seinen heliozentrischen Koordinaten (x, y, z) und den geozentrischen Koordinaten der Sonne bestehen die Gleichungen (IV; 3)

$$\text{(VIII; 2)} \qquad \xi = x + X, \quad \eta = y + Y, \quad \zeta = z + Z.$$

Andererseits ist in Polarkoordinaten

$$\text{(VIII; 3)} \qquad \xi = \varrho \cos\delta \cos\alpha, \quad \eta = \varrho \cos\delta \sin\alpha, \quad \zeta = \varrho \sin\delta.$$

Der geozentrische Abstand ϱ des Himmelskörpers ist a priori unbekannt; die beobachteten Richtungskoordinaten α, δ sind aber topozentrische, d.h. vom

Beobachtungsort aus gesehene und müssen daher, damit die Beziehungen (VIII; 2) erfüllt sind, auf den Erdmittelpunkt reduziert, d.h. wegen der täglichen Parallaxe verbessert werden. Die Berechnung dieser Korrektion erfordert aber die Kenntnis der Entfernung ϱ, die erst im Laufe der Bahnrechnung mit hinreichender Sicherheit erlangt wird. Das gleiche gilt auch für die „Lichtzeit" oder „Planetenaberration". Da das Licht eine endliche Geschwindigkeit c hat, erblickt der Beobachter das Objekt im Beobachtungszeitpunkt t dort, wo es zu einer etwas früheren Zeit $t - \Delta t$ gestanden hat. Die Lichtzeit $\Delta t = \frac{1}{c}\,\varrho$ ist aber ebenfalls von der noch unbekannten Entfernung ϱ abhängig.

Beide Einflüsse können die Beobachtungsdaten merklich verfälschen, doch ist der Einfluß der Lichtzeit (Aberrationszeit) aus folgendem Grund weniger störend: Während des verhältnismäßig kurzen Zeitintervalls, das die für die Bahnbestimmung benutzten Beobachtungen überdecken, ändert sich der Abstand des Himmelskörpers verhältnismäßig wenig. Man kann also die Abstände ϱ_i in der Form $\varrho_0 + \Delta\varrho_i$ schreiben, wo die $\Delta\varrho_i$ kleine, teils positive, teils negative Korrektionen des mittleren Abstandes ϱ_0 bedeuten. Während nun ϱ_0 in der Formel für die Lichtzeit lediglich eine konstante Verschiebung der Zeitskala zur Folge hat, also keine wesentliche Verzerrung der Bahnverhältnisse bewirken kann, wird nur der von den Zusatzgrößen $\Delta\varrho_i$ herrührende Lichtzeiteffekt die Daten wesentlich beeinflussen. Nun ist aber auch der Faktor $\frac{1}{c}$ sehr klein (wenn man die Längen in astronomischen Einheiten, die Zeiten in mittleren Tagen mißt, ist $\frac{1}{c} = 0.00577$, d.h., die Aberrationszeit beträgt rund 8 Minuten für einen Abstand von 1 A.E.), so daß man die sehr kleinen Effekte $\Delta\varrho_i/c$ zu Beginn der Hypothesenrechnung unbedenklich vernachlässigen kann, um sie schließlich bei der letzten Iteration, wenn die ϱ_i bereits genügend genau vorliegen, zu berücksichtigen.

Die Wirkung der täglichen Parallaxe ist hingegen in den meisten Fällen schon von Beginn der Rechnung an ernst zu nehmen. Nur bei der Bestimmung von Kometenbahnen pflegt man sie – wenigstens bei ersten Bahnbestimmungen nach der Entdeckung – ganz zu vernachlässigen, da der sphärische Ort eines so diffusen Himmelskörpers weit unsicherer bestimmbar ist als der eines punktförmig definierten Planetoiden. Während bei den letzteren parallaktische Differenzen von 10″ und darüber die Beobachtungsgenauigkeit um eine volle Größenordnung übertreffen, werden Vernachlässigungen von diesem Betrage bei Kometen meist noch innerhalb des Bereiches der Beobachtungsunsicherheit bleiben, so daß sich der Versuch, die Wirkung der täglichen Parallaxe unschädlich zu machen, kaum lohnt.

Man hat das Problem der Ausschaltung des parallaktischen Fehlers auf mehrere Arten zu lösen versucht. Die älteste dieser Methoden ist die *„Reduktion auf den locus fictus"*, ein etwas umständliches Verfahren, das heute kaum noch angewandt wird. Es hatte seine Bedeutung, als man – wie schon OLBERS und GAUSS in ihren klassischen Arbeiten – bei der Bahnbestimmung mit ekliptikalen Koordinaten zu rechnen gewohnt war. Der Vorteil dieses Verfahrens be-

steht darin, daß die ekliptikale Breite der Sonne sehr klein ist, was eine nicht unbedeutende Vereinfachung der Rechenvorschriften bewirkt. Dafür besteht allerdings der Nachteil, daß die im Äquatorsystem gegebenen Beobachtungsdaten (α_i, δ_i) auf das Ekliptiksystem transformiert werden müssen, eine Mehrarbeit, die nur teilweise dadurch gerechtfertigt erscheint, daß man die vom Koordinatensystem abhängigen Bahnelemente (Neigung, Knotenlänge, Perihelabstand vom Knoten) nach Beendigung der Bahnbestimmung direkt im Ekliptiksystem erhält, das für Größen dieser Art als Bezugssystem bevorzugt wird. Die Reduktion auf den locus fictus besteht nun darin, daß man (Abb. 53) die Verbindungslinie des Beobachtungsorts (B) mit dem Planeten (P) zum Schnitt mit der Ekliptikebene bringt. Der Schnittpunkt F (locus fictus) wird dann für die Dauer der Rechnung anstatt des Beobachtungsortes benutzt. Er hat folgende bemerkenswerte Eigenschaften: 1. ist für ihn die Breite der Sonne streng gleich null; diese Größe verschwindet also völlig aus den Formeln, die dadurch wesentlich einfacher werden; 2. sind für ihn die ekliptikalen Richtungskoordinaten (λ_i, β_i) des Planeten die gleichen wie für B; durch Einführung der loci ficti wird also eine Berücksichtigung der täglichen Parallaxe überflüssig. Es ändern sich nur die Koordinaten (R, L) der Sonne, die in den Jahrbüchern für den Erdmittelpunkt gegeben sind und von diesem auf den locus fictus transformiert werden müssen, schließlich auch die Entfernung $BP = \varrho$, die um die berechenbare Strecke FB zu korrigieren ist.

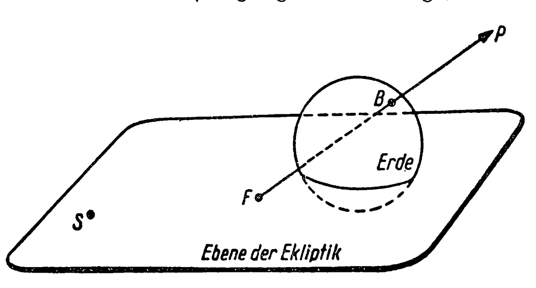


Abb. 53. Reduktion auf den locus fictus.

Ein Nachteil dieser Methode ist, daß F unter Umständen sehr weit von B entfernt liegen kann, wenn die ekliptikale Breite von P klein ist, und daß die Lage von F überhaupt unbestimmbar wird, wenn P sich in der Ekliptik selbst befindet. Heute, wo das Rechnen mit Maschinen das mit Logarithmen immer mehr verdrängt, zieht man es im allgemeinen vor, die im Äquatorsystem beobachteten topozentrischen Planetenörter unverändert zu benutzen. Man umgeht dann die Reduktion dieser Örter wegen der täglichen Parallaxe, indem man die in den Jahrbüchern gegebenen rechtwinkligen geozentrischen äquatorealen Sonnenkoordinaten (X_0, Y_0, Z_0) auf topozentrische (X, Y, Z) transformiert. Es ist dann

$$\text{(VIII; 4)} \qquad X = X_0 + \Delta X, \quad Y = Y_0 + \Delta Y, \quad Z = Z_0 + \Delta Z,$$

wo $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ Korrektionen der rechtwinkligen Sonnenkoordinaten im Sinne „topozentrische minus geozentrische Koordinaten“ darstellen. Sie sind also den im Abschn. 30 (IV; 5) definierten Größen $\Delta\bar{\xi}, \Delta\bar{\eta}, \Delta\bar{\zeta}$ entgegengesetzt

gleich, und es ist

$$\Delta X = -\Delta \cos\varphi' \cos\Theta = -C \cos\Theta,$$

(VIII; 5) $$\Delta Y = -\Delta \cos\varphi' \sin\Theta = -C \sin\Theta,$$

$$\Delta Z = -\Delta \sin\varphi' = -S,$$

wo C und S nur von der geographischen Lage des Beobachtungsortes abhängen und (siehe Anhang A I) als Funktionen der geographischen Breite tabuliert oder auch in einer Liste für alle Sternwarten, an denen Beobachtungen von Planeten und Kometen gemacht werden, zusammengestellt werden können.

Korrigiert man vor Beginn der eigentlichen Bahnrechnung die Sonnenkoordinaten auf diese einfache Weise, so gelten die Gleichungen (VIII; 2) streng für den Beobachtungsort, der dann in der Rechnung als „Erdort“ bezeichnet wird.

67. *Bahnbestimmung nach dem LAPLACEschen Prinzip*

LAGRANGE und LAPLACE erreichten auf verschiedenen Wegen das Ziel, aus einer Reihe beobachteter sphärischer Örter die Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten des Himmelskörpers für einen bestimmten Zeitpunkt abzuleiten und damit die Aufgabe der Bestimmung der Bahnelemente auf das in Abschn. 39 gelöste Anfangswertproblem zurückzuführen. LAPLACE hat seine Methode im Band I seines „Traité de mécanique céleste“ (2. Buch, 4. Kapitel) beschrieben. Erst ein Jahrhundert später hat P. HARZER[1]) dieser Methode eine neue Form gegeben, in der gewisse theoretische und praktische Mängel vermieden wurden, die ihr in der ursprünglichen Gestalt anhafteten, und die offenbar schuld daran gewesen sind, daß diese an sich elegante, geistreiche und durchsichtige Methode im Schatten der von OLBERS und GAUSS entwickelten Verfahren fast in Vergessenheit geraten war. Da die HARZERsche Fassung der LAPLACEschen Methode auch für neuere Lösungen der Bahnbestimmungsaufgabe nach dem Anfangswertprinzip richtungweisend gewesen ist, soll sie hier beschrieben werden, obwohl sie in die Praxis kaum Eingang gefunden hat.

Um eine angenäherte Lösung zu erzielen, die als Ausgangspunkt für ein Iterationsverfahren geeignet ist, machen wir folgende Voraussetzungen, die in Wirklichkeit nur mehr oder weniger unvollkommen erfüllbar sind und über deren Berechtigung weiter unten (Abschn. 71) noch einiges zu sagen sein wird:

1. Es wird angenommen, daß es gelungen sei, für einen bestimmten, möglichst in der Mitte des durch Beobachtungen von Rektaszension (α) und Deklination (δ) des Himmelskörpers belegten Zeitintervalls liegenden, Zeitpunkt $t = t_0$ den Wert von α und $\gamma = \operatorname{tg}\delta$ nebst den beiden ersten Ableitungen dieser Größen nach der Zeit durch Interpolation zu ermitteln.

---

[1]) Astron. Nachr. *141*, 177 (1896).

2. Es wird angenommen, daß die beobachteten sphärischen Koordinaten α_i, δ_i sich auf den Schwerpunkt Erde–Mond (das Baryzentrum des Systems Erde–Mond, das sich stets im Innern des Erdkörpers befindet) beziehen und daß dieser Punkt sich störungsfrei in einer KEPLERschen Bahn bewege, ebenso wie der beobachtete Himmelskörper selbst. Die beobachteten Koordinaten werden also, unter vorläufiger Vernachlässigung von Parallaxe und Lichtzeit, als baryzentrische angesehen.

Sind nun x, y, z die rechtwinkligen heliozentrischen Koordinaten des Planeten, X, Y, Z die baryzentrischen Koordinaten der Sonne im Äquatorsystem, und ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ der Radiusvektor des Himmelskörpers, $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ der Abstand des Baryzentrums von der Sonne, so gelten, wenn man als Zeiteinheit $\frac{1}{k}$ mittlere Sonnentage wählt und die Massen des Himmelskörpers und des Systems Erde–Mond gegen die Masseneinheit (Sonne) vernachlässigt, die Gleichungen

$$\ddot{x} + \frac{x}{r^3} = 0; \quad \ddot{X} + \frac{X}{R^3} = 0$$

und entsprechende Beziehungen für die übrigen Koordinaten. Andererseits folgt, wenn ξ, η, ζ die baryzentrischen Koordinaten des Himmelskörpers sind, aus (VIII; 2)

$$\ddot{\xi} = \ddot{x} + \ddot{X} = -\left(\frac{x}{r^3} + \frac{X}{R^3}\right) \tag{VIII; 6}$$

oder, wenn man $x = \xi - X$ setzt,

$$\ddot{\xi} + \frac{\xi}{r^3} = \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)X, \tag{VIII; 7}$$

und es gelten entsprechende Beziehungen für η und ζ.

Seien nun im System des Äquators ϱ, α, δ und R, A, D die baryzentrischen Polarkoordinaten des Himmelskörpers und der Sonne, so ist, wenn

$$\sigma = \varrho \cos\delta, \quad S = R\cos D, \quad \gamma = \operatorname{tg}\delta$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma\cos\alpha, & \eta &= \sigma\sin\alpha, & \zeta &= \sigma\gamma, \\ X &= S\cos A, & Y &= S\sin A, & Z &= S\operatorname{tg} D, \end{aligned} \tag{VIII; 8}$$

und die Gleichungen (VIII; 7) nehmen die Gestalt

$$\ddot{\sigma}\cos\alpha - 2\dot{\sigma}\dot{\alpha}\sin\alpha - \sigma\left(\dot{\alpha}^2\cos\alpha + \ddot{\alpha}\sin\alpha - \frac{\cos\alpha}{r^3}\right) = S\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)\cos A,$$

$$\ddot{\sigma}\sin\alpha + 2\dot{\sigma}\dot{\alpha}\cos\alpha - \sigma\left(\dot{\alpha}^2\sin\alpha - \ddot{\alpha}\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{r^3}\right) = S\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)\sin A,$$

$$\ddot{\sigma}\gamma + 2\dot{\sigma}\dot{\gamma} + \sigma\left(\ddot{\gamma} + \frac{\gamma}{r^3}\right) = S\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)\operatorname{tg} D$$

an. Multipliziert man die ersten beiden dieser Gleichungen mit den Faktoren $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ bzw. $-\sin\alpha$, $\cos\alpha$, addiert sie und schreibt die dritte Gleichung unverändert wieder dazu, so entsteht das System

$$\text{(VIII; 9)}\qquad \begin{array}{rl|c|c} & & \text{(I)} & \text{(II)} \\ \ddot\sigma - \sigma\left(\dot\alpha^2 - \frac{1}{r^3}\right) = S\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)\cos(A-\alpha) & & -\gamma\dot\alpha & \gamma\ddot\alpha \\ 2\dot\sigma\dot\alpha + \sigma\ddot\alpha = S\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)\sin(A-\alpha) & & -\dot\gamma & \dot\alpha^2\gamma + \ddot\gamma \\ \ddot\sigma\gamma + 2\dot\sigma\dot\gamma + \sigma\left(\ddot\gamma + \frac{\gamma}{r^3}\right) = S\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)\operatorname{tg} D & & \dot\alpha & -\ddot\alpha, \end{array}$$

aus dem man durch Multiplikation mit den Faktoren (I) bzw. (II) und Addition σ und $\dot\sigma$ ableitet, und zwar ist

$$\text{(VIII; 10)}\qquad \sigma = \varkappa\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right); \quad \dot\sigma = \lambda\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) = \sigma\cdot\frac{\lambda}{\varkappa},$$

wo

$$\text{(VIII; 11)}\qquad \begin{cases} \varkappa = -S\,\dfrac{\dot\alpha[\gamma\cos(A-\alpha) - \operatorname{tg} D] + \dot\gamma\sin(A-\alpha)}{\dot\alpha^3\gamma - \ddot\alpha\dot\gamma + \dot\alpha\ddot\gamma}, \\[2ex] \lambda = S\,\dfrac{\ddot\alpha[\gamma\cos(A-\alpha) - \operatorname{tg} D] + (\dot\alpha^2\gamma + \ddot\gamma)\sin(A-\alpha)}{\dot\alpha^3\gamma - \ddot\alpha\dot\gamma + \dot\alpha\ddot\gamma} \end{cases}$$

zwei aus gegebenen Größen berechenbare Ausdrücke darstellen. Die dritte Unbekannte, $\ddot\sigma$, kann dann aus der ersten oder dritten Gleichung (VIII; 9) ebenfalls berechnet werden, wird aber in der weiteren Analyse nicht unbedingt gebraucht.

Die Gleichungen (VIII; 10) enthalten nun den noch unbekannten Abstand r des Himmelskörpers von der Sonne. Für ihn gilt aber die geometrische Beziehung

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 = \\ &= (\sigma\cos\alpha - S\cos A)^2 + (\sigma\sin\alpha - S\sin A)^2 + (\sigma\operatorname{tg}\delta - S\operatorname{tg} D)^2 \\ &= \sigma^2(1 + \operatorname{tg}^2\delta) - 2\sigma S[\cos(A-\alpha) + \operatorname{tg}\delta\operatorname{tg} D] + S^2(1 + \operatorname{tg}^2 D) \end{aligned}$$

oder

$$\text{(VIII; 12)}\qquad r^2 = \left(\frac{\sigma}{\cos\delta}\right)^2 - 2\sigma S[\cos(A-\alpha) + \operatorname{tg}\delta\operatorname{tg} D] + \left(\frac{S}{\cos D}\right)^2,$$

während aus (VIII; 10) und $R = \dfrac{S}{\cos D}$

$$\text{(VIII; 13)}\qquad \frac{1}{r^3} = \frac{\sigma}{\varkappa} + \left(\frac{\cos D}{S}\right)^3$$

folgt. Multipliziert man nun die dritte Potenz von (VIII; 12) mit dem Quadrat von (VIII; 13), so erhält man in

$$\text{(VIII; 14)} \qquad 1 = \left[\left(\frac{\sigma}{\cos\delta}\right)^2 - 2\sigma S\{\cos(A-\alpha) + \operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}D\} + \left(\frac{S}{\cos D}\right)^2\right]^3 \times$$
$$\times \left[\frac{\sigma}{\varkappa} + \left(\frac{\cos D}{S}\right)^3\right]^2$$

eine algebraische Gleichung zur Bestimmung von σ. Diese Gleichung ist vom achten Grade; da aber die von σ freien Glieder sich aufheben, ist $\sigma = 0$ eine Lösung, und der Grad der Gleichung reduziert sich also auf den siebenten. Die triviale Lösung $\sigma = 0$ entspricht $\varrho = 0$, d.h. dem Baryzentrum selbst, das natürlich die Gleichungen (VIII; 7) befriedigt, denn für diesen Punkt ist ja $\xi = \eta = \zeta = 0$ und $r = R$.

Liegt σ vor[1]) [über die Möglichkeit mehrfacher Lösungen von (VIII; 14) und damit des Bahnbestimmungsproblems wird im nächsten Abschnitt alles Nötige gesagt werden], so findet man $\dot\sigma$ nach (VIII; 10). Man bestimmt dann ξ, η, ζ nach (VIII; 8) und berechnet

$$\dot\xi = \dot\sigma\cos\alpha - \sigma\dot\alpha\sin\alpha,$$
$$\dot\eta = \dot\sigma\sin\alpha + \sigma\dot\alpha\cos\alpha,$$
$$\dot\zeta = \dot\sigma\gamma + \sigma\dot\gamma.$$

Die heliozentrischen Ortskoordinaten ergeben sich dann nach (VIII; 2) und die Geschwindigkeitskoordinaten nach

$$\dot x = \dot\xi - \dot X, \quad \dot y = \dot\eta - \dot Y, \quad \dot z = \dot\zeta - \dot Z,$$

wobei $\dot X$, $\dot Y$, $\dot Z$ aus dem Jahrbuch durch Interpolation entnommen werden.

Die Gleichung (VIII; 14), die in dieser oder ähnlicher Form als „Schlüsselgleichung" des Problems in jeder Bahnbestimmungsmethode erscheint, ist streng erfüllt, wenn man die oben aufgeführten Voraussetzungen gelten läßt. In Wirklichkeit wird man die ersten und zweiten Ableitungen der sphärischen Koordinaten nur mit mehr oder weniger guter Annäherung kennen (siehe Abschn. 71), und man wird außerdem anstatt der baryzentrischen Koordinaten die topozentrischen verwenden, woraus folgt, daß die Differentialgleichungen (VIII; 7) nicht ganz streng erfüllt sind. Aus diesen Gründen werden die nach dem oben beschriebenen Verfahren gewonnenen Anfangswerte x_0, y_0, z_0; $\dot x_0$, $\dot y_0$, $\dot z_0$ eine Bahn definieren, die nur als Annäherung an die wahre anzusehen ist.

Man kann nun aber mit diesen für den Zeitpunkt $t = t_0$ gültigen provisorischen Anfangswerten nach den im Kapitel V beschriebenen Verfahren oder, was bei kleinen Zwischenzeiten vorzuziehen ist, durch die in Abschn. 56 ge-

[1]) $\sigma = \varrho\cos\delta$ (oder bei Verwendung ekliptikaler Koordinaten $\sigma = \varrho\cos\beta$) ist die Projektion der Distanz ϱ auf die Hauptkoordinatenebene. Man bezeichnet σ daher auch als „kurtierte (verkürzte) Distanz".

gebenen Reihenentwicklungen für alle vorliegenden Beobachtungszeiten $t_1 \ldots t_n$ die zugehörigen Koordinaten x_ν, y_ν, z_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ berechnen, wobei $\tau_\nu = k(t_\nu - t_0)$ als Zwischenzeiten dienen. Mit diesen Werten sind aber auch

$$\text{(VIII; 15)} \qquad \begin{aligned} \xi_\nu &= x_\nu + X_\nu = \varrho_\nu \cos\delta_\nu \cos\alpha_\nu, \\ \eta_\nu &= y_\nu + Y_\nu = \varrho_\nu \cos\delta_\nu \sin\alpha_\nu, \\ \zeta_\nu &= z_\nu + Z_\nu = \varrho_\nu \sin\delta_\nu \end{aligned}$$

bekannt; die Sonnenkoordinaten sind dabei die nach (VIII; 5) wegen Parallaxe verbesserten Jahrbuchwerte. Aus (VIII; 15) bestimmt man provisorische Werte von ϱ_ν, α_ν, δ_ν. Die ϱ_ν werden im allgemeinen schon auf Grund dieser ersten Näherung genau genug für die Ermittlung der Lichtzeit sein, die α_ν, δ_ν werden aber mit den beobachteten sphärischen Koordinaten nicht übereinstimmen, sondern gewisse Abweichungen $\Delta\alpha_\nu$, $\Delta\delta_\nu$ (im Sinne Beobachtung minus Rechnung) übriglassen. Diese können dann, etwa nach dem nachstehend skizzierten Verfahren, zur Verbesserung der Anfangswerte x_0, y_0, z_0; $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ dienen.

Variiert man die Gleichungen (VIII; 15), so erhält man, da die Sonnenkoordinaten keiner Verbesserung mehr bedürfen, die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta x_\nu &= \Delta\varrho_\nu \cos\delta_\nu \cos\alpha_\nu - \varrho_\nu \Delta\delta_\nu \sin\delta_\nu \cos\alpha_\nu - \varrho_\nu \Delta\alpha_\nu \cos\delta_\nu \sin\alpha_\nu, \\ \Delta y_\nu &= \Delta\varrho_\nu \cos\delta_\nu \sin\alpha_\nu - \varrho_\nu \Delta\delta_\nu \sin\delta_\nu \sin\alpha_\nu + \varrho_\nu \Delta\alpha_\nu \cos\delta_\nu \cos\alpha_\nu, \\ \Delta z_\nu &= \Delta\varrho_\nu \sin\delta_\nu \qquad\qquad\quad + \varrho_\nu \Delta\delta_\nu \cos\delta_\nu, \end{aligned}$$

die streng gültig sind, sofern man Quadrate der Variationen $\Delta\varrho_\nu$ usw. vernachlässigen darf. Aus ihnen leitet man

$$\text{(VIII; 16)} \qquad \begin{aligned} \varrho_\nu \Delta\alpha_\nu \cos\delta_\nu &= -\Delta x_\nu \sin\alpha_\nu + \Delta y_\nu \cos\alpha_\nu, \\ \varrho_\nu \Delta\delta_\nu &= -\Delta x_\nu \sin\delta_\nu \cos\alpha_\nu - \Delta y_\nu \sin\delta_\nu \sin\alpha_\nu + \Delta z_\nu \cos\delta_\nu \end{aligned}$$

und die zu Kontrollzwecken und zur Verbesserung der Lichtzeit nützliche Gleichung

$$\Delta\varrho_\nu = \Delta x_\nu \cos\delta_\nu \cos\alpha_\nu + \Delta y_\nu \cos\delta_\nu \sin\alpha_\nu + \Delta z_\nu \sin\delta_\nu$$

ab. Andererseits bestehen aber zwischen den x_ν, y_ν, z_ν und den provisorischen Anfangswerten x_0, y_0, z_0; $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ die Beziehungen

$$\text{(VIII; 17)} \qquad x_\nu = F_\nu x_0 + G_\nu \dot{x}_0; \quad y_\nu = F_\nu y_0 + G_\nu \dot{y}_0; \quad z_\nu = F_\nu z_0 + G_\nu \dot{z}_0,$$

wobei F_ν, G_ν die bekannten Funktionen (V; 70) der Zwischenzeiten τ_ν und der aus den Anfangswerten zu bildenden lokalen Invarianten sind. Es gilt demnach

$$\text{(VIII; 18)} \qquad \Delta x_\nu = F_\nu \Delta x_0 + G_\nu \Delta\dot{x}_0 + x_0 \Delta F_\nu + \dot{x}_0 \Delta G_\nu \quad \text{usw.},$$

und es ist nun auch ohne Schwierigkeit möglich, die Variationen ΔF_ν, ΔG_ν, bei konstant gehaltenem τ_ν, in der Form

$$\Delta F_\nu = \frac{\partial F_\nu}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial F_\nu}{\partial y_0} \Delta y_0 + \cdots + \frac{\partial F_\nu}{\partial \dot{z}_0} \Delta \dot{z}_0 \tag{VIII; 19}$$

als lineare Funktionen von $\Delta x_0, \Delta y_0, \ldots \Delta \dot{z}_0$ zu schreiben. Man erhält somit Gleichungen von der Form

$$\Delta x_\nu = a_\nu \Delta x_0 + b_\nu \Delta y_0 + c_\nu \Delta z_0 + u_\nu \Delta \dot{x}_0 + v_\nu \Delta \dot{y}_0 + w_\nu \Delta \dot{z}_0$$

und durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (VIII; 16) ein System linearer Gleichungen, aus denen man (wenn $n > 3$, durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate) aus den Abweichungen $\Delta\alpha_\nu$, $\Delta\delta_\nu$ die Verbesserungen $\Delta x_0, \ldots \Delta \dot{z}_0$ bestimmen kann. Mit den verbesserten Anfangswerten wird dann die Rechnung wiederholt und so lange fortgesetzt, bis die Restfehler verschwinden oder (bei mehr als drei Beobachtungen) klein von der Ordnung der Beobachtungsfehler sind und keinen systematischen Gang mehr zeigen. Die endgültigen Werte der Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten für die Epoche t_0 bilden dann die Grundlage für die Berechnung der Kegelschnittelemente nach Abschn. 39.

68. *Die LAGRANGEsche Schlüsselgleichung. Mehrfache Lösungen. Die CHARLIERschen Bereiche*

Im vorigen Abschnitt ist die von HARZER auf eine praktisch verwendbare Form gebrachte LAPLACEsche Methode nur in großen Zügen dargestellt worden, um – unter Beiseitestellung aller nur für die rechnerische Durchführung wichtigen Feinheiten – um so deutlicher die Idee dieses Verfahrens hervortreten zu lassen, die auch in allen späteren Varianten der Methode in mehr oder weniger abgewandelter Form sichtbar wird. Es wird nun unsere Aufgabe sein, auf einzelne Punkte hinzuweisen, die zu besonderen Untersuchungen anregen. Einer dieser Punkte betrifft die algebraische Gleichung (VIII; 14), die Methoden ihrer Lösung und vor allem die Schwierigkeiten beim Auftreten mehrfacher Lösungen.

Es wurde schon erwähnt, daß eine solche algebraische Gleichung achten Grades, wie sie zuerst von LAGRANGE aufgestellt wurde, in allen Bahnbestimmungsmethoden, gleich welcher Art, auftritt. Diese Gleichung bildet gewissermaßen den Kern des Problems: Ihre Auflösung vermittelt den Zugang zur Lösung der eigentlichen Aufgabe. Man kann sie daher mit einiger Berechtigung als die *Schlüsselgleichung der Bahnbestimmung* bezeichnen. Ihre Form wird in allen Varianten der Bahnbestimmungsmethoden nach dem LAPLACEschen wie nach dem GAUSSschen Prinzip die gleiche sein; verschieden sind nur die Wege, auf denen man zu ihr gelangt, und verschieden ist auch vielfach die geometrische Bedeutung der Unbekannten, die aus ihr zu bestimmen ist.

HARZER löst die Gleichung (VIII; 14) durch Versuche auf, ein Verfahren, das mit erheblicher Rechenarbeit verbunden ist, wenn man nicht von vorn-

herein über einen guten Näherungswert für die „kurtierte Distanz" σ verfügt. TH. v. OPPOLZER hat in seinem „Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten" ein Verfahren zur raschen Auflösung der Schlüsselgleichung angegeben und im Anhang jenes Lehrbuchs (Tafel XIII a) eine Hilfstafel veröffentlicht, aus der man dreistellige Näherungswerte für die Lösung der Gleichung entnehmen kann. Die Anwendung dieses im Zusammenhang mit der GAUSSschen Methode der Bahnbestimmung entwickelten Verfahrens auf die Gleichung (VIII; 14) ist, wie R. SPRAGUE[1]) gezeigt hat, recht einfach.

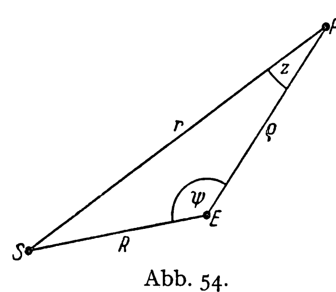


Abb. 54.
Dreieck Sonne–Erde–Planet.

Bezeichnet man (Abb. 54) mit ψ den geozentrischen (topozentrischen) Winkel zwischen den Richtungen zur Sonne S und zum Planeten P, so kann man (VIII; 12) nach dem ebenen Cosinussatz in der Form

$$r^2 = \varrho^2 - 2\varrho R \cos\psi + R^2$$

schreiben, wo

$$\varrho = \frac{\sigma}{\cos\delta}, \quad R = \frac{S}{\cos D},$$

$$\varrho R \cos\psi = \xi X + \eta Y + \zeta Z = \sigma S\,[\cos(A - \alpha) + \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} D]$$

ist. Setzt man nun $\frac{\varrho}{R} = \zeta$, so ist

(VIII; 20) $$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = 1 - 2\zeta\cos\psi + \zeta^2.$$

Andererseits ist nach (VIII; 10)

$$\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3}\left[1 - \left(\frac{R}{r}\right)^3\right] = -\frac{\varrho\cos\delta}{\varkappa} = -R\zeta\frac{\cos\delta}{\varkappa},$$

also, wenn man

(VIII; 21) $$m = -\frac{\varkappa}{R^4\cos\delta}$$

einführt,

$$\zeta = m\left[1 - \left(\frac{R}{r}\right)^3\right]$$

oder

(VIII; 22) $$m - \zeta = m\,(1 - 2\zeta\cos\psi + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Eine Lösung dieser Gleichung, $\zeta = \zeta(m, \psi)$, entnimmt man mit den Argumen-

[1]) Astron. Nachr. *153*, 385 (1900).

ten ψ und $\frac{1}{m}$ der obengenannten Tafel, die hier im Anhang A IX wiedergegeben ist. Man kann ohne Schwierigkeit aus dieser Tafel dreistellige ζ-Werte interpolieren, mit Ausnahme der Umgebung der Stelle $\zeta = 1$, $\psi = 0$, für die $\frac{1}{m}$ unendlich groß wird. Dieser Fall ist aber praktisch bedeutungslos, da für ihn der Ort des Himmelskörpers mit dem Ort der Sonne zusammenfällt. In der Tat wird, wenn man in (VIII; 11) $\alpha = A$, $\delta = D$ setzt, $\varkappa = 0$ und daher nach (VIII; 21) auch $m = 0$. Mit dem dreistelligen Näherungswert für ζ findet man die strenge Lösung der Gleichung in einem oder zwei Schritten nach der regula falsi.

v. OPPOLZER hat auch Untersuchungen über die Anzahl der reellen positiven Wurzeln der Gleichung (VIII; 22) durchgeführt – nur diese Wurzeln sind ja interessant, da ζ als Verhältnis zweier Strecken eine reelle und wesentlich positive Größe darstellt, wenn man die triviale Lösung $\zeta = 0$ ausscheidet. Die Diskussion der Gleichung siebenten Grades, die nach Eliminierung der „Erdbahnwurzel" $\zeta = 0$ übrigbleibt, ist aber etwas schwierig, was schon daraus hervorgeht, daß ihre Koeffizienten im allgemeinen sämtlich von null verschieden sind. Viel einfacher ist es, wenn man anstatt ζ das Verhältnis

$$\lambda = \frac{r}{R}$$

als Unbekannte einführt. Dann ist nämlich nach (VIII; 20)

$$\text{(VIII; 23)} \qquad \lambda^2 = 1 - 2\zeta \cos\psi + \zeta^2, \quad \text{also} \quad \zeta = \cos\psi \pm \sqrt{\lambda^2 - \sin^2\psi},$$

und man erhält aus (VIII; 22)

$$m - \cos\psi \mp \sqrt{\lambda^2 - \sin^2\psi} = \frac{m}{\lambda^3}$$

oder, wenn man die Quadratwurzel durch Quadrieren beseitigt, die Gleichung achten Grades

(VIII; 24)

$$\boxed{f(\lambda) = \lambda^8 - (1 - 2m\cos\psi + m^2)\,\lambda^6 + 2m\,(m - \cos\psi)\,\lambda^3 - m^2 = 0},$$

die durch die triviale Lösung $\lambda = 1$ ($r = R$) befriedigt wird. Man könnte also, indem man $f(\lambda)$ durch $\lambda - 1$ dividiert, den Grad der Gleichung um eins vermindern; dabei ist aber weder für die praktische Rechnung noch für die Diskussion etwas gewonnen, zumal die Form der entstehenden Gleichung siebenten Grades weniger einfach ist als die von (VIII; 24). Es mag bei dieser Gelegenheit noch einmal darauf hingewiesen werden, daß die Gleichung (VIII; 24) und ihre triviale Lösung nur unter der Voraussetzung gelten, daß die Beziehung (VIII; 7) streng erfüllt ist, d.h., daß sich außer dem Planeten oder Kometen auch der „Erdort" zu allen verwendeten Beobachtungszeiten auf einer KEPLERschen Bahn befindet. Das ist aber (wenn wir Störungen der Bahnbewegungen durch die Planeten vernachlässigen) nur dann streng der Fall, wenn man

den Erdort im Baryzentrum des Systems Erde–Mond annehmen darf. Da dieser Punkt aber, wie schon erwähnt, stets im Innern des Erdkörpers liegt[1]), so übersteigen die Vernachlässigungen, die man begeht, wenn man topozentrische statt baryzentrische Koordinaten benutzt, nicht die Größenordnung der täglichen Parallaxen von Sonne und Himmelskörper.

Da $\lambda = r/R$ als Verhältnis zweier Strecken wesentlich positiv ist, interessieren von den acht Wurzeln der Gleichung (VIII; 24) nur die reellen positiven. Nach dem schon in Abschn. 52 benutzten Satz von DESCARTES ist aber die Anzahl der reellen positiven Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(\lambda) = 0$ höchstens gleich der Anzahl der zwischen den Koeffizienten aufeinanderfolgender Glieder auftretenden Vorzeichenwechsel. Nun ist in (VIII; 24) der Koeffizient von λ^6 sicher negativ, das konstante Glied $(-m^2)$ ebenfalls. Schließlich läßt sich leicht übersehen, daß der Koeffizient von λ^3 stets positiv ist. Denn da

$$\zeta = m(1 - \lambda^{-3}) \tag{VIII; 25}$$

stets positiv ist, haben m und $\lambda - 1$ stets das gleiche Vorzeichen. Der Ausdruck $2m(m - \cos\psi)$ ist demnach sicher positiv, wenn $m < 0$ ist, denn dann ist, wegen $r < R$, $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$, d.h. $\cos\psi > 0$. Ist aber $m > 0$ und daher $\lambda > 1$, so ist

$$m - \cos\psi = \frac{m}{\lambda^3} \pm \sqrt{\lambda^2 - \sin^2\psi}$$

ebenfalls positiv; von den beiden Vorzeichen der Quadratwurzel kann nämlich nur das positive richtig sein, denn aus $\lambda > 1$ folgt ja $\lambda^2 - \sin^2\psi > \cos^2\psi$, und nach (VIII; 23) wäre sonst $\zeta < 0$, was der geometrischen Bedeutung dieser Größe widerspricht. Damit ist bewiesen, daß die Gleichung (VIII; 24) höchstens drei positive Wurzeln haben kann; andererseits muß sie (wenn den Beobachtungen überhaupt eine reelle Bahn entsprechen soll) außer der trivialen Erdbahnlösung $\lambda = 1$ mindestens eine weitere positive Wurzel besitzen. Die Funktion $f(\lambda) = 0$ wird also etwa die in Abb. 55 skizzierte Form haben: Für große $|\lambda|$ wird $f(\lambda)$ beliebig groß positiv. Da $f(0) = -m^2$, muß es also eine negative Wurzel (D) geben, die praktisch ohne Bedeutung ist. Von den drei positiven Wurzeln $(A, B,$

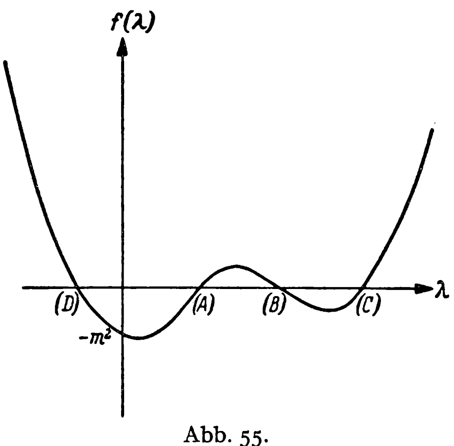


Abb. 55.
Wurzeln der LAGRANGEschen Gleichung.

[1]) Die Massen von Mond und Erde verhalten sich wie 1 : 81; die mittlere Distanz Erde–Mond ist rund 60 Erdhalbmesser. Nach (III; 6) beträgt also die mittlere Distanz des Baryzentrums vom Erdmittelpunkt rund 60/82 = 0.73 Erdradien.

C), von denen in Grenzfällen zwei benachbarte zusammenfallen können, ist eine die triviale Lösung $\lambda = 1$, und wir haben also drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Erdbahnlösung auf die kleinste, mittlere oder größte Nullstelle fällt.

Entspricht die Erdbahnlösung $\lambda = 1$ der mittleren Nullstelle (B), so gilt für die beiden anderen positiven Wurzeln $r < R$ und $r > R$. In diesem Falle kann eine Entscheidung darüber, welche von beiden die richtige ist, sofort getroffen werden. Ist $|\psi| > \frac{\pi}{2}$, d.h., steht der Himmelskörper zur Zeit t_0 zwischen Quadratur und Opposition in bezug auf die Sonne (wie stets bei Erstbeobachtungen von Planetoiden, die meist in der Nähe der Opposition entdeckt werden), so ist ja sicher $r > R$. Ist dagegen $|\psi| < \frac{\pi}{2}$, wie das bei Kometen häufig der Fall ist, so kann man zur Entscheidung, ob $r \gtrless R$, d.h. $\lambda \gtrless 1$, die Größe m heranziehen, da ja nach (VIII; 25) m das Vorzeichen von $\lambda - 1$ hat, also $\lambda \gtrless 1$, wenn $m \gtrless 0$. Dieses Kriterium ist, wie später (Abschn. 70) gezeigt werden soll, identisch mit dem von J.H. LAMBERT gefundenen Satz:

„Die scheinbare Bahn eines Himmelskörpers ist konvex gegen den sphärischen Ort der Sonne gekrümmt, wenn $r > R$, konkav, wenn $r < R$.“

Anders ist es, wenn die nicht trivialen Lösungen beide > 1 oder beide < 1 sind. Wenn nur drei Beobachtungen zur Bahnbestimmung verfügbar sind, führt jede dieser beiden Lösungen auf eine Bahn, die mit den sechs beobachteten sphärischen Koordinaten verträglich ist, und es handelt sich daher um eine echte Doppellösung. Die wahre Lösung wird erst ermittelt werden können, wenn mindestens eine weitere Beobachtung vorliegt, die dann durch die aus der Pseudolösung ermittelten Bahnelemente nicht dargestellt wird. Ähnlich liegen die Dinge, wenn man die Grundlagen der Bahnrechnung von vornherein aus mehr als drei Beobachtungen abgeleitet hat. In der Methode von LAPLACE-HARZER läßt sich z.B. aus n Beobachtungen mittels der nach dem Gliede $(n-1)$ter Ordnung abgebrochenen TAYLORschen Entwicklung

$$\text{(VIII; 26)} \qquad \alpha_\nu = \alpha_0 + \dot{\alpha}_0 \tau_\nu + \ddot{\alpha}_0 \frac{\tau_\nu^2}{2!} + \cdots + \alpha_0^{(n-1)} \frac{\tau_\nu^{n-1}}{(n-1)!}$$

durch Eliminierung von $\ddot{\alpha}_0$ und den höheren Ableitungen ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $\alpha_0, \dot{\alpha}_0, \ddot{\alpha}_0$ herstellen. Diese Größen und die entsprechend abgeleiteten Größen $\gamma_0, \dot{\gamma}_0, \ddot{\gamma}_0$ liefern ein genähertes System von Bahnelementen. Hat nun die Schlüsselgleichung eine Doppellösung, so werden die mit den falschen Elementen berechneten Widersprüche (VIII; 16) durch große Beträge und starken systematischen Gang im allgemeinen so sehr auffallen, daß die Wahl der richtigen Lösung nicht schwer fällt.

Eindeutigkeit der Lösung besteht also nur, wenn die Erdbahnlösung auf die *mittlere* der drei positiven Nullstellen fällt. An dieser Stelle ist aber, wie Abb. 55 zeigt, die Ableitung von $f(\lambda)$ negativ. Differenziert man (VIII; 24)

$$\frac{df}{d\lambda} = 8\lambda^7 - 6\,(1 - 2m\cos\psi + m^2)\,\lambda^5 + 6m\,(m - \cos\psi)\,\lambda^2,$$

und setzt man $\lambda = 1$, so erhält man als Kriterium für die Eindeutigkeit

$$2 + 6m\cos\psi < 0, \quad \text{d.h.} \quad m\cos\psi < -\frac{1}{3}.$$

Drückt man m nach (VIII; 25) und $\cos\psi$ nach (VIII; 23) durch $\zeta = \varrho/R$ und $\lambda = r/R$ aus, so läßt sich diese Ungleichung auch

$$\frac{\zeta}{1-\lambda^{-3}} \cdot \frac{1+\zeta^2-\lambda^2}{2\zeta} = \frac{1}{2}\,\frac{1+\zeta^2-\lambda^2}{1-\lambda^{-3}} < -\frac{1}{3}$$

oder

(VIII; 27) $$\zeta^2 \lesseqgtr \lambda^2 + \frac{2}{3\lambda^3} - \frac{5}{3} \quad \text{für} \quad \lambda \gtreqless 1$$

schreiben. Mit Hilfe dieser Beziehung kann man nach C. V. L. CHARLIER den Raum in Gebiete einteilen, in denen die Ungleichung gilt, also Eindeutigkeit der Bahnbestimmung gewährleistet ist, und in solche, in denen sie nicht gilt und daher Doppellösungen zu erwarten sind. Die Trennungsfläche zwischen diesen Gebieten ist eine um die Verbindungsgerade Erde–Sonne symmetrische Rotationsfläche mit der Gleichung

(VIII; 28) $$\boxed{\zeta^2 = \lambda^2 + \frac{2}{3\lambda^3} - \frac{5}{3}},$$

wo λ und ζ bipolare Koordinaten in bezug auf zwei feste Punkte [Sonne ($\lambda = 0$) und Erde ($\zeta = 0$)] bedeuten, deren Abstand gleich der Einheit ist.

Die Form der Trennungsfläche ist durch ihren Schnitt mit einer beliebigen, durch diese festen Punkte gehenden Ebene bestimmt. In dieser Ebene stellt (VIII; 28) die Grenzkurve der Eindeutigkeitsbereiche in ebenen Bipolarkoordinaten dar, die offenbar in bezug auf die Achse Erde–Sonne symmetrisch verläuft. Für $\lambda = 1$ wird $\zeta = 0$; die Erde (E in Abb. 56), die diese Koordinaten hat, ist also ein Punkt der Grenzkurve. Setzt man anstatt ζ und λ rechtwinklige Koordinaten x, y mit dem Nullpunkt in E (positive x-Richtung nach S zeigend), so ist

$$\zeta^2 = x^2 + y^2; \quad \lambda^2 = (x-1)^2 + y^2.$$

Anstatt (VIII; 28) erhält man dann

(VIII; 29)
$$x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3\lambda^3} = \frac{1}{3[(x-1)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}\,[1-(2x-x^2-y^2)]^{-\frac{3}{2}}.$$

Für $x = -\frac{1}{3}$ wird $y = \pm\infty$, d.h., die Kurve nähert sich der Geraden $x = -\frac{1}{3}$ asymptotisch. Für $x < -\frac{1}{3}$ ist sie nicht mehr definiert, da ja der Ausdruck auf

der rechten Seite von (VIII; 29) seiner geometrischen Bedeutung nach wesentlich positiv ist. Andererseits kann x auch nicht beliebig große positive Werte annehmen, da sonst die rechte Seite gegen null, die linke gegen ∞ streben würde. Der Maximalwert, den x annehmen kann, wird aus Symmetriegründen

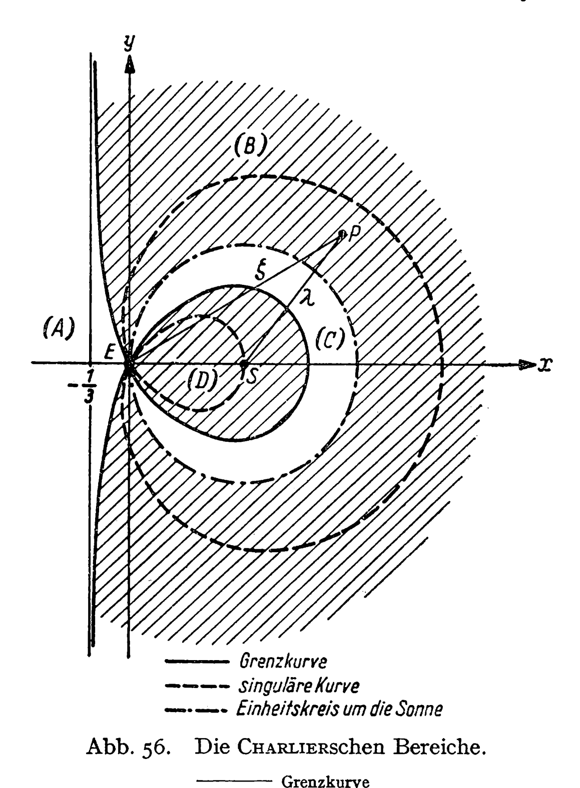


Abb. 56. Die CHARLIERschen Bereiche.

——— Grenzkurve
— — — — singuläre Kurve
— · — · — Einheitskreis um die Sonne

erreicht, wenn $y = 0$ ist. Setzt man also $y = 0$ und $u = x - 1$, so folgt aus (VIII; 29)

$$3u + 4 = \frac{1}{|u^3|}$$

mit der positiven Wurzel $u = 0.56042566..$, $x = 1 + u$.

In der Umgebung der Erde, wo x und y klein sind, kann man (VIII; 29) in eine Potenzreihe entwickeln und erhält, wenn man Glieder höherer als 2. Ordnung vernachlässigt,

$$4x^2 - y^2 = 0.$$

Die Tangenten an die Grenzkurve im Nullpunkt (E) haben demnach die Richtungen

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{y}{x} = \pm 2 \quad \text{bzw.} \quad \psi = \pm 63^\circ\, 26'\!.1.$$

Die Grenzkurve (VIII; 29) besitzt demnach die in Abb. 56 gezeichnete Gestalt. Für $\lambda > 1$, also außerhalb des um die Sonne gezogenen Einheitskreises, wird die Grenzkurve aus den beiden vom Erdort aus ins Unendliche gehenden Ästen gebildet. Sie teilt das Gebiet $\lambda > 1$ in zwei Bereiche (A) und (B), von denen der von der Sonne abgewandte Bereich (A) die eindeutigen, der den Einheitskreis umschließende Bereich (B) die Doppellösungen enthält. Man erkennt das sofort, wenn man die Punkte der ganz im Gebiet (B) liegenden y-Achse betrachtet. Für sie ist (wenn wir den Nullpunkt E selbst ausschließen) $\lambda > 1$ und

$$\zeta^2 = \lambda^2 - 1 > \lambda^2 + \frac{2}{3\lambda^3} - \frac{5}{3} = \lambda^2 - 1 - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right),$$

so daß also auf ihr und damit im ganzen Bereich (B) die Ungleichung (VIII; 27) nicht erfüllt ist. Für $\lambda < 1$, also innerhalb des Einheitskreises, herrscht Eindeutigkeit in dem außerhalb der Kurvenschleife liegenden Gebiet (C), während Doppellösungen innerhalb der Schleife selbst, in (D), zu erwarten sind, denn für hinreichend kleine λ (in unmittelbarer Umgebung von S) ist ja

$$\zeta^2 \approx 1 < \lambda^2 + \frac{2}{3\lambda^3} - \frac{5}{3}.$$

Liegt der Punkt (ζ, λ) auf der Kurve (VIII; 28) oder auf dem Einheitskreis um S, also irgendwo auf der Grenze zwischen den vier Bereichen, so tritt der schon oben erwähnte Fall ein, daß zwei Wurzeln der Schlüsselgleichung zusammenfallen. Liegt der Punkt auf der Grenze zwischen (A) und (B), so ist die richtige Lösung λ die größte unter den drei positiven Wurzeln; die Pseudolösung fällt also mit der trivialen zusammen. Liegt aber der Punkt (ζ, λ) auf der Kurvenschleife innerhalb des Einheitskreises, also auf der Grenze zwischen (C) und (D), so ist $\lambda < 1$ und die kleinste der drei Wurzeln; die Pseudolösung fällt wiederum mit der Erdbahn zusammen. Liegt schließlich (ζ, λ) auf dem Einheitskreis, so ist $\lambda = 1$, d.h., die richtige Lösung und die triviale fallen zusammen. Es ist dann $\lambda = 1$ eine Doppelwurzel; zu der einen gehört $\zeta = 0$, zu der anderen $\zeta = 2\cos\psi$.

Schließlich besteht noch die Möglichkeit, daß die beiden Wurzeln $\lambda \neq 1$ zusammenfallen, daß also die Kurve (VIII; 24) an der Stelle λ die Abszissenachse berührt. Die Punkte (ζ, λ), für die das zutrifft, liegen natürlich innerhalb der (schraffierten) Gebiete (B) und (D). Die Bedingung für das Eintreten dieses Sonderfalls läßt sich aus der Forderung herleiten, daß für die nichttriviale Wurzel λ die Gleichungen

$$\text{(VIII; 30)} \qquad \begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^8 - a\lambda^6 + b\lambda^3 - c = 0, \\ \frac{df}{d\lambda} &= 8\lambda^7 - 6a\lambda^5 + 3b\lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

erfüllt sein müssen, wo zur Abkürzung

(VIII; 31) $a = 1 - 2m \cos \psi + m^2, \quad b = 2m(m - \cos \psi), \quad c = m^2$

gesetzt worden ist. Aus (VIII; 30) berechnet man a und b als Funktionen von c:

$$a = \frac{c}{\lambda^6} + \frac{5}{3}\lambda^2; \quad b = 2\frac{c}{\lambda^3} + \frac{2}{3}\lambda^5.$$

Da aber außerdem aus (VIII; 31) $a - b + c = 1$ folgt, gilt

$$c\left(1 - \frac{2}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^6}\right) + \frac{5}{3}\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^5 = 1.$$

Andererseits ist aber nach (VIII; 25) $c = m^2 = \zeta^2(1 - \lambda^{-3})^{-2}$, so daß als Gleichung des geometrischen Orts aller Punkte, für die die richtige Lösung λ mit der Pseudolösung zusammenfällt,

(VIII; 32) $$\zeta^2 = 1 - \frac{5}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^5$$

erhalten wird.

Diese Gleichung ist sowohl für $\zeta = 1$, $\lambda = 0$ (Sonne) als auch für $\zeta = 0$, $\lambda = 1$ (Erde) erfüllt. Die ihr entsprechende „singuläre Kurve" geht demnach durch diese beiden Örter hindurch. Sie besteht aus zwei Schleifen, die sich (siehe die gestrichelte Kurve in Abb. 56) im Erdort E kreuzen und von denen eine ganz im Gebiet (B), die andere ganz im Gebiet (D) verläuft.

Während Lösungen der Schlüsselgleichung, die auf der Kurve (VIII; 28) bzw. auf der durch sie definierten Rotationsfläche liegen, der Bahnbestimmung keine wesentlichen Schwierigkeiten bereiten, da ja die richtige Lösung λ isoliert und scharf definiert ist, ergeben sich Komplikationen, wenn die Lösung auf der singulären Kurve (VIII; 32) oder auf dem (in Abb. 56 strichpunktiert gezeichneten) Einheitskreis $\lambda = 1$ liegt. In diesen Fällen berührt die Kurve $f(\lambda) = 0$ in λ die Abszissenachse. Die echte Lösung fällt also im ersten Fall mit der Pseudolösung, im zweiten mit der trivialen Lösung zusammen. Hier handelt es sich um Ausnahmefälle, in denen das hier eingeschlagene Verfahren zur Bahnbestimmung versagt, sei es, daß die Determinante des Gleichungssystems (VIII; 9) verschwindet, sei es, daß das Iterationsverfahren nicht konvergiert.

69. *Die GAUSSsche Gleichung*

C. F. GAUSS hat die LAGRANGEsche Schlüsselgleichung auf eine andere Form gebracht, die unter dem Namen „GAUSSsche Gleichung" bekannt ist und besonders bei Bahnbestimmungen von Planetoiden Vorteile bietet.

Die Schlüsselgleichung (VIII; 24) war ja durch Elimination von ζ aus den beiden Beziehungen (VIII; 23, 25)

$$\lambda^2 = 1 - 2\zeta \cos \psi + \zeta^2; \quad \zeta = m(1 - \lambda^{-3})$$

hervorgegangen, wobei $\lambda = r/R$, $\zeta = \varrho/R$ war, ψ den Winkel an der Erde im Dreieck Sonne–Erde–Planet (Abb. 54) und m eine aus den Beobachtungen hergeleitete Größe bedeutete. GAUSS führt statt ψ den Winkel z am Planeten ein. Dieser Winkel ist bei kleinen Planeten, die meist in der Nähe der Opposition beobachtet werden, gewöhnlich klein; sein Betrag ist in praktischen Fällen selten größer als 8°.

Zwischen z und ψ bestehen (Abb. 54) nach dem Sinussatz die beiden Beziehungen

(VIII; 33) $$r \sin z = R \sin \psi; \quad \varrho \sin z = R \sin (\psi + z)$$

oder

(VIII; 34) $$\lambda \sin z = \sin \psi; \quad \zeta \sin z = \sin (\psi + z).$$

Setzt man nun

(VIII; 35) $$\begin{array}{rl|c} & & \text{(I)} \\ \sin \psi = \mu \sin q & & -\cos z \\ m - \cos \psi = \mu \cos q & & \sin z, \end{array}$$

so erhält man durch Multiplizieren mit den Faktoren (I) und Addieren

$$m \sin z - \sin (z + \psi) = (m - \zeta) \sin z = \mu \sin (z - q),$$

wenn man noch $\sin (\psi + z)$ durch (VIII; 34) eliminiert. Nach (VIII; 25, 34) ist aber

$$m - \zeta = m \lambda^{-3} = m \left(\frac{\sin z}{\sin \psi}\right)^3,$$

so daß man schließlich

$$\sin^4 z = \frac{\mu}{m} \sin^3 \psi \sin (z - q)$$

erhält oder, mit $M = \dfrac{m}{\mu \sin^3 \psi}$,

(VIII; 36) $$\boxed{\sin (z - q) = M \sin^4 z}.$$

Das ist die *GAUSSsche Gleichung*, aus der man z bestimmen kann, nachdem man μ und q aus (VIII; 35) berechnet hat. Ist dies geschehen, so ergeben die Gleichungen (VIII; 33, 34) r und ϱ bzw. λ und ζ.

Ähnlich wie für die Lösung der KEPLERschen Gleichung (siehe Abschn. 35) sind auch für die Lösung der GAUSSschen Gleichung zahlreiche Verfahren ersonnen worden, von denen hier die wichtigsten wiedergegeben werden mögen.

Wenn bereits – etwa aus einer Tafel mit den Eingängen M und q – ein guter Näherungswert für z vorliegt, läßt sich die exakte Lösung bequem durch das folgende Approximationsverfahren gewinnen. Sei die vorhandene Näherung z_1, so kann man aus

(VIII; 37) $$\sin (z_2 - q) = M \sin^4 z_1$$

sogleich eine bessere Näherung z_2 herleiten. Logarithmiert man (VIII; 36, 37), so erhält man

$$\log M + 4 \log \sin z - \log \sin (z - q) = 0, \tag{VIII; 38}$$

$$\log M + 4 \log \sin z_1 - \log \sin (z_2 - q) = 0. \tag{VIII; 39}$$

Andererseits ist die Gausssche Gleichung durch z_2 noch nicht exakt erfüllt, es ist also

$$\log M + 4 \log \sin z_2 - \log \sin (z_2 - q) = f_2, \tag{VIII; 40}$$

wo f_2 ein kleiner Fehlbetrag ist. Subtrahiert man (VIII; 40) von (VIII; 38) und (VIII; 39), so ergeben sich für f_2 zwei Ausdrücke, die man einander gleichsetzen kann; es ist also

$$4 (\log \sin z - \log \sin z_2) - [\log \sin (z - q) - \log \sin (z_2 - q)] =$$
$$= 4 (\log \sin z_1 - \log \sin z_2).$$

Nun seien d und D die für $1''$ gültigen Tafeldifferenzen von $\log \sin x$ an den Stellen $x = z$ und $x = z - q$. Dann ist, wenn man die Differenz der Winkel in Bogensekunden ausdrückt,

$$4d (z - z_2) - D (z - z_2) = 4d (z_1 - z_2).$$

Man hat also, wenn man die Tafeldifferenzen d und D an den Stellen z_2 bzw. $z_2 - q$ abliest, in

$$z_3 = z_2 + \frac{4d}{D - 4d} (z_2 - z_1)$$

einen weiteren Näherungswert, der in den meisten Fällen die Gleichung (VIII; 36) schon befriedigen wird. Ist das nicht der Fall, so ist wegen (VIII; 40) und (VIII; 38)

$$\log M + 4 \log \sin z_3 - \log \sin (z_3 - q) = f_3,$$
$$\log M + 4 \log \sin z - \log \sin (z - q) = 0,$$

und es folgt aus der Differenz dieser Gleichungen

$$z = z_3 + \frac{f_3}{D - 4d}.$$

Im Falle der Bahnbestimmung eines Planetoiden ist z klein, und obwohl M unter Umständen recht große Werte annehmen kann, wird die rechte Seite der Gleichung (VIII; 36) durch den Faktor $\sin^4 z$ so stark herabgedrückt, daß man die Iteration meist schon mit der rohen Ausgangsnäherung $z_1 = q$ erfolgreich beginnen kann. Tietjen gibt folgenden Weg an, um auf Anhieb zu einer weit besseren Näherung zu gelangen. Setzt man

$$z = q + dz$$

in (VIII; 36) ein, so erhält man

$$\text{(VIII; 41)} \qquad \sin dz = M \sin^4 (q + dz) = M\,[\sin q \cos dz + \cos q \sin dz]^4$$

und hieraus, wenn man $\cos dz = 1$, $\sin dz = dz$ setzt und höhere Potenzen von dz vernachlässigt,

$$dz = M\,[\sin q + dz \cos q]^4 = M\,[\sin^4 q + 4dz \sin^3 q \cos q]$$

oder

$$\text{(VIII; 42)} \qquad dz = \frac{M \sin^4 q}{1 - 4M \sin^4 q \operatorname{ctg} q}.$$

Varianten dieses Verfahrens sind u.a. von G. WITT[1]), später von F. KAISER[2]) und F. ANGELITTI[3]) angegeben worden; sie beruhen sinngemäß auf den folgenden Überlegungen:

Schreibt man (VIII; 41) in der Form

$$\sin \delta z = M \sin^4 q \cos^4 \delta z\,(1 + \operatorname{ctg} q \operatorname{tg} \delta z)^4,$$

und setzt man

$$\operatorname{ctg} q \operatorname{tg} \delta z = x; \quad M \sin^4 q \operatorname{ctg} q \cos^3 \delta z = y,$$

so gilt die Beziehung

$$\text{(VIII; 43)} \qquad x = y\,(1 + x)^4,$$

in der x und y klein sind und y bis auf den Faktor $\cos^3 \delta z$ (der in erster Näherung und meist auch ein für alle Mal gleich eins gesetzt werden darf) bekannt ist. Löst man diese Gleichung mit

$$y = y_0 = M \sin^4 q \operatorname{ctg} q$$

auf, so ist

$$\operatorname{tg} \delta z = x \operatorname{tg} q,$$

und man kann, wenn nötig, die Rechnung mit $y = y_0 \cos^3 \delta z$ wiederholen.

Die Auflösung von (VIII; 43) geschieht etwa durch die Reihe

$$x = y + 4y^2 + 22y^3 + 140y^4 + \cdots,$$

die man aus (VIII; 43) mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten leicht ableitet, oder, falls diese Reihe zu langsam abklingt, durch das Näherungsverfahren

$$x_0 = y(1 + y)^4, \qquad \delta x_0 = \frac{f}{1 - 4y(1 + x_0)^3},$$

$$f = y(1 + x_0)^4 - x_0, \quad x_1 = x_0 + \delta x_0, \quad \ldots$$

---

[1]) Astron. Nachr. *172*, 129 (1906).

[2]) Astron. Nachr. *228*, 121 (1926); *277*, 255 (1949).

[3]) Astron. Nachr. *229*, 93 (1926).

Eine noch andere Form kann man der GAUSSschen Gleichung geben, wenn man (nach KAISER und ANGELITTI)

$$\sin z \cos q = \cos z \sin q + M \sin^4 z$$

schreibt und beide Seiten dieser Gleichung durch $\sin z \cos q$ dividiert:

$$1 = \operatorname{ctg} z \operatorname{tg} q + M \sin^3 z \sec q.$$

Man darf dann setzen

$$\text{(VIII; 44)} \qquad \operatorname{ctg} z \operatorname{tg} q = \cos^2 \omega; \quad M \sin^3 z \sec q = \sin^2 \omega$$

und erhält daraus

$$\sin^2 \omega \cos^6 \omega = Y = M \operatorname{tg}^3 q \sec q \cos^3 \delta z$$

oder

$$\sin^2 2\omega (1 + \cos 2\omega)^2 = 16 Y \quad \text{bzw.} \quad \sin 2\omega (1 + \cos 2\omega) = 4\sqrt{Y},$$

eine Gleichung, deren Auflösung man, da ω klein ist, mit der Näherung $\sin 2\omega = 2\sqrt{Y}$ beginnen kann.

Es darf noch bemerkt werden, daß bei der Bestimmung von q und μ aus (VIII; 35) durch geeignete Wahl des Quadranten von q immer erreicht werden kann, daß μ das gleiche Vorzeichen wie m erhält. Denn es ist, wie auf S. 360 bewiesen worden ist,

$$m - \cos \psi > 0 \quad \text{für} \quad m > 0 \quad (r > R),$$

$$m - \cos \psi < 0 \quad \text{für} \quad m < 0 \quad (r < R).$$

Hieraus folgt, daß man zu dem genannten Zweck

$$0 < q < \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad m > 0$$

$$-\frac{\pi}{2} < q < 0 \quad \text{für} \quad m < 0$$

setzen muß, da ja $\sin \psi > 0$ ist.

Wenn nun m und μ stets das gleiche Vorzeichen haben, ist M immer positiv und daher auch $\sin (z - q) > 0$. Für Planetoiden oder andere Himmelskörper außerhalb der Erdbahn ist aber immer $q > 0$ und $z < \frac{\pi}{2}$. Es ist daher auch $0 < q < z < \frac{\pi}{2}$, d.h., z und q liegen im ersten Quadranten. Damit ist gezeigt, daß die linken Seiten der Gleichungen (VIII; 44) beide positiv sind und daß $\operatorname{ctg} z \operatorname{tg} q < 1$ ist, so daß ω als ein reeller Winkel angesehen werden darf.

70. *Der LAMBERTsche Satz von der Krümmung der scheinbaren Bahn*

Im Abschn. 68 wurde dieser Satz bereits formuliert: *Die scheinbare Bahn eines sich nach den KEPLERschen Gesetzen um die Sonne bewegenden Himmelskörpers ist gegen den jeweiligen sphärischen Ort der Sonne konvex oder konkav gekrümmt, je nachdem sein Abstand von der Sonne größer oder kleiner ist als der der Erde.*

LAMBERT hat diesen Satz auf geometrischem Wege bewiesen. Hier soll der zuerst von H. BRUNS[1]) erbrachte analytische Beweis dieses merkwürdigen Satzes Platz finden.

Es seien X, Y, Z die drei Hauptkoordinatenrichtungen eines rechtsdrehenden Koordinatensystems an der Sphäre, also etwa (im System des Äquators) X die Richtung nach dem Frühlingspunkt, Y die nach dem Punkt des Himmelsäquators mit der Rektaszension $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und Z die nach dem Nordpol des Himmels. Sei nun zu irgendeiner Zeit t der scheinbare Ort des Planeten P und

$$a = \cos(PX), \quad b = \cos(PY), \quad c = \cos(PZ)$$

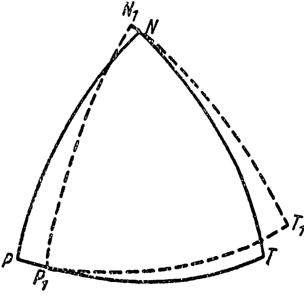


Abb. 57. Krümmung der scheinbaren Bahn.

die Richtungscosinus, die gleichzeitig als Koordinaten eines den Ort P an der Sphäre (der Einheitskugel um den Ort des Beobachters) im XYZ-System definierenden Einheitsvektors $\mathfrak{p}$ aufzufassen sind. Ferner sei T der von P um 90° entfernte Punkt (der instantane Apex), auf den die instantane scheinbare Bewegung von P hinzielt, so daß also der größte Kreis PT die sphärische Tangente an die scheinbare Bahnkurve im Punkte P darstellt. Der Einheitsvektor, der T definiert, heiße $\mathfrak{t}$, und es ist dann $(\mathfrak{p}\mathfrak{t}) = 0$. Schließlich sei N der zu dem größten Kreis PT gehörige Pol, $\mathfrak{n}$ der ihn definierende Einheitsvektor, und zwar sollen die Vektoren $\mathfrak{p}, \mathfrak{t}, \mathfrak{n}$ ein Rechtssystem bilden, wie dies auch für das gewählte Koordinatensystem der Fall war. Es ist dann

(VIII; 45) $$\mathfrak{n} = [\mathfrak{p}\mathfrak{t}]; \quad (\mathfrak{n}[\mathfrak{p}\mathfrak{t}]) = (\mathfrak{p}\mathfrak{t}\mathfrak{n}) = 1.$$

Nun sei $V = \frac{ds}{dt}$ die instantane Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung in P, d. h. ds der in der kleinen Zeit dt beschriebene Bogen. Es ist dann offenbar

(VIII; 46) $$\dot{\mathfrak{p}} = V\mathfrak{t}; \quad \ddot{\mathfrak{p}} = \dot{V}\mathfrak{t} + V\dot{\mathfrak{t}},$$

da ja die Richtung der Bewegung von P durch den Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ gegeben ist.

Nun wird die „Krümmung" der Bahnkurve in P durch den Winkel $d\varphi$ gegeben sein, um den sich die Tangente dreht, während P den Bogen ds beschreibt.

---

[1]) Astron. Nachr. *118*, 241 (1888).

Dieser Winkel ist aber gleich dem Bogen, den in der Zeit dt der Pol N zurücklegt. Sind nun P_1, T_1, N_1 die neuen Örter der drei Punkte zur Zeit $t + dt$, so ist (Abb. 57)

(VIII; 47) $$d\varphi = NN_1 \approx \frac{\pi}{2} - (T_1 N),$$

und man hat

$$d\varphi \approx \sin d\varphi = \cos (T_1 N) = (\mathfrak{t} + d\mathfrak{t}, \mathfrak{n}) = (d\mathfrak{t}\,\mathfrak{n}),$$

da ja $(\mathfrak{t}\,\mathfrak{n}) = 0$ ist.

Wenn man nun (VIII; 45, 46) verwendet, so folgt

$$\dot\varphi = (\dot{\mathfrak{t}}\,\mathfrak{n}) = (\dot{\mathfrak{t}}[\mathfrak{p}\,\mathfrak{t}]) = \frac{1}{V}(\ddot{\mathfrak{p}}[\mathfrak{p}\,\mathfrak{t}]) - \frac{\dot V}{V}(\mathfrak{t}[\mathfrak{p}\,\mathfrak{t}]).$$

Das letzte Glied rechts ist aber null, da $\mathfrak{t}$ auf $[\mathfrak{p}\,\mathfrak{t}]$ senkrecht steht. Man erhält demnach, wenn man noch $\mathfrak{t}$ durch $\dot{\mathfrak{p}}$ ausdrückt,

$$\dot\varphi = \frac{1}{V^2}(\ddot{\mathfrak{p}}[\mathfrak{p}\,\dot{\mathfrak{p}}]) = \frac{1}{V^2}(\mathfrak{p}\,\dot{\mathfrak{p}}\,\ddot{\mathfrak{p}})$$

und für die Krümmung der scheinbaren Bahn den Ausdruck

$$K = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\dot\varphi}{V} = \frac{1}{V^3}(\mathfrak{p}\,\dot{\mathfrak{p}}\,\ddot{\mathfrak{p}}) = \frac{1}{V^3}\begin{vmatrix} a & \dot a & \ddot a \\ b & \dot b & \ddot b \\ c & \dot c & \ddot c \end{vmatrix}$$

oder, da ja

$$a = \frac{\xi}{\varrho}, \quad \dot a = \frac{\dot\xi}{\varrho}, \quad \ddot a = \frac{\ddot\xi}{\varrho}$$

(denn bei der Differenzierung der Richtungsgrößen a, b, c bleibt ja der Abstand konstant),

$$V^3 \varrho^3 K = \begin{vmatrix} \xi & \dot\xi & \ddot\xi \\ \eta & \dot\eta & \ddot\eta \\ \zeta & \dot\zeta & \ddot\zeta \end{vmatrix} = |\,\xi,\ \dot\xi,\ \ddot\xi\,|,$$

wenn wir für die Determinante kürzehalber ihre erste Zeile setzen. Da V und ϱ wesentlich positiv sind, ist $K > 0$, wenn die Vektoren $\mathfrak{p}$, $\dot{\mathfrak{p}}$, $\ddot{\mathfrak{p}}$, in dieser Reihenfolge geschrieben, durch Rechtsdrehung ineinander übergehen, d.h., wenn $\ddot{\mathfrak{p}}$ auf der N zugewandten Seite der Bahnkurve liegt. Dann ist nämlich nach (VIII; 47) $d\varphi > 0$, da sich T dem Pol N nähert, also $T_1 N < 90°$ ist. $K \gtrless 0$ bedeutet also: N liegt auf der konkaven oder konvexen Seite der Bahnkurve.

Nun ist im Fall der KEPLERschen Bewegung nach (VIII; 7)

$$\ddot\xi = -\frac{\xi}{r^3} + X\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) \quad \text{usw.},$$

demnach

(VIII; 48) $$V^3\varrho^3 K = \left|\xi, \dot{\xi}, -\frac{\xi}{r^3} + X\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)\right| = \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)|\xi, \dot{\xi}, X|.$$

Andererseits ist, wenn $\mathfrak{s}$ den nach dem Sonnenort an der Sphäre gerichteten Einheitsvektor bezeichnet und wenn F den Winkelabstand des Sonnenorts von der instantanen sphärischen Bahntangente, $\frac{\pi}{2} - F$ also den Abstand des Sonnenorts vom Pol N bedeutet,

$$\sin F = (\mathfrak{s}\,\mathfrak{n}) = (\mathfrak{s}\,[\mathfrak{p}\,\mathfrak{t}]) = \frac{1}{V}(\mathfrak{p}\,[\dot{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{s}])$$

oder

(VIII; 49) $$\sin F = \frac{1}{V R \varrho^2}\,|\xi, \dot{\xi}, X|.$$

Somit ergibt sich, wenn man aus (VIII; 48, 49) die Determinante eliminiert,

(VIII; 50) $$V^2 \frac{\varrho}{R} K = \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)\sin F.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber der LAMBERTsche Satz unmittelbar. Denn haben $\sin F$ und K dasselbe Vorzeichen, liegt also der Sonnenort auf der konkaven Seite der Bahn, so muß $r < R$ sein, da ja $V^2 \frac{\varrho}{R}$ positiv ist. Haben dagegen $\sin F$ und K verschiedene Vorzeichen, liegt also die Sonne auf der konvexen Bahnseite, so folgt $r > R$.

Gleichung (VIII; 50) ist übrigens, wenn man wie früher $\zeta = \frac{\varrho}{R}$ und $\lambda = \frac{r}{R}$ setzt, von der Form (VIII; 25)

$$\zeta = m(1 - \lambda^{-3})$$

und offensichtlich mit dieser Beziehung identisch. Wegen (VIII; 21) ist dann

$$\varkappa = \frac{R \cos\delta \sin F}{K V^2},$$

und vergleicht man diesen Wert mit (VIII; 11), so ergibt sich, daß die Determinante

$$\dot{\alpha}^3\gamma - \ddot{\alpha}\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\ddot{\gamma} \quad (\gamma = \operatorname{tg}\delta)$$

des linearen Gleichungssystems (VIII; 9) gleichzeitig mit K verschwindet. Hieraus folgt, daß die Bahnbestimmung auf dem vorgezeichneten Weg nicht gelingt, wenn die Krümmung der scheinbaren Bahn zur Zeit $t = t_0$ null ist. Dann ist aber nach dem LAMBERTschen Theorem $r = R$. Durch diese Überlegung wird also die Singularität dieses Ausnahmefalls erhärtet, die wir schon am Schluß des Abschn. 69 festgestellt haben.

71. *Untersuchungen von* POINCARÉ

Die sehr zahlreichen Varianten der LAPLACEschen Methode, die im Laufe der Zeit vorgeschlagen worden sind, nachdem die Untersuchungen von P. HARZER und später von A. O. LEUSCHNER gezeigt hatten, daß die praktischen und theoretischen Schwierigkeiten, die man in ihr gesehen hatte, leicht zu überwinden sind, unterscheiden sich hauptsächlich durch das Verfahren, mit dem erste Näherungen für die „lokalen Elemente“ $x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ gewonnen werden, die als Grundlage für die Hypothesenrechnung dienen können. Sind sie erst gefunden, so wird sich die Hypothesenrechnung zu ihrer schrittweisen Verbesserung der Elemente im Wesentlichen nach dem in Abschn. 67 beschriebenen Prinzip abspielen – einige der unterschiedlichen Wege, die dabei eingeschlagen worden sind, sollen in Abschn. 73 behandelt werden.

H. POINCARÉ[1]) hat in einer kritischen Studie über die LAPLACEsche Methode gerade auch die Möglichkeiten zur Bestimmung erster Näherungen eingehend behandelt. Es wird fast immer darauf ankommen, für eine noch zu wählende Epoche $t = t_0$ gewisse Funktionen $f(t), g(t), \ldots$ – bei LAPLACE-HARZER z. B. α und $\operatorname{tg}\delta$ – nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen an der Stelle t_0 zu ermitteln, wenn mindestens drei (zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 gehörende) Werte f_1, f_2, f_3 jeder dieser Funktionen bekannt sind. Sind nur diese drei Werte gegeben, so kann man die Unbekannten $f_0, \dot{f}_0, \ddot{f}_0$ aus den TAYLORschen Reihen

$$f_1 = f_0 + \dot{f}_0\tau_1 + \frac{1}{2}\ddot{f}_0\tau_1^2 + \varepsilon_1,$$

$$\text{(VIII; 51)} \qquad f_2 = f_0 + \dot{f}_0\tau_2 + \frac{1}{2}\ddot{f}_0\tau_2^2 + \varepsilon_2, \qquad [\tau_\nu = k(t_\nu - t_0)]$$

$$f_3 = f_0 + \dot{f}_0\tau_3 + \frac{1}{2}\ddot{f}_0\tau_3^2 + \varepsilon_3$$

genähert bestimmen, indem man die Reste

$$\varepsilon_\nu = \frac{1}{6}\dddot{f}_0\tau_\nu^3 + \frac{1}{24}f_0^{\mathrm{IV}}\tau_\nu^4 + \cdots$$

einstweilen vernachlässigt. Bessere Näherungen erhält man natürlich, wenn mehr als drei Beobachtungen verfügbar sind. Man wird dann die TAYLORschen Reihen erst bei einem späteren Glied abzubrechen brauchen und die Größen $\dddot{f}_0, f_0^{\mathrm{IV}}, \ldots$, soweit sie noch mitgenommen werden können, eliminieren. Andererseits wird die Genauigkeit durch Berücksichtigung von Gliedern beliebig hoher Ordnung durchaus nicht beliebig gesteigert, da sich die unvermeidlichen zufälligen Beobachtungsfehler (von groben Fehlern ganz abgesehen) gerade in den

---

[1]) Bull. astron. *23*, 161 (1906).

Entwicklungsgliedern höherer Ordnung am stärksten auswirken. HARZER hält, zweifellos mit Recht, fünf (möglichst gleichmäßig über das Beobachtungsintervall verteilte) Werte der beobachteten Größe für das Optimum.

Für die praktische Anwendung der Methode ist es aber notwendig, über die Genauigkeit der nach (VIII; 51) berechneten Größen gerade in dem Fall informiert zu werden, daß die Mindestzahl drei der Beobachtungen nicht überschritten wird. Seien nun $\bar{f}_0$, $\bar{\dot{f}}_0$, $\bar{\ddot{f}}_0$ die Lösungen von (VIII; 51), wenn die ε_ν unterdrückt werden, so erfüllen die Verbesserungen δf_0, $\delta \dot{f}_0$, $\delta \ddot{f}_0$, die an diese genäherten Lösungen angebracht werden müßten, wenn von den Resten ε_ν die Glieder 3. Ordnung berücksichtigt würden, die Gleichungen

$$\delta f_0 + \delta \dot{f}_0 \, \tau_\nu + \frac{1}{2} \delta \ddot{f}_0 \, \tau_\nu^2 + \frac{1}{6} \dddot{f}_0 \tau_\nu^3 = 0.$$

Die Zwischenzeiten τ_1, τ_2, τ_3 sind also die drei Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\tau^3 + 3 \frac{\delta \ddot{f}_0}{\dddot{f}_0} \tau^2 + 6 \frac{\delta \dot{f}_0}{\dddot{f}_0} + 6 \frac{\delta f_0}{\dddot{f}_0} = 0,$$

und es ist daher

$$\delta f_0 = -\frac{1}{6} \dddot{f}_0 \, \tau_1 \tau_2 \tau_3,$$

(VIII; 52)
$$\delta \dot{f}_0 = \frac{1}{6} \dddot{f}_0 \, (\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_3 \tau_1),$$

$$\frac{1}{2} \delta \ddot{f}_0 = -\frac{1}{6} \dddot{f}_0 \, (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3).$$

Im allgemeinen ist also der von der Vernachlässigung der Entwicklungsglieder 3. Ordnung herrührende Fehler in f_0 von der 3. Ordnung in den Zwischenzeiten, der von $\dot{f}_0$ von der 2. und der von $\ddot{f}_0$ von der 1. Ordnung.

In der Praxis wird meistens $t_0 = t_2$ gesetzt, d.h. die Epoche auf den Zeitpunkt der mittleren der drei Beobachtungen gelegt. Das hat verschiedene Vorteile. Zunächst wird der Funktionswert selbst streng dargestellt, da ja $\tau_2 = 0$ und $f_0 = f_2$ ist. Das System (VIII; 51) reduziert sich also auf zwei Gleichungen zur Bestimmung von $\dot{f}_0$ und $\ddot{f}_0$. Die Fehler (VIII; 52) nehmen dann die einfachere Form

$$\delta f_0 = 0, \quad \delta \dot{f}_0 = \frac{1}{6} \dddot{f}_0 \, \tau_1 \tau_3; \quad \frac{1}{2} \delta \ddot{f}_0 = -\frac{1}{6} \dddot{f}_0 \, (\tau_1 + \tau_3)$$

an. Sind überdies die Zwischenzeiten gleich, ist also $\tau_1 = -\tau_3$, so wird auch $\tau_1 + \tau_3 = 0$, also $\delta \ddot{f}_0 = 0$ (d.h., der Fehler von $\ddot{f}_0$ hängt nicht mehr von den vernachlässigten Gliedern 3. Ordnung, sondern nur noch von denen der 4. und der höheren Ordnungen ab).

Die Gleichheit der Zwischenzeiten erweist sich also als eine besonders günstige Vorbedingung für die Güte der ersten Näherung im Iterationsprozeß.

Leider hängt es im Fall der Bahnbestimmung eines eben entdeckten Planeten oder Kometen sehr vom Zufall ab, ob die wenigen vorliegenden Beobachtungen diese Bedingung wenigstens annähernd erfüllen. Wenn eine größere Anzahl von Beobachtungen zur Verfügung steht, wird sich der Bahnrechner immer bemühen, unter ihnen für eine erste Bahnbestimmung drei Beobachtungen in möglichst nicht sehr verschiedenen Zeitabständen auszuwählen. Sehr oft ist das aber nicht möglich, und dann würde die Festsetzung der Epoche auf die mittlere Beobachtung zur Folge haben, daß die zweiten Ableitungen der Funktionen f, g, ... Fehler von der 1. Ordnung aufweisen und daß daher die Ermittlung genäherter Bahnelemente, die von der Güte dieser Ableitung wesentlich beeinflußt wird, unsicher wird. Man kann aber dann, wie die Formeln (VIII; 52) erkennen lassen, die Festsetzung

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$t_0 = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$$

treffen, d.h. die Epoche auf das arithmetische Mittel der Beobachtungszeiten legen. Dann wird man zwar lineare Gleichungssysteme mit *drei* Unbekannten aufzulösen haben, und die f_0 werden nicht streng sein, sondern Fehler 3. Ordnung in den Zwischenzeiten aufweisen; die Fehler der zweiten Ableitungen werden aber von $\dddot{f}_0$ unabhängig. Um den Fehlereinfluß des Terms mit f_0^{IV} in den vernachlässigten Restreihen ε_ν abzuschätzen, bestimmen wir jetzt die Verbesserungen δf_0, $\delta \dot{f}_0$, $\delta \ddot{f}_0$ so, daß sie auch die Glieder 4. Ordnung in den ε_ν darstellen. Es ist dann für die drei Zwischenzeiten

$$\delta f_0 + \delta \dot{f}_0 \tau_\nu + \frac{1}{2} \delta \ddot{f}_0 \tau_\nu^2 + \frac{1}{6} \dddot{f}_0 \tau_\nu^3 + \frac{1}{24} f_0^{IV} \tau_\nu^4 = 0.$$

Die drei Größen τ_1, τ_2, τ_3 stellen also drei der vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$\tau^4 + 4 \frac{\dddot{f}_0}{f_0^{IV}} \tau^3 + 12 \frac{\delta \ddot{f}_0}{f_0^{IV}} \tau^2 + 24 \frac{\delta \dot{f}_0}{f_0^{IV}} \tau + 24 \frac{\delta f_0}{f_0^{IV}} = 0$$

dar, und wenn wir die vierte Wurzel mit τ_4 bezeichnen, so ist

$$\begin{aligned}
\delta f_0 &= \frac{1}{24} f_0^{IV} \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4, \\
\delta \dot{f}_0 &= -\frac{1}{24} f_0^{IV} [(\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_3 \tau_1) \tau_4 + \tau_1 \tau_2 \tau_3], \\
\frac{1}{2} \delta \ddot{f}_0 &= \frac{1}{24} f_0^{IV} [(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \tau_4 + (\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_3 \tau_1)], \\
\frac{1}{6} \dddot{f}_0 &= -\frac{1}{24} f_0^{IV} (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4).
\end{aligned}$$

Unter der speziellen Annahme $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$ wird $\tau_4 = -4\frac{\dddot{f}_0}{f_0^{IV}}$, und man erhält

$$\delta f_0 = -\frac{1}{6}\dddot{f}_0 \tau_1 \tau_2 \tau_3,$$

$$\delta \dot{f}_0 = \frac{1}{6}\dddot{f}_0 (\tau_1 \tau_3 - \tau_2^2) - \frac{1}{24} f_0^{IV} \tau_1 \tau_2 \tau_3,$$

$$\frac{1}{2}\delta \ddot{f}_0 = -\frac{1}{24} f_0^{IV} (\tau_1 \tau_3 - \tau_2^2)$$

für den Fehler der Unbekannten in Abhängigkeit von den Entwicklungskoeffizienten bis zur 4. Ordnung einschließlich. Sind außerdem noch die Zwischenzeiten gleich, ist also $\tau_1 + \tau_3 = 0$, $\tau_2 = 0$, so kann man $\tau_1 = -\tau_3 = -\tau$ setzen und erhält dann, bis auf Terme mit $f_0^{V}, \ldots$,

$$\delta f_0 = 0; \quad \delta \dot{f}_0 = -\frac{1}{6}\dddot{f}_0 \tau^2; \quad \frac{1}{2}\delta \ddot{f}_0 = \frac{1}{24} f_0^{IV} \tau^2.$$

Damit ist gezeigt worden, daß es immer möglich ist, die Fehler der Unbekannten des Systems (VIII; 51) soweit herabzudrücken, daß sie bei kleinen Zwischenzeiten nicht übermäßig ins Gewicht fallen.

Von den in den ersten drei Jahrzehnten dieses Jahrhunderts entwickelten Arbeiten über Bahnbestimmung nach dem LAPLACEschen Prinzip, das nach den Arbeiten von HARZER und POINCARÉ wieder an Bedeutung und Interesse gewonnen hatte, zeichnet sich besonders die von A. O. LEUSCHNER[1]) durch Gründlichkeit und kritische Untersuchung aller mit der praktischen Durchführung verbundenen Fragen aus. Das Studium dieser Arbeit sei jedem empfohlen, der sich mit Bahnbestimmungen praktisch befassen will. Hier genügt es, um den Grundgedanken dieser und ähnlicher Methoden klarzustellen, die von POINCARÉ loc. cit. gegebene Analyse des Problems in Kürze wiederzugeben.

Die verschiedenen Methoden der Bahnbestimmung nach dem LAPLACEschen Prinzip unterscheiden sich in erster Linie durch die Wahl der Funktionen $f, g, \ldots$ LAPLACE selbst setzte $f = \alpha$, $g = \delta$, während HARZER $g = \operatorname{tg} \delta$ wählte. Andere Funktionen von α, δ werden in den Methoden eingeführt werden, die in den nächsten Abschnitten behandelt werden sollen. POINCARÉ benutzt in seiner Analyse die Richtungskonstanten der drei sphärischen Örter

$$f = \cos\delta \cos\alpha; \quad g = \cos\delta \sin\alpha; \quad h = \sin\delta$$

und deren Ableitungen (wobei strenggenommen noch zu berücksichtigen wäre, daß die Bedingungen

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1; \quad f\dot{f} + g\dot{g} + h\dot{h} = 0; \quad f\ddot{f} + g\ddot{g} + h\ddot{h} = -(\dot{f}^2 + \dot{g}^2 + \dot{h}^2)$$

[1]) Lick Obs. Public. VII (1913).

auch für die interpolierten Funktionen verbindlich sind). Im übrigen gelangt man rasch zu einer Näherung für die gesuchten Anfangswerte $x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ zur Epoche t_0, wenn man folgenden Weg einschlägt: Es sind, wenn ϱ die unbekannte Entfernung des Himmelskörpers zur Epoche bedeutet, für diesen Zeitpunkt die geozentrischen (topozentrischen) Koordinaten

$$\xi = \varrho f; \quad \eta = \varrho g; \quad \zeta = \varrho h,$$

und der zweite Differentialquotient dieser Ausdrücke nach der Zeit ist nach (VIII; 7)

$$\text{(VIII; 53)} \quad \begin{aligned} \ddot{\varrho} f + 2\dot{\varrho}\dot{f} + \varrho\ddot{f} &= -\frac{\varrho}{r^3} f + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) X, \\ \ddot{\varrho} g + 2\dot{\varrho}\dot{g} + \varrho\ddot{g} &= -\frac{\varrho}{r^3} g + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) Y, \\ \ddot{\varrho} h + 2\dot{\varrho}\dot{h} + \varrho\ddot{h} &= -\frac{\varrho}{r^3} h + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) Z, \end{aligned}$$

wenn X, Y, Z die nach (VIII; 5) verbesserten Sonnenkoordinaten darstellen. Die Auflösung dieses Systems ergibt, wenn man

$$D = \begin{vmatrix} f, & \dot{f}, & \ddot{f} \\ g, & \dot{g}, & \ddot{g} \\ h, & \dot{h}, & \ddot{h} \end{vmatrix} \quad \text{oder, in abgekürzter Schreibweise,} \quad D = |f, \dot{f}, \ddot{f}|$$

und ebenso

$$D_1 = |X, \dot{f}, \ddot{f}|, \quad D_2 = |f, X, \ddot{f}|, \quad D_3 = |f, \dot{f}, X|$$

setzt,

$$\text{(VIII; 54)} \quad \begin{aligned} D\varrho &= D_3\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right), \\ D\dot{\varrho} &= \frac{1}{2} D_2 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right), \quad \dot{\varrho} = \frac{1}{2}\frac{D_2}{D_3}\varrho, \\ D\ddot{\varrho} &= \left(D_1 - \frac{D_3}{r^3}\right)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right), \\ \ddot{\varrho} &= \varrho\left(\frac{D_1}{D_3} - \frac{1}{r^3}\right) = \left(\frac{D_1}{D_3} - \frac{1}{R^3}\right)\varrho - \frac{D}{D_3}\varrho^2. \end{aligned}$$

Die Gleichung zwischen ϱ und r^{-3} gibt zusammen mit der geometrischen Beziehung (VIII; 20)

$$r^2 = \varrho^2 - 2\varrho(Xf + Yg + Zh) + R^2$$

die LAGRANGEsche Gleichung 8. Grades für r bzw. 7. Grades für ϱ. Ist ϱ berechnet, so liefert die zweite Gleichung (VIII; 54) $\dot{\varrho}$, und man erhält dann für

die gesuchten Anfangswerte die Näherungen

$$x = \varrho f - X; \quad \dot{x} = \dot{\varrho} f + \varrho \dot{f} - \dot{X} \quad \text{usw.},$$

mit denen man ein Iterationsverfahren beginnen kann, über dessen zweckmäßige Anlage in Abschn. 73 noch einiges gesagt werden muß.

72. *Die Methode von* STUMPFF-HERGET

Ein anderer Weg zur Bestimmung der genäherten Anfangswerte ist von K. STUMPFF[1]) eingeschlagen und später von P. HERGET durch wertvolle Ergänzungen verbessert worden. Seine Methode vermeidet, ähnlich wie die etwas ältere von A. WILKENS (Abschn. 74)[2]), den Umweg über die geozentrische Distanz. Diese wird vielmehr aus (VIII; 15) eliminiert, indem man η_ν und ζ_ν durch ξ_ν dividiert. Man erhält somit die nur von den beobachteten sphärischen Koordinaten abhängigen Größen

$$U_\nu = \operatorname{tg} \alpha_\nu; \quad V_\nu = \operatorname{tg} \delta_\nu \sec \alpha_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3),$$

und es bestehen dann die Beziehungen

$$\text{(VIII; 55)} \quad \begin{aligned} U_\nu(x_\nu + X_\nu) &= y_\nu + Y_\nu, \\ V_\nu(x_\nu + X_\nu) &= z_\nu + Z_\nu \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} U_\nu x_\nu - y_\nu &= P_\nu = Y_\nu - U_\nu X_\nu, \\ V_\nu x_\nu - z_\nu &= Q_\nu = Z_\nu - V_\nu X_\nu, \end{aligned}$$

in denen die Größen P_ν, Q_ν ebenso wie die U_ν, V_ν bekannt sind. Man kann nun die vier Wertetripel U_ν, V_ν, P_ν, Q_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ nach dem in Abschn. 71 beschriebenen Verfahren interpolieren und dadurch für die Epoche $t_0 = t_2$ oder auch für $t_0 = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$ die Werte der Funktionen $U(t) \ldots Q(t)$ und ihrer ersten beiden Ableitungen genähert bestimmen. Seien $U_0 = U, \ldots, Q_0 = Q$ die Funktionswerte für $t = t_0$, so gilt

$$\text{(VIII; 56)} \quad \begin{aligned} Ux - y &= P, \quad \dot{U}x + U\dot{x} - \dot{y} = \dot{P}, \\ Vx - z &= Q, \quad \dot{V}x + V\dot{x} - \dot{z} = \dot{Q} \end{aligned}$$

und

$$\text{(VIII; 57)} \quad \begin{aligned} \ddot{U}x + 2\dot{U}\dot{x} + U\ddot{x} - \ddot{y} &= \ddot{P}, \\ \ddot{V}x + 2\dot{V}\dot{x} + V\ddot{x} - \ddot{z} &= \ddot{Q}. \end{aligned}$$

Setzt man in den beiden Gleichungen (VIII; 57) noch

$$\ddot{x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\frac{z}{r^3}$$

---

1) Astron. Nachr. *243*, 317; *244*, 433 (1931–1932).
2) Astron. Nachr. *210*, 81, 127 (1919).

und eliminiert y und z durch (VIII; 56), so erhält man schließlich

$$\text{(VIII; 58)} \qquad \begin{aligned} \ddot{U}x + 2\dot{U}\dot{x} &= \ddot{P} + \frac{P}{r^3}, \\ \ddot{V}x + 2\dot{V}\dot{x} &= \ddot{Q} + \frac{Q}{r^3}. \end{aligned}$$

Die sechs linearen Gleichungen (VIII; 56, 58) liefern dann die Unbekannten des Problems direkt als Funktionen des noch unbestimmten Parameters $1/r^3$, und zwar ergeben sich zunächst x und $\dot{x}$ aus (VIII; 58) in der Form

$$x(\ddot{U}\dot{V} - \dot{U}\ddot{V}) = (\ddot{P}\dot{V} - \ddot{Q}\dot{U}) + \frac{1}{r^3}(P\dot{V} - Q\dot{U}),$$

$$-2\dot{x}(\ddot{U}\dot{V} - \dot{U}\ddot{V}) = (\ddot{P}\ddot{V} - \ddot{Q}\ddot{U}) + \frac{1}{r^3}(P\ddot{V} - Q\ddot{U})$$

oder, wenn man entsprechende Abkürzungen einführt,

$$\text{(VIII; 59)} \qquad x = M + \frac{m}{r^3}; \quad -2\dot{x} = N + \frac{n}{r^3}.$$

Die erste dieser Gleichungen ergibt in Verbindung mit der geometrischen Beziehung

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (Ux - P)^2 + (Vx - Q)^2$$

oder

$$\text{(VIII; 60)} \qquad r^2 = x^2(1 + U^2 + V^2) - 2x(UP + VQ) + (P^2 + Q^2)$$

die Gleichung achten Grades für r, worauf dann x und $\dot{x}$ aus (VIII; 59) und die übrigen Anfangswerte aus (VIII; 56) folgen.

Zu diesem äußerst einfachen und durchsichtigen Verfahren sind noch einige für die praktische Ausführung wichtige Bemerkungen notwendig. Bei der Anwendung der im vorigen Abschnitt beschriebenen Methode zur Interpolation der Funktionen f, g, ..., hier also U, ... Q, hat man zu prüfen, ob diese auch so beschaffen sind, daß die interpolierten Größen U, $\dot{U}$, $\ddot{U}$ usw. möglichst gute Annäherungen an die wahren Werte darstellen. Dazu ist offenbar nötig, daß diese Funktionen im Bereich der Beobachtungszeiten stetig und möglichst glatt und flach verlaufen. Das ist aber z.B. nicht mehr der Fall, wenn die Rektaszensionen α_ν die Werte 90° oder 270° überschreiten, bei denen $\operatorname{tg}\alpha$ und $\sec\alpha$ unendlich werden. Da sich Planetoiden meist in kleinen Deklinationen aufhalten, ist eine derartige Schwierigkeit für $\operatorname{tg}\delta$ im allgemeinen nicht zu befürchten; dagegen wird man hier vorsichtig sein müssen, wenn es sich um Kometen handelt, die sich in der Nähe der Himmelspole bewegen.

Man kann diese Schwierigkeit aber umgehen. K. STUMPFF schlägt vor, das Koordinatensystem vor Beginn der Rechnung um die z-Achse zu drehen, so daß die Rektaszension des mittleren Planetenorts null wird. Dann sind also

alle Rektaszensionen um α_2 zu vermindern, und die rechtwinkligen Koordinaten der Sonne, X_ν, Y_ν, Z_ν, sind durch die Transformation

$$\bar{X}_\nu = X_\nu \cos\alpha_2 + Y_\nu \sin\alpha_2,$$
$$\bar{Y}_\nu = Y_\nu \cos\alpha_2 - X_\nu \sin\alpha_2,$$
$$\bar{Z}_\nu = Z_\nu$$

in die des gedrehten Systems überzuführen. Dann bleiben die Größen

$$U_\nu = \operatorname{tg}(\alpha_\nu - \alpha_2); \quad V_\nu = \operatorname{tg}\delta_\nu \sec(\alpha_\nu - \alpha_2)$$

klein, solange sich der Himmelskörper in mäßigen Deklinationen bewegt. Handelt es sich um einen Kometen in der Nähe eines der Himmelspole, so benutzt man statt U und V die Größen

$$\text{(VIII; 61)} \qquad C = \frac{\xi}{\zeta} = \operatorname{ctg}\delta\cos\alpha; \quad S = \frac{\eta}{\zeta} = \operatorname{ctg}\delta\sin\alpha,$$

die sich dann (und zwar unabhängig von den α) regulär verhalten.

Wie P. HERGET[1]) hierzu bemerkt hat, ist die Drehung des Systems, die nach Beendigung der Bahnrechnung wieder rückgängig gemacht werden muß, indem man die endgültigen „lokalen Elemente" $x, \ldots \dot{z}$ der entgegengesetzten Drehungstransformation unterwirft, für den Rechner sehr lästig. Bequemer ist es, je nach der Gegend der Sphäre, in der die beobachteten Örter des Himmelskörpers liegen, verschiedene Varianten zur Definition der Hilfsgrößen U, V; P, Q zu verwenden. Man kann z.B. unter den drei Möglichkeiten

$$\text{(VIII; 62)} \quad \begin{aligned}
&(a) \quad U = \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg}\alpha, \quad V = \frac{\zeta}{\xi} = \operatorname{tg}\delta\sec\alpha; \\
&\qquad P = Y - UX, \quad Q = Z - VX, \\
&(b) \quad U = \frac{\zeta}{\eta} = \operatorname{tg}\delta\operatorname{cosec}\alpha, \quad V = \frac{\xi}{\eta} = \operatorname{ctg}\alpha; \\
&\qquad P = Z - UY, \quad Q = X - VY, \\
&(c) \quad U = \frac{\xi}{\zeta} = \operatorname{ctg}\delta\cos\alpha, \quad V = \frac{\eta}{\zeta} = \operatorname{ctg}\delta\sin\alpha; \\
&\qquad P = X - UZ, \quad Q = Y - VZ
\end{aligned}$$

diejenige wählen, bei der die U und V für das ganze Beobachtungsintervall endlich bleiben. Alle übrigen Formeln gehen dann aus denen des Falls (a), den wir hier als gegeben angenommen haben, durch zyklische Vertauschung der Koordinaten hervor.

---

[1]) P. HERGET: The computation of orbits. Ann Arbor 1949, im Selbstverlag.

Die Methode versagt, wenn die Determinante des Systems (VIII; 58) verschwindet, d.h.

$$\Delta = \ddot{U}\dot{V} - \dot{U}\ddot{V} = 0$$

ist. Setzt man hierin $U = \eta/\xi$, $V = \zeta/\xi$ oder, wenn man, wie in Abschn. 71, $\xi = \varrho f$, $\eta = \varrho g$, $\zeta = \varrho h$ schreibt, $U = g/f$, $V = h/f$, so findet man leicht

$$\Delta = \frac{1}{\xi^3} \begin{vmatrix} \xi & \dot{\xi} & \ddot{\xi} \\ \eta & \dot{\eta} & \ddot{\eta} \\ \zeta & \dot{\zeta} & \ddot{\zeta} \end{vmatrix} = \frac{1}{f^3} \begin{vmatrix} f & \dot{f} & \ddot{f} \\ g & \dot{g} & \ddot{g} \\ h & \dot{h} & \ddot{h} \end{vmatrix}.$$

Das Verschwinden von Δ ist also identisch mit der Bedingung dafür, daß das Gleichungssystem (VIII; 53) keine Lösung hat oder dafür, daß die beiden Seiten von (VIII; 54) null werden. Es ist dann entweder $r = R$ (d.h., es tritt der am Schluß von Abschn. 68 erwähnte singuläre Fall $\lambda = 1$ ein), oder es verschwindet auch die Determinante D_3 auf der rechten Seite von (VIII; 54), was z.B. dann geschieht, wenn der sphärische Ort (f, g, h) des Himmelskörpers mit dem der Sonne $(X/R, Y/R, Z/R)$ oder dem Gegenpunkt der Sonne zusammenfällt. Eine Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen ist also u.a. dann nicht möglich, wenn sich der Himmelskörper zur Zeit der Epoche genau in Opposition zur Sonne befindet.

73. *Das Verbesserungsverfahren*

Das im Abschn. 67 skizzierte Verbesserungsverfahren, über dessen praktische Durchführung man bei HARZER[1]) nachlesen möge, ist ziemlich kompliziert und für die Rechnung unbequem. Im Anschluß an die im vorigen Abschnitt beschriebene Methode nimmt es eine wesentlich einfachere Gestalt an.

Liegt ein genähertes System der Anfangswerte

(VIII; 63) $$x_0, y_0, z_0; \quad \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$$

vor, so kann man die Koordinaten x_ν, y_ν, z_ν für die Beobachtungszeiten t_ν mittels der Entwicklungsformeln (VIII; 17) berechnen, indem man die Größen F_ν, G_ν aus den Zwischenzeiten τ_ν und den mit Hilfe von (VIII; 63) gebildeten Invarianten μ_0, σ_0, ε_0 berechnet. Die genäherten Anfangswerte lassen sich dann folgendermaßen verbessern:

Es seien x_ν^*, y_ν^*, z_ν^* die mit (VIII; 63) berechneten Koordinaten. Mit ihnen bilde man

$$U_\nu^* = \frac{y_\nu^* + Y_\nu}{x_\nu^* + X_\nu}; \quad V_\nu^* = \frac{z_\nu^* + Z_\nu}{x_\nu^* + X_\nu}.$$

Der Vergleich dieser berechneten Größen mit den beobachteten gibt die Abweichungen

$$\Delta U_\nu = U_\nu - U_\nu^*; \quad \Delta V_\nu = V_\nu - V_\nu^*.$$

---

[1]) Astron. Nachr. *141*, 177 (1896).

Es seien nun

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z; \quad \Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}, \Delta \dot{z}; \quad \Delta F_\nu, \Delta G_\nu$$

die an $x_0, y_0, \ldots \dot{z}_0$ und an die mit ihnen provisorisch berechneten Größen F_ν, G_ν anzubringenden Korrektionen. Dann gelten streng die Beziehungen

$$x_\nu = (x_0 + \Delta x)(F_\nu + \Delta F_\nu) + (\dot{x}_0 + \Delta \dot{x})(G_\nu + \Delta G_\nu),$$

$$x_\nu^* = x_0 F_\nu + \dot{x}_0 G_\nu,$$

also

$$\Delta x_\nu = x_\nu - x_\nu^* = (F_\nu + \Delta F_\nu)\Delta x + (G_\nu + \Delta G_\nu)\Delta \dot{x} + + x_0 \Delta F_\nu + \dot{x}_0 \Delta G_\nu \tag{VIII; 64}$$

und entsprechende Gleichungen für Δy_ν und Δz_ν. Andererseits erhält man aus (VIII; 55)

$$y_\nu^* + \Delta y_\nu + Y_\nu = (x_\nu^* + \Delta x_\nu + X_\nu)(U_\nu^* + \Delta U_\nu),$$

$$z_\nu^* + \Delta z_\nu + Z_\nu = (x_\nu^* + \Delta x_\nu + X_\nu)(V_\nu^* + \Delta V_\nu).$$

Subtrahiert man hiervon

$$y_\nu^* + Y_\nu = (x_\nu^* + X_\nu)\, U_\nu^*,$$

$$z_\nu^* + Z_\nu = (x_\nu^* + X_\nu)\, V_\nu^*,$$

so bleibt

$$\begin{aligned} \Delta y_\nu &= U_\nu \Delta x_\nu + (x_\nu + X_\nu)\Delta U_\nu, \\ \Delta z_\nu &= V_\nu \Delta x_\nu + (x_\nu + X_\nu)\Delta V_\nu \end{aligned} \tag{VIII; 65}$$

oder, wenn man (VIII; 64) in (VIII; 65) einsetzt und umordnet,

$$\left\{\begin{aligned} & G_\nu \Delta \dot{y} - U_\nu G_\nu \Delta \dot{x} + F_\nu \Delta y - U_\nu F_\nu \Delta x = (x_\nu + X_\nu)\Delta U_\nu + R_\nu, \\ & G_\nu \Delta \dot{z} - V_\nu G_\nu \Delta \dot{x} + F_\nu \Delta z - V_\nu F_\nu \Delta x = (x_\nu + X_\nu)\Delta V_\nu + S_\nu \\ & \text{mit} \quad R_\nu = \Delta F_\nu [U_\nu (x_0 + \Delta x) - (y_0 + \Delta y)] + \\ & \qquad\qquad + \Delta G_\nu [U_\nu (\dot{x}_0 + \Delta \dot{x}) - (\dot{y}_0 + \Delta \dot{y})], \\ & \qquad\; S_\nu = \Delta F_\nu [V_\nu (x_0 + \Delta x) - (z_0 + \Delta z)] + \\ & \qquad\qquad + \Delta G_\nu [V_\nu (\dot{x}_0 + \Delta \dot{x}) - (\dot{z}_0 + \Delta \dot{z})], \\ & \qquad\qquad\qquad (\nu = 1, 2, 3). \end{aligned}\right. \tag{VIII; 66}$$

Diese Gleichungen, die streng gelten, kann man etwas einfacher schreiben, wenn die Epoche auf den mittleren Beobachtungszeitpunkt gelegt wird. Dann ist

$$\Delta y = U_2 \Delta x; \quad \Delta z = V_2 \Delta x, \tag{VIII; 67}$$

und man erhält (nach der Formulierung von HERGET) in

$$\text{(VIII; 68)} \quad \begin{cases} G_\nu \varDelta \dot{y} - U_\nu G_\nu \varDelta \dot{x} - F_\nu (U_\nu - U_2) \varDelta x = (x_\nu + X_\nu) \varDelta U_\nu + R_\nu, \\ G_\nu \varDelta \dot{z} - V_\nu G_\nu \varDelta \dot{x} - F_\nu (V_\nu - V_2) \varDelta x = (x_\nu + X_\nu) \varDelta V_\nu + S_\nu, \\ (\nu = 1, 3) \end{cases}$$

ein System von vier Gleichungen mit den vier Unbekannten $\varDelta x$, $\varDelta \dot{x}$, $\varDelta \dot{y}$, $\varDelta \dot{z}$, nach dessen Auflösung $\varDelta y$ und $\varDelta z$ aus (VIII; 67) folgen und das man durch Iteration zu befriedigen sucht, indem man zuerst die Reste R_ν, S_ν vernachlässigt, da ja F_ν, G_ν bei kleinen Zwischenzeiten nur schwach von den Fehlern der Koordinaten (VIII; 63) beeinflußt werden. Mit den so erhaltenen verbesserten Koordinaten berechnet man die vernachlässigten Terme R_ν, S_ν und wiederholt das Verfahren, bis sich nichts mehr ändert. Bei dieser Iteration bleiben die linken Seiten von (VIII; 68) stets unverändert; auf den rechten Seiten ändern sich x_ν, R_ν, S_ν von Schritt zu Schritt. Die letzte Iteration wird mit den um die Lichtzeit verminderten Beobachtungszeiten durchgeführt; die zu ihrer Berechnung nötigen geozentrischen Distanzen

$$\varrho_\nu = (x_\nu + X_\nu) \sec \delta_\nu \sec \alpha_\nu$$

lassen sich mit den x_ν der vorhergehenden Hypothese genau genug ermitteln.

Nach HERGET kann man das Verbesserungsverfahren auch so durchführen, daß man in den strengen Beziehungen

$$y_\nu = U_\nu x_\nu - P_\nu; \quad z_\nu = V_\nu x_\nu - Q_\nu$$

die x_ν, y_ν, z_ν durch die Entwicklungsformeln ausdrückt. Es ist dann

$$y_0 F_\nu + \dot{y}_0 G_\nu = U_\nu (x_0 F_\nu + \dot{x}_0 G_\nu) - P_\nu,$$
$$z_0 F_\nu + \dot{z}_0 G_\nu = V_\nu (x_0 F_\nu + \dot{x}_0 G_\nu) - Q_\nu$$

oder, wenn man $y_0 = y_2$, $z_0 = z_2$ durch

$$\text{(VIII; 69)} \qquad y_0 = U_2 x_0 - P_2; \quad z_0 = V_2 x_0 - Q_2$$

eliminiert,

$$\text{(VIII; 70)} \quad \begin{cases} \dot{y}_0 G_\nu = x_0 (U_\nu - U_2) F_\nu + \dot{x}_0 U_\nu G_\nu + F_\nu P_2 - P_\nu, \\ \dot{z}_0 G_\nu = x_0 (V_\nu - V_2) F_\nu + \dot{x}_0 V_\nu G_\nu + F_\nu Q_2 - Q_\nu, \\ (\nu = 1, 3). \end{cases}$$

Aus den vier Gleichungen (VIII; 70) erhält man durch Elimination von $\dot{y}_0$ und $\dot{z}_0$

$$\text{(VIII; 71)} \quad \begin{aligned} & x_0 [(U_1 - U_2) F_1 G_3 - (U_3 - U_2) F_3 G_1] + \dot{x}_0 G_1 G_3 (U_1 - U_3) = \\ & \quad = P_1 G_3 - P_3 G_1 - P_2 (F_1 G_3 - F_3 G_1), \\ & x_0 [(V_1 - V_2) F_1 G_3 - (V_3 - V_2) F_3 G_1] + \dot{x}_0 G_1 G_3 (V_1 - V_3) = \\ & \quad = Q_1 G_3 - Q_3 G_1 - Q_2 (F_1 G_3 - F_3 G_1) \end{aligned}$$

zur Bestimmung von x_0 und $\dot{x}_0$. Diese Werte erlauben dann die Berechnung der übrigen Unbekannten aus (VIII; 69, 70).

Das Verbesserungsverfahren geht in diesem Fall so vor sich, daß man die Größen F_ν, G_ν mit den in erster Näherung vorliegenden Größen (VIII; 63) und den Zwischenzeiten berechnet und dann aus (VIII; 71, 69, 70) ein verbessertes System von Anfangswerten herleitet. Diese Rechnung wird so lange wiederholt, bis sich die F_ν, G_ν nicht mehr ändern.

Eine andere Variante des Verbesserungsverfahrens besteht darin, daß man (nach STUMPFF) R_ν, S_ν in (VIII; 66 bzw. 68) ganz vernachlässigt und statt dessen nach jeder Iteration die Abweichungen ΔU_ν, ΔV_ν neu berechnet, bis sie schließlich verschwinden. Man braucht die F_ν, G_ν bei diesem Verfahren im Lauf der Hypothesenrechnung normalerweise nicht mehr zu verbessern, ebensowenig wie die Größen x_ν auf der rechten Seite von (VIII; 66), da ja die Faktoren $\Delta x, \ldots \Delta V$ nach jedem Schritt kleiner werden und das Gewicht fehlerhafter F_ν, G_ν, x_ν herabdrücken. Das Verfahren ist beendet, wenn alle ΔU_ν, ΔV_ν null sind, da dann die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung hergestellt ist.

Die Konvergenz des Verbesserungsverfahrens wird schlecht, wenn die Determinante von (VIII; 71) klein ist; die Methode versagt ganz, wenn diese Determinante verschwindet. Ihr Wert ist, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$D = G_1 G_3 (F_1 G_3 - G_1 F_3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & U_1 & V_1 \\ 1 & U_2 & V_2 \\ 1 & U_3 & V_3 \end{vmatrix}.$$

Nun ist, wenn $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ die drei Ortsvektoren des Himmelskörpers zu den drei Zeiten t_1, t_2, t_3 sind,

$$\text{(VIII; 72)} \quad \begin{aligned} [\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2] &= [\mathfrak{p}_2 F_1 + \dot{\mathfrak{p}}_2 G_1, \ \mathfrak{p}_2] = -[\mathfrak{p}_2\dot{\mathfrak{p}}_2]\, G_1, \\ [\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3] &= [\mathfrak{p}_2, \ \mathfrak{p}_2 F_3 + \dot{\mathfrak{p}}_2 G_3] = \ [\mathfrak{p}_2\dot{\mathfrak{p}}_2]\, G_3, \\ [\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3] &= [\mathfrak{p}_2 F_1 + \dot{\mathfrak{p}}_2 G_1, \ \mathfrak{p}_2 F_3 + \dot{\mathfrak{p}}_2 G_3] = [\mathfrak{p}_2\dot{\mathfrak{p}}_2]\,(F_1 G_3 - F_3 G_1), \end{aligned}$$

und es ist daher, wenn wir allgemein mit $\langle \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \rangle$ die zu dem Vektorprodukt $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ gehörige Plangröße bezeichnen, $\langle \mathfrak{p}_2\dot{\mathfrak{p}}_2 \rangle = \sqrt{p}$, also

$$\text{(VIII; 73)} \qquad D = \frac{1}{\sqrt{p^3}} \langle \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \rangle \langle \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 \rangle \langle \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_1 \rangle \begin{vmatrix} 1 & U_1 & V_1 \\ 1 & U_2 & V_2 \\ 1 & U_3 & V_3 \end{vmatrix}.$$

Da aber $|\langle \mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_k \rangle|$ gleich dem doppelten Flächeninhalt des von den Vektoren $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_k$ eingeschlossenen Dreiecks ist, so sind die ersten Faktoren von (VIII; 73)

sämtlich von null verschieden, und D verschwindet nur, wenn

$$\begin{vmatrix} 1 & U_1 & V_1 \\ 1 & U_2 & V_2 \\ 1 & U_3 & V_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist, d.h. aber, wenn der Rauminhalt des von den drei topozentrischen Ortsvektoren gebildeten Parallelepipeds verschwindet. Dann liegen die drei sphärischen Örter des Planeten auf einem größten Kreis. Insbesondere ist die Bahnbestimmung unmöglich, wenn die drei Örter auf der Ekliptik liegen oder wenn zwei Örter zusammenfallen. Das letztere kann vorkommen, wenn die scheinbare Bahn des Planeten eine Schleife bildet und zwei der beobachteten Örter auf den Doppelpunkt dieser Schleife fallen. In allen diesen Fällen muß man mindestens noch eine weitere Beobachtung hinzuziehen, um das Problem zu lösen.

74. *Bahnbestimmung nach WILKENS und VÄISÄLÄ*

Von den zahlreichen Varianten, die außer den bereits geschilderten die Bahnbestimmungsmethode nach dem LAPLACEschen Prinzip gefunden hat, seit HARZER, POINCARÉ, LEUSCHNER und CHARLIER durch ihre Untersuchungen gezeigt haben, daß diese Methode an Genauigkeit und praktischer Verwendbarkeit der GAUSSschen Methode keineswegs unterlegen ist, sollen hier nur noch die Lösungen von A. WILKENS und Y. VÄISÄLÄ gewürdigt werden. Der Leser, der tiefer in die Materie einzudringen wünscht, als es hier im Rahmen eines allgemeinen Lehrbuchs der Himmelsmechanik möglich ist, sei auf die äußerst gründlichen Arbeiten von LEUSCHNER (die schon weiter oben erwähnt wurde) und CHARLIER[1]) hingewiesen. In der Analyse des Problems, die wir CHARLIER verdanken, und die von O. A. ÅKESSON[2]) ergänzt worden ist, sind auch die schönen Untersuchungen über die mehrfachen Lösungen und die singulären Fälle der Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen enthalten, deren Ergebnisse im Abschn. 68 dargestellt worden sind.

A. WILKENS[3]) benutzt zur Bildung der Grundgleichungen die aus den Beobachtungen ableitbaren Größen (VIII; 61)

$$C_\nu = \frac{x_\nu + X_\nu}{z_\nu + Z_\nu} = \operatorname{ctg} \delta_\nu \cos \alpha_\nu; \quad S_\nu = \frac{y_\nu + Y_\nu}{z_\nu + Z_\nu} = \operatorname{ctg} \delta_\nu \sin \alpha_\nu; \quad (\nu = 1, 2, 3),$$

die dem Fall (c) der Zusammenstellung (VIII; 62) entsprechen. Die Entwicklungsformeln

$$x_\nu = x_2 F_\nu + \dot{x}_2 G_\nu, \ldots \quad (\nu = 1, 3)$$

1) Meddelande från Lunds Observatorium Nr. 45–47 (1911).
2) ibid. Nr. 48.
3) Astron. Nachr. *210*, 81, 127 (1919).

schreibt er in der Form

$$x_\nu = x_2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_\nu^2}{r_2^3}\right) + \dot{x}_2\tau_\nu + \frac{1}{6}\tau_\nu^3 R_\nu(x), \quad \ldots,$$

wo $R_\nu(x)$, $R_\nu(y)$, $R_\nu(z)$ Restglieder bedeuten, die vorläufig vernachlässigt werden und erst zu berücksichtigen sind, wenn im Laufe der Hypothesenrechnung Näherungen der Unbekannten $x_2, \ldots \dot{z}_2$ vorliegen. Man erhält also, wenn zur Abkürzung

$$a_\nu = 1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_\nu^2}{r_2^3}$$

gesetzt wird, vier Gleichungen ($\nu = 1, 3$)

$$\begin{aligned} x_2 a_\nu + \dot{x}_2\tau_\nu - C_\nu(z_2 a_\nu + \dot{z}_2\tau_\nu) &= -X_\nu + C_\nu Z_\nu - \frac{1}{6}\tau_\nu^3[R_\nu(x) - C_\nu R_\nu(z)], \\ y_2 a_\nu + \dot{y}_2\tau_\nu - S_\nu(z_2 a_\nu + \dot{z}_2\tau_\nu) &= -Y_\nu + S_\nu Z_\nu - \frac{1}{6}\tau_\nu^3[R_\nu(y) - S_\nu R_\nu(z)] \end{aligned} \tag{VIII; 74}$$

und zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} x_2 - C_2 z_2 &= -X_2 + C_2 Z_2, \\ y_2 - S_2 z_2 &= -Y_2 + S_2 Z_2, \end{aligned} \tag{VIII; 75}$$

insgesamt also sechs Gleichungen zur Bestimmung der sechs Unbekannten als Funktionen der gegebenen Größen und der noch unbestimmten Größe $\frac{1}{r_2^3}$ sowie der in erster Näherung zu unterdrückenden Restglieder. Diese Formeln werden noch etwas einfacher, wenn man im System der Ekliptik rechnet und die Koordinaten der Sonne auf den locus fictus (siehe Abschn. 66) bezieht. Dann wird streng $Z_\nu = 0$.

Durch Elimination der übrigen Unbekannten läßt sich das System auf zwei Gleichungen für z_2 und $\dot{z}_2$ reduzieren. Aus ihnen ergibt sich z_2 als Funktion von $\frac{1}{r_2^3}$, außerdem besteht die geometrische Beziehung

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = [C_2(z_2 + Z_2) - X_2]^2 + [S_2(z_2 + Z_2) - Y_2]^2 + z_2^2.$$

Aus beiden Beziehungen erhält man durch Elimination von z_2 die Gleichung achten Grades für r_2. Der weitere Verlauf der Rechnung ist dann klar: Mit r_2 ergeben sich aus den Grundgleichungen (VIII; 74, 75) die ersten Näherungen für alle sechs Koordinaten, und man wiederholt dann die ganze Rechnung, nachdem man die Restglieder mit diesen genäherten Daten berechnet und den rechten Seiten von (VIII; 74) hinzugefügt hat. Die Iteration ist beendet, wenn sich die Restglieder nicht mehr ändern.

Y. Väisälä[1]) vermeidet in seiner Methode die Gleichung achten Grades ganz und beginnt statt dessen das Näherungsverfahren mit zwei verschiedenen Hypothesen über ϱ_2. Es sei

$$\sigma_2 = \varrho_2 \cos \delta_2$$

die mit einem solchen willkürlich angenommenen ϱ_2 gerechnete „kurtierte Distanz". Dann ist

$$x_2 = \sigma_2 \cos \alpha_2 - X_2, \quad y_2 = \sigma_2 \sin \alpha_2 - Y_2, \quad z_2 = \sigma_2 \operatorname{tg} \delta_2 - Z_2$$

und

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

Ferner ist genähert (für $\nu = 1, 3$)

$$F_\nu = 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_\nu^2}{r_2^3}, \quad G_\nu = \tau_\nu \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_\nu^2}{r_2^3}\right).$$

Setzt man dann, wie in Abschn. 72, $U_\nu = \operatorname{tg} \alpha_\nu$, so ergeben sich aus

$$y_\nu + Y_\nu = U_\nu (x_\nu + X_\nu),$$

$$x_\nu = x_2 F_\nu + \dot{x}_2 G_\nu; \quad y_\nu = y_2 F_\nu + \dot{y}_2 G_\nu$$

die beiden Gleichungen

$$G_1 \dot{y}_2 - U_1 G_1 \dot{x}_2 = U_1 (x_2 F_1 + X_1) - (y_2 F_1 + Y_1),$$

$$G_3 \dot{y}_2 - U_3 G_3 \dot{x}_2 = U_3 (x_2 F_3 + X_3) - (y_2 F_3 + Y_3)$$

zur Bestimmung von $\dot{x}_2$ und $\dot{y}_2$. Aus

$$x_\nu = \sigma_\nu \cos \alpha_\nu - X_\nu$$

folgt dann, für $\nu = 1, 3$,

$$\sigma_\nu = (x_2 F_\nu + \dot{x}_2 G_\nu + X_\nu) \sec \alpha_\nu.$$

Andererseits ist aber

$$z_\nu = z_2 F_\nu + \dot{z}_2 G_\nu = \sigma_\nu \operatorname{tg} \delta_\nu - Z_\nu,$$

d.h.

$$\dot{z}_2 = \frac{\sigma_\nu \operatorname{tg} \delta_\nu - z_2 F_\nu - Z_\nu}{G_\nu}.$$

Diese Größe erhält man also zweifach, je nachdem man sie aus der Gleichung für $\nu = 1$ oder $\nu = 3$ ableitet. Die Übereinstimmung der beiden Resultate ist das Kriterium für die Richtigkeit der Hypothese über ϱ_2 bzw. σ_2. Ergeben sich verschiedene $\dot{z}_2$, so bildet die Differenz

$$D = (\dot{z}_2)_3 - (\dot{z}_2)_1$$

die Grundlage für die Verbesserung der Hypothese.

---

[1]) Ann. Acad. Scient. Fennicae, Ser. A, 52, Nr. 2, Helsinki 1939.

Geht man nun von zwei Annahmen σ_2 und σ_2' aus, so erhält man die beiden Differenzen D und D'. Es ist dann zweckmäßig, als dritte Hypothese

$$\sigma_2'' = \frac{\sigma D' - \sigma' D}{D' - D}$$

zu versuchen, die $D'' = 0$ liefern würde, wenn die Funktion $D(\sigma_2)$ linear verliefe. Ist D'' noch nicht genügend klein, so wird man am besten so verfahren, daß man die zu den drei Argumenten $\sigma_2, \sigma_2', \sigma_2''$ gehörenden Ordinaten D, D', D'' durch eine Funktion zweiten Grades interpoliert und deren Nullstellen aufsucht.

Ist die Hypothesenrechnung so weit vorgeschritten, daß die Differenz D hinreichend klein geworden ist, so wird man die F_ν, G_ν mit den aus der letzten Hypothese erlangten Werten $x_2, y_2, z_2; \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$ genauer berechnen – an Stelle der beiden noch verschiedenen Werte $\dot{z}_2$ benutzt man dabei den interpolierten Wert

$$\dot{z}_2 = (\dot{z}_2)_1 + \frac{G_3 D}{G_3 - G_1} = (\dot{z}_2)_3 + \frac{G_1 D}{G_3 - G_1}.$$

Sind die $U_\nu = \operatorname{tg} \alpha_\nu$ sehr groß ($\alpha \approx 90°$ oder $270°$), so wird man die Rollen von x und y bzw. $\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{ctg} \alpha$ vertauschen. Man wird also nötigenfalls von der Möglichkeit Gebrauch machen, den Algorithmus den vorliegenden Verhältnissen anzupassen, so wie dies in der Zusammenstellung (VIII; 62) gezeigt worden ist.

Das insbesondere für die Bahnbestimmung von Planetoiden geeignete Verfahren erfordert eine gewisse Erfahrung, ohne die es in vielen Fällen schwierig sein wird, sofort die günstigsten Ausgangshypothesen für die geozentrische Distanz zu finden. Bei normalen Planetoiden (und meist auch bei Kometen) wird man mit $\sigma_2 = 1$ und $\sigma_2' = 1.5$ A. E. gewöhnlich Erfolg haben.

75. *Bestimmung parabolischer Bahnen*

Die bisher beschriebenen Methoden der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers stimmen darin überein, daß genauso viele unabhängige Beobachtungsdaten benutzt werden, wie es Bahnelemente zu berechnen gilt, also für eine Bahnbestimmung ohne Voraussetzung über die Exzentrizität sechs Daten (drei vollständige sphärische Örter).

Wenn man zu der Annahme berechtigt ist, daß die Bahn eine besondere Form (Parabel oder Kreis) hat, kommt man sogar mit weniger Daten aus. So wird man bei Kometen, die neu auftauchen und nicht zu den verhältnismäßig wenigen Himmelskörpern dieser Art mit periodischen Bahnen gehören, fast immer überzeugt sein dürfen, daß die Bahn eine Parabel ist oder doch von einer Parabel nur sehr wenig abweicht. Bei Planetoiden kommt es zuweilen vor, daß nach der Entdeckung nur noch eine weitere Beobachtung gelingt. Man wird dann, um das Objekt nicht ganz aus den Augen zu verlieren, gezwungen sein,

zunächst eine Kreisbahn zu berechnen, indem man von der Erfahrung ausgeht, daß die Mehrzahl der Planetoidenbahnen schwach exzentrische Ellipsen sind. Da Kreisbahnen schon durch vier Elemente bestimmt sind, braucht man zu ihrer Berechnung nur zwei vollständige Örter $(\alpha_1, \delta_1; \alpha_2, \delta_2)$.

Ist die Bahn eine Parabel, so genügen fünf unabhängige Daten zur Ableitung ihrer Elemente. Es wird also von den sechs sphärischen Koordinaten, die zu den drei Beobachtungszeiten t_1, t_2, t_3 gemessen werden, eine überzählig sein. A. WILKENS, der das Problem der parabolischen Bahnbestimmung nach dem LAPLACEschen Prinzip im Anschluß an seine allgemeine Methode der Bahnbestimmung (Abschn. 74) sehr gründlich diskutiert hat[1]), schlägt vor, die Größen $C_1, S_1; C_3, S_3$ und von der mittleren der drei Beobachtungen nur die Rektaszension (bzw. die ekliptikale Länge), also etwa $U_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ (bzw. $\operatorname{tg} \lambda_2$) heranzuziehen. Zur Bestimmung der sechs Größen $x_2, y_2, z_2; \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$ und von r_2 als siebenter Unbekannter sind dann fünf Gleichungen gegeben, außerdem aber die Bedingungsgleichungen

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

und (als Bedingung dafür, daß die Bahn eine Parabel ist)

$$V_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = \frac{2}{r_2}. \tag{VIII; 76}$$

Die fünf Gleichungen

$$C_\nu(z_\nu + Z_\nu) = x_\nu + X_\nu; \quad S_\nu(z_\nu + Z_\nu) = y_\nu + Y_\nu, \quad (\nu = 1, 3)$$
$$U_2(x_2 + X_2) = y_2 + Y_2$$

liefern, wenn man

$$x_\nu = x_2 F_\nu + \dot{x}_2 G_2; \quad y_\nu = y_2 F_\nu + \dot{y}_2 G_\nu; \quad z_\nu = z_2 F_\nu + \dot{z}_2 G_\nu$$

setzt, die Unbekannten $y_2, z_2; \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$ als lineare Funktionen von x_2, in denen allerdings noch die Entwicklungsfaktoren F_ν, G_ν vorkommen. Es genügt aber hier, in erster Näherung $F_\nu = 1$, $G_\nu = \tau_\nu$ zu setzen, im Gegensatz zur Bahnbestimmung für alle Exzentrizitäten, in der WILKENS $F = 1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_\nu^2}{r_2^3}$ setzte, um eine genäherte dynamische Beziehung zwischen den Koordinaten und r_2 zu erhalten. Hier wird diese dynamische Beziehung durch die Parabelbedingung (VIII; 76) eingeführt.

Man darf also schreiben

$$y_2 = a_y x_2 + b_y; \quad z_2 = a_z x_2 + b_z;$$
$$\dot{x}_2 = \alpha_x x_2 + \beta_x; \quad \dot{y}_2 = \alpha_y x_2 + \beta_y; \quad \dot{z}_2 = \alpha_z x_2 + \beta_z,$$

wobei die Koeffizienten in erster Näherung aus den Beobachtungen bekannt sind und erst im Laufe der Hypothesenrechnung durch genauere Bestimmung

[1]) Sitz. Ber. Bayer. Akad. d. Wiss. (math.-natw. Abt.) 1928.

der Faktoren F_ν, G_ν verbessert zu werden brauchen. Es ergeben sich dann für r_2 die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} r_2^2 &= x_2^2 + (a_y x_2 + b_y)^2 + (a_z x_2 + b_z)^2 = a^2 x_2^2 + 2b x_2 + c^2, \\ \frac{2}{r_2} &= (\alpha_x x_2 + \beta_x)^2 + (\alpha_y x_2 + \beta_y)^2 + (\alpha_z x_2 + \beta_z)^2 = \\ &= \alpha^2 x_2^2 + 2\beta x_2 + \gamma^2 \end{aligned} \tag{VIII; 77}$$

und aus ihnen durch Elimination von x_2 eine Gleichung *sechsten Grades* für r_2, die also im Falle der parabolischen Bahnbestimmung die Rolle der LAGRANGEschen Gleichung achten Grades übernimmt.

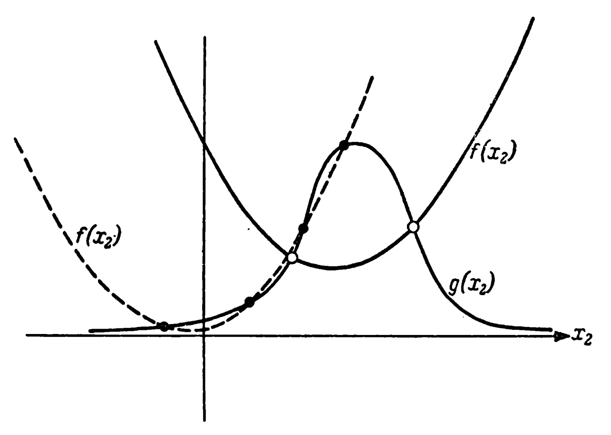


Abb. 58. Mehrfache Lösungen bei Parabelbahnen.

Die Diskussion dieser Gleichung, die WILKENS loc. cit. sehr gründlich durchgeführt hat, zeigt, daß im Normalfall zwei, in gewissen seltenen Sonderfällen auch vier reelle Lösungen existieren. Setzt man nämlich

$$r_2^2 = f(x_2) = a^2 x_2^2 + 2b x_2 + c^2,$$

$$r_2^2 = g(x_2) = \frac{4}{(\alpha^2 x_2^2 + 2\beta x_2 + \gamma^2)^2},$$

so stellt die erste dieser Funktionen eine Parabel dar, deren Achse parallel zur Ordinatenachse verläuft und die ganz in der oberen Halbebene liegt. Die zweite Funktion ist das Quadrat der Reziproken einer solchen Parabel – sie hat ein Maximum und fällt zu dessen beiden Seiten asymptotisch zur Abszissenachse ab. Abb. 58 läßt erkennen, daß vier Schnittpunkte der beiden Kurven nur möglich sind, wenn die Parabel mit dem Scheitel sehr nahe an den Nullpunkt heranreicht, so daß sie sowohl den sich der Abszissenachse nähernden Ast der zweiten Kurve als auch die Flanke ihrer Erhebung zum Maximum je zweimal

schneidet. In Abb. 58 ist die erste Kurve (Parabel) in zwei Lagen dargestellt: 1) Mit zwei Schnittpunkten (ausgezogene Kurve); 2) mit vier Schnittpunkten (gestrichelte Kurve). Eine ins einzelne gehende Diskussion, die man in der oben zitierten Abhandlung von A. WILKENS nachlesen möge, lehrt, daß im Falle einer Doppellösung die Pseudolösung von der wahren auch unabhängig vom LAMBERTschen Kriterium trennbar ist – eine „Erdbahnlösung" wie im allgemeinen Fall der Bahnbestimmung gibt es hier nicht, da ja die Erdbahn die Parabelbedingung (VIII; 76) nicht erfüllt. Im Fall einer vierfachen Lösung sind entweder drei gültige Bahnen oder nur eine vorhanden. Das läßt sich am deutlichsten in dem speziellen Fall sichtbar machen, daß die rechte Seite der ersten Gleichung (VIII; 77) sich auf das erste Glied reduziert. Dann wird $r = \pm a x$, und die zweite Gleichung geht dann in eine kubische Gleichung für x oder r über, besitzt also entweder eine oder drei reelle Lösungen, so daß auch drei positive Lösungen r möglich sind.

Man kann, nach CAUCHY, die Schlüsselgleichung der parabolischen Bahnbestimmung auch allgemein auf den dritten Grad reduzieren, wenn man ϱ als Unbekannte einführt. Setzt man wie am Schluß von Abschn. 71

$$x = \varrho f - X; \quad \dot{x} = \dot{\varrho} f + \varrho \dot{f} - \dot{X} \quad \text{usw.},$$

und setzt man nach (VIII; 54) $\dot{\varrho} = \frac{1}{2}\frac{D_2}{D_3}\varrho = K\varrho$, so kann man auch

$$\dot{x} = (Kf + \dot{f})\,\varrho - \dot{X}, \quad \ldots \quad \dot{z} = (Kh + \dot{h})\,\varrho - \dot{Z}$$

schreiben und erhält also die Parabelbedingung (VIII; 76) in der Form

$$\text{(a)} \qquad \frac{2}{r} = L\varrho^2 + M\varrho + N.$$

Andererseits folgt aus

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} + \frac{D}{D_3}\varrho,$$

$$r^2 = \varrho^2 - 2Q\varrho + R^2, \quad (Q = Xf + Yg + Zh)$$

durch Multiplikation eine Gleichung von der Form

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{r} = A\varrho^3 + B\varrho^2 + C\varrho + \frac{1}{R}.$$

Vergleicht man (a) mit (b), so ergibt sich tatsächlich eine Gleichung dritten Grades für ϱ.

Ist die Bahn ein *Kreis*, so tritt an Stelle der Parabelbedingung (a) die Kreisbedingung

$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{r} = L\varrho^2 + M\varrho + N,$$

die aber, wenn man die Erdbahn ebenfalls als Kreis ansieht, für $\varrho = 0$ erfüllt sein muß. Es ist also $N = \frac{1}{R}$. Setzt man (b) = (c), so ergibt sich daher

$$A\varrho^3 + (B - L)\varrho^2 + (C - M)\varrho = N - \frac{1}{R} = 0,$$

d.h., wenn man die triviale Lösung $\varrho = 0$ ausscheidet, eine *quadratische* Gleichung für ϱ.

Die Möglichkeit einer dreifachen Lösung bei der Bestimmung parabolischer Bahnen wurde zuerst von TH. v. OPPOLZER analytisch bewiesen und bei der Bahnbestimmung des großen Septemberkometen von 1882 auch evident gemacht. Trotzdem ist diese Möglichkeit von verschiedener Seite angezweifelt worden, bis T. BANACHIEWICZ[1]) ein fingiertes Beispiel veröffentlichte, in dem die vorgegebenen Daten sich durch drei verschiedene Parabelbahnen darstellen ließen. Die Untersuchung von WILKENS hat eine lange, mit großem Eifer geführte Diskussion über diese interessante Frage auch von der Theorie her beendet.

76. *Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen*

Wir haben bemerkt, daß unter gewissen Umständen eine Bahnbestimmung aus drei vollständigen sphärischen Örtern nicht möglich ist, nämlich dann, wenn gewisse Determinanten verschwinden, so daß die Auflösung der linearen Grundgleichungen oder auch der Verbesserungsgleichungen unmöglich wird. Insbesondere gehört hierher der Sonderfall, daß die drei Örter in der Ekliptik (oder in der unmittelbaren Nähe der Ekliptik) liegen. In diesen Ausnahmefällen wird man eine vierte Beobachtung zur Bahnbestimmung heranziehen müssen. Das gleiche ist der Fall, wenn die erste Bahnbestimmung auf mehrfache Lösungen führt und es nicht möglich ist, die Pseudolösung von der richtigen zu unterscheiden. Man wird dann allerdings die vierte Beobachtung nur als Kriterium für die Gültigkeit der einen oder der anderen Lösung, nicht aber zur Bahnbestimmung selbst benötigen.

In der in Abschn. 72 beschriebenen Methode dienten die Gleichungen (VIII; 56, 58) zur Bestimmung der für die Epoche $t = t_0$ gültigen Anfangswerte

$$x, y, z; \quad \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$$

als Funktionen von r^{-3}, wenn genäherte Werte der Größen U, V, P, Q und ihrer ersten beiden Ableitungen nach der Zeit durch Interpolation der gegebenen Werte U_ν, V_ν, P_ν, Q_ν ermittelt worden waren. Dieser Weg führte nur dann zum Ziel, wenn die Determinante des linearen Gleichungssystems (VIII; 58) von null genügend verschieden war.

Ist dies nicht der Fall, so kann man durch Hinzunahme eines vierten Ortes die Ableitungen der Funktionen U, V, P, Q bis zur 3. Ordnung einschließlich

[1]) Bull. Acad. Polon. des Sciences et des Lettres, Ser. A, 1924.

bestimmen und erhält dann außer (VIII; 56, 57) noch zwei weitere Gleichungen

$$\dddot{U} x + 3 \ddot{U} \dot{x} + 3 \dot{U} \ddot{x} + U \dddot{x} - \dddot{y} = \dddot{P},$$

$$\dddot{V} x + 3 \ddot{V} \dot{x} + 3 \dot{V} \ddot{x} + V \dddot{x} - \dddot{z} = \dddot{Q},$$

aus denen sich wegen

$$\ddot{x} = -\mu x; \quad \dddot{x} = -\mu \dot{x} + 3\mu\sigma x, \quad \cdots \quad \left(\mu = \frac{1}{r^2}, \quad \sigma = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r^2}\right)$$

anstatt (VIII; 58) die beiden Gleichungen

$$R = x\left(\dddot{U} - 2\frac{\dot{U}}{r^3}\right) + 3\dot{x}\ddot{U} - \left(\dddot{P} + \frac{\dot{P}}{r^3} + 3P\frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r^5}\right) = 0,$$

(VIII; 78)

$$S = x\left(\dddot{V} - 2\frac{\dot{V}}{r^3}\right) + 3\dot{x}\ddot{V} - \left(\dddot{Q} + \frac{\dot{Q}}{r^3} + 3Q\frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r^5}\right) = 0$$

herleiten lassen.

Nach einem Vorschlag von P. HERGET[1]) kann man dann so verfahren, daß man mit zwei verschiedenen Ausgangshypothesen über x die übrigen Anfangswerte nach (VIII; 56, 58) berechnet und dann die Gleichungen (VIII; 78) durch Interpolation und Variation der angenommenen x-Werte zu befriedigen sucht. Daß dieses Verfahren auch dann Aussicht auf Erfolg hat, wenn die Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen ganz unmöglich ist, z. B. wenn alle Örter des Himmelskörpers in der Ekliptik liegen, läßt sich leicht zeigen. Angenommen, man führe die Bahnrechnung im System der Ekliptik durch. Dann sind in diesem Ausnahmefall alle β_ν und daher auch alle $V_\nu = \operatorname{tg}\beta_\nu \sec\lambda_\nu$, alle z_ν und alle Q_ν nebst ihren Ableitungen null. Das Bestehen der zweiten Gleichung (VIII; 78), $S = 0$, ist daher trivial. Das Problem beschränkt sich dann auf die Lösung des Systems

$$y = Ux - P, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 2\dot{U}\dot{x} = \dot{P} + \frac{P}{r^3} - \ddot{U}x,$$

(VIII; 79)

$$\dot{y} = \dot{U}x + U\dot{x} - \dot{P}, \quad R = 0,$$

das aus vier Gleichungen mit den vier Unbekannten $x, y; \dot{x}, \dot{y}$ besteht, und dessen Auflösung durch Versuche auf Grund verschiedener Hypothesen über x (bis sich $R = 0$ ergibt) immer möglich ist. Es scheint allerdings, als versage dieses Verfahren, wenn $\dot{U} \approx 0$, d. h., wenn $\frac{d}{d\tau}(\operatorname{tg}\lambda) \approx 0$ ist, der Planet sich also z. Z. der Epoche gerade in der Nähe eines der Umkehrpunkte seiner scheinbaren Bewegung befindet, denn dann ist die Bestimmung von $\dot{x}$ aus der dritten Gleichung (VIII; 79) nicht oder nur ungenau möglich. In diesem Fall ist aber

---

[1]) Astron. Journ. *48*, 122 (1939).

sicher $\ddot{U} \neq 0$, und man wird, nachdem man mit vorgegebenem x die Größen y und r bestimmt hat, $\dot{x}$ aus der Beziehung $R = 0$ ermitteln können, in der man $\dot{y}$ nach (VIII; 79) substituiert hat (z und $\dot{z}$ sind ja null). Es ist dann x solange zu variieren, bis die Gleichung

$$2\dot{U}\dot{x} = \ddot{P} + \frac{P}{r^3} - \ddot{U}x$$

befriedigt ist. Für den Fall, daß genau $\dot{U} = 0$ ist, kann man auch aus

$$y = Ux - P; \quad 0 = \ddot{P} + \frac{P}{r^3} - \ddot{U}x; \quad r^2 = x^2 + y^2$$

durch Elimination von x und y eine Gleichung achten Grades für r herleiten, nach deren Auflösung man x und y erhält, während sich $\dot{x}$ und $\dot{y}$ aus $R = 0$ und $\dot{y} = U\dot{x} - \dot{P}$ berechnen lassen.

Daß eine Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen nur *eine* Lösung außer der trivialen Erdbahnlösung hat, läßt sich folgendermaßen zeigen:

Nach (VIII; 54) kann man (nach C. V. L. CHARLIER) schreiben

$$\dot{\varrho} = K\varrho; \quad \ddot{\varrho} = K_1\varrho + K_2\varrho^2,$$

wo K, K_1, K_2 Funktionen der Richtungsgrößen f, g, h bzw. der sphärischen Koordinaten α, δ und deren ersten beiden Ableitungen sind. Differenziert man die erste dieser Gleichungen noch einmal nach der Zeit:

$$\ddot{\varrho} = \dot{K}\varrho + K\dot{\varrho} = (\dot{K} + K^2)\varrho$$

und vergleicht sie mit der zweiten, so entsteht, nachdem man die triviale Lösung $\varrho = 0$ ausgeschieden hat, die lineare Gleichung

$$K_2\varrho = \dot{K} + K^2 - K_1$$

für ϱ, in der $\dot{K}$ auch die dritten Ableitungen von α und δ enthält, die ja (angenähert) bekannt sind, wenn vier Beobachtungen vorliegen.

Während für die Anwendbarkeit der hier skizzierten Methode noch sehr wenig Erfahrungen vorliegen, ist das entsprechende auf dem GAUSSschen Randwertprinzip beruhende Verfahren der Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen (siehe Abschn. 85) häufig angewandt und von einem so erfahrenen Rechner wie A. BERBERICH auf eine praktisch bewährte Form gebracht worden.

77. *Bahnverbesserung auf Grund zusätzlicher Beobachtungen*

Einer der einleuchtendsten Vorteile der Bahnbestimmungsmethoden nach dem LAPLACEschen Prinzip besteht darin, daß man die Formeln des Verbesserungsverfahrens unverändert dazu benutzen kann, beliebig viele weitere Beobachtungsdaten zur Verbesserung des aus den unumgänglich nötigen drei Örtern bestimmten Systems der Bahnelemente heranzuziehen.

Berechnet man z.B. mit den aus einer ersten Bahnbestimmung stammenden Anfangswerten $x_0 \ldots \dot{z}_0$, die zu der Epoche $t = t_0$ gehören mögen, nacheinander für alle verfügbaren Beobachtungszeiten die Größen F_ν, G_ν; x_ν, y_ν, z_ν; ΔU_ν, ΔV_ν, so erhält man (für $\nu = 1, 2, \ldots n$) $2n$ Gleichungen (VIII; 66), in denen man die Reste R_ν, S_ν unbedenklich vernachlässigen kann, da die eventuell noch erforderlichen Korrektionen ΔF_ν, ΔG_ν kaum noch ins Gewicht fallen werden. Ist $n > 3$, so hat man also zur Bestimmung der sechs Korrektionen $\Delta x, \ldots \Delta \dot{z}$ $2n - 6$ überzählige Gleichungen zur Verfügung. Das System von insgesamt $2n$ Gleichungen läßt sich durch keine Lösung voll befriedigen, da die Daten (U_ν, V_ν) durch Beobachtungsfehler (evtl. auch durch Störungen) entstellt, die dynamisch-geometrischen Zusammenhänge zwischen ihnen also nicht ganz streng erfüllt sind. Für irgendein System $\Delta x, \ldots \Delta \dot{z}$ wird also

$$\begin{aligned}
&G_\nu \Delta \dot{y} - U_\nu G_\nu \Delta \dot{x} + F_\nu \Delta y - U_\nu F_\nu \Delta x = \\
&\qquad = (x_\nu + X_\nu)\, \Delta U_\nu + R_\nu = \delta_\nu, \\
&G_\nu \Delta \dot{z} - V_\nu G_\nu \Delta \dot{x} + F_\nu \Delta z - V_\nu F_\nu \Delta x = \\
&\qquad = (x_\nu + X_\nu)\, \Delta V_\nu + S_\nu = \varepsilon_\nu, \\
&(\nu = 1, 2, \ldots n)
\end{aligned} \tag{VIII; 80}$$

gelten, wo δ_ν, ε_ν kleine Größen (Widersprüche) bedeuten, die nur bei völliger Fehlerfreiheit der Beobachtungsdaten und der vorläufigen Elemente verschwinden würden.

GAUSS hat die Aufgabe, unter allen möglichen Lösungen eines überbestimmten Systems von linearen Gleichungen das mit der größten Wahrscheinlichkeit richtige auszuwählen, durch seine „*Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*“ gelöst. Nach ihr wird das wahrscheinlichste System der Unbekannten so bestimmt, daß die Quadratsumme der Widersprüche, $\sum_{\nu=1}^{n} (\delta_\nu^2 + \varepsilon_\nu^2)$, so klein wie möglich wird. Sei

$$a_\nu \Delta x + b_\nu \Delta y + c_\nu \Delta z + d_\nu \Delta \dot{x} + e_\nu \Delta \dot{y} + f_\nu \Delta \dot{z} = g_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \ldots 2n)$$

die allgemeine Form der gegebenen Gleichungen, so findet man diejenige Lösung mit der kleinsten „Fehlerquadratsumme“ durch Auflösung der sechs „Normalgleichungen“

$$\begin{aligned}
&[aa]\, \Delta x + [ab]\, \Delta y + [ac]\, \Delta z + \cdots + [af]\, \Delta \dot{z} = [ag], \\
&[ba]\, \Delta x + [bb]\, \Delta y + [bc]\, \Delta z + \cdots + [bf]\, \Delta \dot{z} = [bg], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&[fa]\, \Delta x + [fb]\, \Delta y + [fc]\, \Delta z + \cdots + [ff]\, \Delta \dot{z} = [fg],
\end{aligned}$$

in denen

$$[aa] = \sum_{\nu=1}^{2n} a_\nu^2; \quad [ab] = [ba] = \sum_{\nu=1}^{2n} a_\nu b_\nu; \quad \ldots$$

gesetzt ist.

Hierzu mögen noch einige praktische Bemerkungen Platz finden:

1. Es ist zweckmäßig, die „Epoche", für die die vorläufigen Elemente $x_0 \ldots \dot{z}_0$ gelten, möglichst auf die Mitte des von allen n Beobachtungen überdeckten Intervalls zu legen, damit die Beträge der Zwischenzeiten auch für diejenigen Beobachtungen, die an den Rändern des Intervalls liegen, so klein wie möglich bleiben. Man erreicht das, indem man die aus der ersten Bahnbestimmung stammenden und für die mittlere der dabei benutzten Beobachtungszeiten gültigen Anfangswerte mit Hilfe der Entwicklungsformeln (V; 61) auf einen anderen Zeitpunkt überträgt, der in der Mitte des gesamten mit Beobachtungen belegten Zeitraums liegt.

2. Die Berücksichtigung der von ΔF_ν, ΔG_ν abhängigen Restgrößen R_ν, S_ν, die man nach einer ersten Auflösung der Normalgleichungen berechnen und in einem zweiten Rechnungsgang in die Ausgleichung einbeziehen könnte, wird nur dann erforderlich sein, wenn ihre Beträge an den Rändern des Intervalls mit den nach der Ausgleichung noch übrigbleibenden Widersprüchen größenordnungsmäßig vergleichbar sind. Das wird aber nur selten der Fall sein.

3. Wenn die Widersprüche auch nach erfolgter Ausgleichung noch einen deutlichen zeitlichen Gang zeigen, was bei größerer Ausdehnung des von den Beobachtungen eingenommenen Zeitintervalls möglich ist, so ist dies ein Zeichen dafür, daß die Voraussetzung einer ungestörten KEPLERschen Bewegung nicht streng erfüllt ist, daß sich also die Störungen durch die großen Planeten (bei Planetoiden in erster Linie die Störungen durch Jupiter) bemerkbar machen. Eine Methode, diese Störungen für beschränkte Zeitintervalle zu berücksichtigen, soll im nächsten Abschnitt entwickelt werden. Wenn es sich um längere Zeiten handelt oder wenn gar die Beobachtungen eines Planetoiden aus mehreren Oppositionen zu berücksichtigen sind, wachsen die Störungsbeträge so stark an, daß ihre Berechnung besondere numerische Methoden („spezielle Störungsrechnung") erfordert, die erst im Band II dieses Werkes im Zusammenhang mit dem Dreikörperproblem entwickelt werden sollen. Eine Methode, bei der die Störungen schon im Zuge der ersten Bahnbestimmung in Rechnung gestellt werden, ist von LEUSCHNER angegeben worden, eine andere (Methode von NUMEROFF) findet der Leser im nächsten Kapitel (Abschn. 87).

4. Meistens werden die Widersprüche, die beim Einsetzen der aus der ersten Bahnbestimmung stammenden Anfangswerte übrigbleiben, bereits so klein sein, daß ihre durch die zufälligen Beobachtungsfehler hervorgerufene Streuung merklich größer ist als der aus den Fehlern der Anfangswerte stammende zeitliche Gang („Trend"). Dieser systematische Gang der Widersprüche, den man auch durch Glättung der als Funktion der Zwischenzeit aufgetragenen Widersprüche $\delta_\nu(\tau)$ und $\varepsilon_\nu(\tau)$ herausarbeiten könnte, wird im allgemeinen sehr wenig gekrümmt sein, so daß man ihn für kleinere Zeitintervalle als linear ansehen kann. In diesem Fall wird man das Ergebnis der Ausgleichung nur unmerklich (d.h. weit innerhalb der durch die zufälligen Beobachtungsfehler gegebenen Unsicherheitsgrenzen) beeinflussen, wenn man jeweils mehrere zeitlich benachbarte Beobachtungsdaten durch Bildung arithmetischer Mittel zusammenfaßt (d.h., daß man das Mittel der Widersprüche dem Mittel der Beobachtungszeiten zuschreibt) und diese „Normalörter" der Ausgleichung unterwirft. Man

kann auf diese Weise die Zahl der Fehlergleichungen erheblich vermindern und dadurch die Bildung der Normalgleichungen wesentlich erleichtern. In günstig gelegenen Fällen gelingt es mitunter, die Anzahl der Normalörter auf drei herabzudrücken. Das Problem ist dann bereits bestimmt, eine Ausgleichung erübrigt sich also.

78. *Berücksichtigung von Störungen. Definitive Bahnen*

Bei allen bisherigen Lösungen des Bahnbestimmungsproblems wurde vorausgesetzt, daß der Himmelskörper sich streng in einer ungestörten Kegelschnittbahn bewegt. Das ist zulässig, solange die Beobachtungen, auf denen die Bahnbestimmung beruht, ein so kurzes Bahnstück überdecken, daß die Gestalt der Bahn durch die deformierende Wirkung der störenden Kräfte weniger beeinflußt wird als ihre Berechnung durch die zufälligen Beobachtungsfehler. Als obere Schranke für das Zeitintervall, in dem die Beobachtungen eingeschlossen sein müssen, damit eine Bahnbestimmung ohne Berücksichtigung der Störungen zulässig ist, wird bei Planetoiden meist eine Spanne von sechzig Tagen angesetzt, doch kann dieser Betrag je nach den Umständen und nach der angestrebten Rechengenauigkeit auch größer oder kleiner sein.

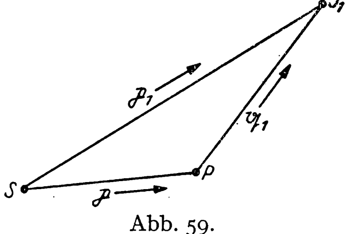


Abb. 59.
Dreieck Sonne–Planet–Jupiter.

Die Kegelschnittbahn, die sich ergibt, wenn man die Anfangswerte $x_0 \ldots \dot{z}_0$ zur Epoche $t = t_0$ einer ungestörten Bewegung um die Sonne zugrunde legt, heißt die „oskulierende Bahn" (lat. osculari = anschmiegen, küssen), da sie sich der wirklichen, gestörten, mit der sie die Anfangswerte (den Ortsvektor $\mathfrak{p}_0$ und den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{p}}_0$ zur Zeit t_0) gemeinsam hat, im Zeitpunkt t_0, der „Oskulationsepoche", anschmiegt. Erst die zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit, die Beschleunigung $\ddot{\mathfrak{p}}_0$, und die höheren Differentialquotienten sind für die wahre und die oskulierende Bahn verschieden, da infolge des Hinzutretens der störenden Kräfte der gestörten Bewegung ein anderes Attraktionsgesetz zugrundeliegt.

Sei $\mathfrak{p}$ der von der Sonne zum Planeten führende Ortsvektor (Abb. 59), $\mathfrak{p}_1$ der heliozentrische Ortsvektor des störenden Planeten J_1 (Jupiter) und $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}$ der Vektor, der vom Planetoiden zum störenden Planeten führt, und sei

$$|\mathfrak{p}| = r; \quad |\mathfrak{p}_1| = r_1; \quad |\mathfrak{q}_1| = \varrho_1.$$

Dann wird, wie bekannt, die ungestörte Bewegung des Planetoiden durch die Differentialgleichung

$$\ddot{\mathfrak{p}} = -\frac{\mathfrak{p}}{r^3}$$

dargestellt. Durch den Störplaneten J_1, dessen Masse, ausgedrückt in Einheiten

der Sonnenmasse, m_1 sei, erleiden Planetoid und Sonne Beschleunigungen, die nach Größe und Richtung durch die Vektoren

$$m_1 \frac{\mathfrak{q}_1}{\varrho_1^3} \quad \text{bzw.} \quad m_1 \frac{\mathfrak{p}_1}{r_1^3} \tag{VIII; 81}$$

dargestellt werden. Die Beschleunigung des Vektors $SP = \mathfrak{p}$ wird also durch die Differenz der beiden Beschleunigungen (VIII; 81) vermehrt, die seine Enden P und S zusätzlich erleiden. Die Bewegung des Planetoiden genügt also, wenn wir nur die Störung durch den Planeten Jupiter ($m_1 = 1/1047$) berücksichtigen, der Differentialgleichung

$$\ddot{\mathfrak{p}} = -\frac{\mathfrak{p}}{r^3} + m_1\left(\frac{\mathfrak{q}_1}{\varrho_1^3} - \frac{\mathfrak{p}_1}{r_1^3}\right). \tag{VIII; 82}$$

Für jeden weiteren Störplaneten, dessen Einfluß berücksichtigt werden soll, tritt ein entsprechendes, seiner Masse proportionales Störungsglied hinzu.

Ist ein Himmelskörper lange Zeit hindurch beobachtet worden (z.B. ein Komet während der gesamten Sichtbarkeitsdauer oder ein Planetoid in mehreren Oppositionen), so wird man die Abweichungen zwischen der gestörten und der oskulierenden Bahn durch Integration des Differentialgleichungssystems (VIII; 82) zu ermitteln haben. Das geschieht, wie schon im vorigen Abschnitt erwähnt wurde, durch die Berechnung „spezieller Störungen", deren Methoden im nächsten Band behandelt werden sollen. Bei der Verbesserung der oskulierenden Bahnelemente wegen der Störungen wird man so vorgehen, daß man die Störungsbeträge, um die sich die Koordinaten infolge der Wirkung der Störungskräfte ändern, von den beobachteten Koordinaten abzieht. Man erhält dann ungestörte Größen, mit denen man nach den im Abschn. 77 behandelten Methoden der Bahnverbesserung die ursprünglichen Ausgangswerte korrigieren kann. Wenn nötig, ist das Verfahren mit den verbesserten Anfangswerten zu wiederholen. Die so erhaltenen endgültigen Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten bestimmen die *definitive* oskulierende Bahn des Himmelskörpers. Ihre Elemente werden die größtmögliche Genauigkeit aufweisen, die auf Grund des verfügbaren Beobachtungsmaterials erwartet werden kann.

Wenn es sich nur darum handelt, eine Bahnbestimmung aus einem Zeitintervall durchzuführen, das relativ kurz, aber doch zu lang ist, als daß man die Störungen ganz außer acht lassen dürfte, so genügt es, für die Störungen genäherte Werte zu benutzen, wie man sie leicht erhält, wenn man die gestörten Koordinaten in Potenzreihen nach der Zwischenzeit entwickelt und von den mit der Masse des störenden Körpers multiplizierten Termen nur die ersten berücksichtigt. Eine Entwicklungsformel, die für Planetoidenörter im Laufe einer Sichtbarkeitsperiode brauchbar ist, erhält man leicht, wenn man (wie es in Abschn. 56 für die ungestörte Bewegung gezeigt wurde) die Koeffizienten der TAYLORschen Reihe

$$x(\tau) = x_0 + \dot{x}_0\tau + \ddot{x}_0\frac{\tau^2}{2!} + \dddot{x}_0\frac{\tau^3}{3!} + \cdots$$

(und entsprechender Reihen für y und z) mit Hilfe der Differentialgleichung (VIII; 82)

(VIII; 83) $$\ddot{x} = -\frac{x}{r^3} + m_1\left(\frac{x_1 - x}{\varrho_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right)$$

und der für Jupiter gültigen Bewegungsgleichung[1])

(VIII; 84) $$\ddot{x}_1 = -(1 + m_1)\frac{x_1}{r_1^3}$$

nebst den sukzessiven Ableitungen dieser Ausdrücke nach der Zeit bestimmt. Die beim Differenzieren neu auftretenden zweiten Ableitungen sind dabei stets durch (VIII; 83, 84) zu eliminieren.

Schreibt man zur Abkürzung

$$x_1 - x = \xi_1, \quad y_1 - y = \eta_1, \quad z_1 - z = \zeta_1, \quad (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \varrho_1^2),$$

so erhält man

$$\ddot{\xi}_1 = \ddot{x}_1 - \ddot{x} = \frac{x}{r^3} - \frac{x_1}{r_1^3} - m_1\frac{\xi_1}{\varrho_1^3}.$$

Ferner setze man symbolisch

$$(r_1\dot{r}_1) = x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1 + z_1\dot{z}_1; \quad (\varrho_1\dot{\varrho}_1) = \xi_1\dot{\xi}_1 + \eta_1\dot{\eta}_1 + \zeta_1\dot{\zeta}_1.$$

Dann ergibt sich für die von der Masse des Störplaneten abhängigen Anteile an den Koordinaten des gestörten Körpers bis zur 3. Ordnung in den Zwischenzeiten einschließlich

(VIII; 85)
$$\sigma(x) = m_1\frac{\tau^2}{2}\left(\frac{\xi_1}{\varrho_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right) + m_1\frac{\tau^3}{6}\left[\frac{\dot{\xi}_1}{\varrho_1^3} - \frac{\dot{x}_1}{r_1^3} - 3\left(\frac{\xi_1(\varrho_1\dot{\varrho}_1)}{\varrho_1^5} - \frac{x_1(x_1\dot{x}_1)}{r_1^5}\right)\right] + \cdots.$$

Die nächst höheren Terme haben bereits eine sehr verwickelte Form, andererseits sind sie (wenn nicht gerade eine sehr nahe Begegnung der beiden Körper stattfindet, also ϱ_1 klein wird) bei den mäßigen Zwischenzeiten, die bei Planetoiden während einer Opposition vorkommen, stets klein genug, um vernachlässigt zu werden.

Für eine rohe Abschätzung der Störungsbeträge für den Fall eines Planetoiden in mittlerem Sonnenabstand genügt es, den ersten Term der Reihe (VIII; 85) zu berechnen. Der Einfachheit halber sei angenommen, daß beide Körper in der x, y-Ebene um die Sonne laufen und daß die Bahnen kreisförmig sind. Wir setzen dann die runden Zahlenwerte $m_1 = 1/1000$, $r_1 = 5$, $r = 2.5$ an, die etwa den durchschnittlichen Verhältnissen entsprechen, die man bei den durch Jupiter gestörten Planetoiden antrifft. Die y-Achse des Koordi-

[1]) Da die Koordinaten $x_1, \ldots z_1$ in (VIII; 83) mit dem kleinen Faktor m_1 behaftet sind, genügt es, eine ungestörte Bahnbewegung des störenden Planeten gemäß (VIII; 84) anzusetzen.

natensystems sei z. Z. der Epoche t_0 nach dem Ort des Jupiter gerichtet, die Längendifferenz zwischen Planetoid und Jupiter sei λ. Dann ist $x_1 = 0$, $y_1 = r_1$; $x = -r \sin \lambda$, $y = r \cos \lambda$, und man erhält für drei charakteristische Stellungen

$\lambda = 0°$ (Konjunktion); $\lambda = \pm 90°$ (Quadratur); $\lambda = 180°$ (Opposition)

des Planeten zu Jupiter folgende numerischen Werte für die in den Störungsgliedern

$$\sigma(x) = m_1 \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{x_1 - x}{\varrho_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right); \quad \sigma(y) = m_1 \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{y_1 - y}{\varrho_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right)$$

mit $m_1 \dfrac{\tau^2}{2}$ multiplizierten Ausdrücke:

λ	$\dfrac{x_1 - x}{\varrho_1^3} - \dfrac{x_1}{r_1^3}$	$\dfrac{y_1 - y}{\varrho_1^3} - \dfrac{y_1}{r_1^3}$
0°	0	0.120
±90°	±0.014	−0.011
180°	0	−0.022

Für eine Zwischenzeit von $1/k = 58.13$ Tagen ($\tau = \pm 1$), die, wenn man von der Mitte des Beobachtungszeitraums als Epoche ausgeht, nur selten übertroffen wird, sind diese Beträge noch mit 1/2000 zu multiplizieren. Der größte Störungseffekt, der sich während der größten Annäherung der beiden Himmelskörper bemerkbar macht, vergrößert also die nach dem Störplaneten gerichtete Komponente des Ortsvektors um etwa 6 Einheiten der fünften Dezimale, während in der Quadratur und in der Opposition der störende Einfluß dieses Terms etwa um eine Größenordnung kleiner ist.

Diese Abschätzung zeigt, daß es bei ersten Bahnbestimmungen auch bei größeren Zwischenzeiten nicht nötig ist, die Entwicklung der Koordinaten bzw. der Größen F und G genauer durchzuführen, als dies etwa mit Hilfe der Formeln (VII; 20) vorgesehen ist. Denn wenn die in diesen für die Rechnung sehr bequemen Formeln vernachlässigten Glieder merkliche Beträge erreichen sollten, werden diese kaum größer sein als die ebenfalls vernachlässigten Jupiterstörungen. Eine strenge Berechnung der Koordinaten lohnt sich nur dann, wenn man auch die Störungen mit berücksichtigt, soweit sie die Genauigkeitsschwelle der Rechnung überschreiten. Hierzu werden normalerweise die Ausdrücke (VIII; 85) ausreichen[1]).

---

[1]) Siehe auch K. STUMPFF: Untersuchungen über das Problem der speziellen Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten. Astron. Nachr. *273*, 105 (1942).

KAPITEL IX

BAHNBESTIMMUNG DER HIMMELSKÖRPER NACH DEM GAUSSSCHEN PRINZIP

79. *Bahnbestimmung als Randwertproblem*

Während die bisher beschriebenen Methoden der Bahnbestimmung stets auf die Ermittlung der Anfangsbedingungen (VIII; 63) für die Bewegung des Himmelskörpers, bezogen auf einen Zeitpunkt $t = t_0$, abzielten, ist das von C. F. GAUSS und W. OLBERS in ihren klassischen Arbeiten verfolgte Prinzip (das übrigens auch schon von LAGRANGE formuliert, aber noch nicht auf eine praktisch verwendbare Form gebracht worden ist) das der Ermittlung von zwei vollständigen heliozentrischen Örtern

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_3, y_3, z_3$$

des Himmelskörpers zu den beiden Beobachtungszeiten t_1 und t_3. Aus ihnen können ja (siehe Abschn. 50–52) die Kegelschnittelemente der Bahn berechnet werden. Ein wesentlicher Vorteil dieses Prinzips springt in die Augen: Während es bei den Bahnbestimmungen über die Anfangswerte nötig war, sechs Unbekannte in die Rechnung einzuführen und fortlaufend zu iterieren, erfordert das GAUSSsche Prinzip im wesentlichen nur deren zwei, nämlich die geozentrischen Distanzen ϱ_1, ϱ_3 der beiden äußeren der drei Örter, denn durch sie und die beobachteten sphärischen Koordinaten $\alpha_1, \delta_1; \alpha_3, \delta_3$ bzw. $\lambda_1, \beta_1; \lambda_3, \beta_3$, wenn man im System der Ekliptik rechnet, sind ja die topozentrischen Koordinaten ξ, η, ζ und demnach, in Verbindung mit den Sonnenkoordinaten X, Y, Z, die beiden zu t_1 und t_3 gehörenden räumlichen Örter bestimmt.

Der Grundgedanke der GAUSSschen Methode läßt sich leicht geometrisch verständlich machen. Gegeben sind durch die Beobachtungen drei Richtungen im Raum, die von den drei Beobachtungsörtern B_1, B_2, B_3 (oder von den drei locis fictis F_1, F_2, F_3) zu den in unbekannten Entfernungen liegenden Planetenörtern P_1, P_2, P_3 hinführen. Von diesen wissen wir, daß sie auf einer Ebene liegen, die durch den Sonnenmittelpunkt hindurchgeht. Die Aufgabe lautet dann, die Lagekoordinaten (i, Ω) dieser Ebene so zu bestimmen, daß die Schnittpunkte der Ebene mit den drei Geraden so beschaffen sind, daß sie den KEPLERschen Gesetzen genügen. Das bedeutet aber folgendes: Aus Abschn. 50 wissen wir, daß je zwei Örter, etwa P_1 und P_3, zusammen mit der Zwischenzeit $t_3 - t_1$, eine KEPLERsche Bahn definieren; die Aufgabe wird also gelöst sein, wenn es gelingt, die Ebene (i, Ω) bzw. die Distanzen $(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ so zu bestimmen, daß jede der drei Kombinationen $(P_1 P_2)$, (P_2, P_3), (P_1, P_3) auf dieselbe Bahn führt. Es müssen also insbesondere die zwischen den Endpunkten dieser Intervalle ausgespannten Kegelschnittsektoren den zugehörigen Zwischenzeiten proportional sein.

Man könnte eine erste Näherung für die gesuchten Größen erlangen, wenn man die Verhältnisse der Sektoren durch die der Dreiecke ersetzt, deren In-

halte man direkt durch die Koordinaten der Örter ausdrücken kann. In Abschn. 65 ist gezeigt worden, daß die Dreiecksflächen sich angenähert wie die Zwischenzeiten verhalten, wenn diese klein sind, und daß die Abweichungen von der zweiten, bei annähernd äquidistanten Beobachtungszeiten von der 3. Ordnung in den Zwischenzeiten sind. Diese Näherung wäre aber streng nur für eine geradlinig-gleichförmige Bewegung zwischen den beiden Bahnpunkten erfüllt, d.h. unter Vernachlässigung der auf den Planeten wirkenden Attraktionskraft. Es ist aber notwendig (und hier gelten die gleichen Überlegungen wie im vorigen Kapitel), die dynamischen Beziehungen zwischen den Planetenörtern von Anfang an wenigstens genähert zu berücksichtigen. Man kann also die eben angedeutete Vereinfachung nur dann anwenden, wenn die dynamischen Zusammenhänge anderweitig zum Ausdruck kommen. Das ist z.B. bei der Bestimmung von Parabelbahnen der Fall, denn dort konnte (Abschn. 75) die Bedingung (VIII; 76) eingeführt werden; auch die EULERsche Gleichung (VI; 13), die OLBERS in seiner Methode der Kometenbestimmung (Abschn. 84) verwendet, leistet dieselben Dienste.

Bei der Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen ohne Voraussetzung über die Exzentrizität wird man, um die Dynamik des Vorgangs wenigstens genähert ausdrücken zu können (ohne andere Unbekannte außer den Ortskoordinaten benutzen zu müssen), die Entwicklung der Verhältnisse der Dreiecksflächen nach Potenzen der Zwischenzeit bis zu jenem Gliede ausdehnen müssen, das $\mu = r_2^{-3}$ als Faktor enthält. Es ist also

$$\frac{D_\alpha}{D_\beta} = \left|\frac{\tau_\alpha}{\tau_\beta}\right| \left\{1 - \frac{1}{6}\mu\,(\tau_\alpha^2 - \tau_\beta^2) + \cdots\right\}$$

zu setzen, und in Verbindung mit den rein geometrischen Gegebenheiten führt diese Beziehung wieder auf die Gleichung achten Grades für r_2 bzw. die GAUSSsche Gleichung (VIII; 36), die somit auch hier als Schlüsselgleichung des Problems auftreten wird.

Aus diesen zunächst ganz heuristischen Überlegungen geht bereits hervor, daß in bestimmten Fällen eine Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen unmöglich ist, nämlich immer dann, wenn mindestens eine der drei Richtungsgeraden $B_i P_i$ in der Bahnebene liegt, da dann ein eindeutig definierter Schnittpunkt zwischen der Geraden und der Ebene nicht existiert. Das trifft namentlich dann zu, wenn sich der Himmelskörper in der Ekliptik bewegt, denn dann fallen sogar alle drei Geraden in die Bahnebene; ferner dann, wenn einer der drei sphärischen Örter mit dem Gegenpunkt der Sonne (oder, was allerdings praktisch bedeutungslos ist, mit dem sphärischen Sonnenort selbst) zusammenfällt, denn dann geht ja die betreffende Gerade durch die Sonne und gehört somit der Bahnebene an.

Die GAUSSsche Methode der Bahnbestimmung wird dem Anfänger, im Gegensatz zu den Methoden nach dem LAPLACEschen Prinzip, immer sehr verwickelt und undurchsichtig erscheinen. Das liegt daran, daß GAUSS in allerdings genialer Weise den Formalismus seines Verfahrens den Bedürfnissen des praktischen Rechners (zu seiner Zeit also der logarithmisch-trigonometrischen

Rechenweise) anzupassen bemüht war. Dadurch ist in den klassischen Darstellungen dieser Methode die Klarheit der Gedankenführung durch z.T. unübersichtliche Rechenoperationen verdeckt worden. Dennoch ist es kaum schwieriger als bei den im vorigen Kapitel behandelten Methoden, den Gang der Überlegungen mit wenigen Strichen deutlich werden zu lassen, wenn man das Gewicht zunächst auf die Idee und weniger auf die Art ihrer rechnerischen Verwirklichung legt. Sehr zustatten kommt diesem Zweck die Verwendung der vektoriellen Schreibweise, die in den älteren Darstellungen fast immer vermieden worden ist.

Hier möge auf die sehr eindrucksvolle Analyse des Bahnbestimmungsproblems als einer Randwertaufgabe verwiesen werden, die wir H. BUCERIUS[1]) verdanken und die an das anknüpft, was in Abschn. 47 über die Integralgleichung des Zweikörperproblems gesagt worden ist. Seien $\mathfrak{p}_1(t_1)$ und $\mathfrak{p}_3(t_3)$ die Randwerte des Ortsvektors $\mathfrak{p}(t)$ im Intervall $t_1 \leqq t \leqq t_3$ und wählt man $t_3 - t_1$ als Zeiteinheit, so ist, mit $\varkappa = k(t_3 - t_1)$ als Gravitationskonstante und $t_1 = 0$, $t_3 = 1$,

$$\text{(IX; 1)} \qquad \mathfrak{p}(t) = \bar{\mathfrak{p}}(t) + \varkappa \int_0^1 K(s, t) \frac{\mathfrak{p}(s)}{r^3(s)} ds; \quad r(s) = |\mathfrak{p}(s)|$$

die Integralgleichung, der $\mathfrak{p}(t)$ genügt. Dabei ist

$$\text{(IX; 2)} \qquad \bar{\mathfrak{p}}(t) = \mathfrak{p}_1 \frac{t_3 - t}{t_3 - t_1} + \mathfrak{p}_3 \frac{t - t_1}{t_3 - t_1} = \mathfrak{p}_1(1 - t) + \mathfrak{p}_3(t)$$

eine lineare Funktion der Zeit, die einer Bewegung entspricht, die geradlinig und gleichförmig zwischen den beiden Randörtern erfolgt. Ferner ist der Kern der Integralgleichung

$$\text{(IX; 3)} \qquad K(s, t) = \begin{cases} s(1 - t) & \text{für} \quad 0 \leqq s \leqq t, \\ t(1 - s) & \text{für} \quad t \leqq s \leqq 1. \end{cases}$$

Man kann nun, falls $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_3$ nicht kollinear, d.h. nicht gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind (was man immer ausschließen darf), $\mathfrak{p}(t)$ als Resultante zweier Vektoren betrachten, deren Richtungen in die von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_3$ fallen, d.h., es darf

$$\text{(IX; 4)} \qquad \mathfrak{p}(t) = n_1(t)\, \mathfrak{p}_1 + n_3(t)\, \mathfrak{p}_3$$

gesetzt werden, wo $n_1(t)$ und $n_3(t)$ zwei skalare Funktionen der Zeit und der Koordinaten von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_3$ sind. Diese Komponentenzerlegung des Ortsvektors tritt an die Stelle der Zerlegung (V; 12) im Anfangswertproblem.

Multipliziert man (IX; 4) vektoriell mit $\mathfrak{p}_3$ bzw. $\mathfrak{p}_1$, so erhält man

$$[\mathfrak{p}\mathfrak{p}_3] = n_1[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]; \quad [\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}] = n_3[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]$$

---

[1]) „Bahnbestimmung als Randwertproblem" I–V: Astron. Nachr. *278*, 193, 204; *280*, 73; *281*, 97; *282*, 107 (1950–1955).

oder, wenn man unter $[\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_k]$ die *Beträge* dieser sämtlich kollinearen, nämlich nach dem Pol der Bahnebene gerichteten Vektorprodukte versteht,

$$n_1(t) = \frac{[\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_3]}{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]}; \quad n_3(t) = \frac{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}]}{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]}.$$

Diese Größen, die im Randwertproblem die gleiche Rolle spielen wie im Anfangswertproblem die Funktionen F und G, sind demnach nichts anderes als die Verhältnisse der von den betreffenden Vektoren gebildeten Dreiecke. Speziell ist für $t = t_2$

$$\text{(IX; 5)} \qquad n_1(t_2) = \frac{[\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3]}{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]}; \quad n_3(t_2) = \frac{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]}{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]}.$$

Setzt man (IX; 4) in die Integralgleichung (IX; 1) ein, so ergibt sich

$$n_1\mathfrak{p}_1 + n_3\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{p}_1(1 - t) + \mathfrak{p}_3 t + \varkappa^2 \int_0^1 K(s, t) \frac{n_1\mathfrak{p}_1(s) + n_3\mathfrak{p}_3(s)}{r^3(s)} ds.$$

Diese Gleichung zerfällt also in zwei skalare Integralgleichungen

$$\text{(IX; 6)} \qquad \begin{aligned} n_1(t) &= 1 - t + \varkappa^2 \int_0^1 K(s, t) \frac{n_1(s)\, ds}{r^3(s)}, \\ n_3(t) &= \qquad t + \varkappa^2 \int_0^1 K(s, t) \frac{n_3(s)\, ds}{r^3(s)}, \end{aligned}$$

wobei

$$\text{(IX; 7)} \qquad r^2(s) = \mathfrak{p}^2 = n_1^2(s)\, \mathfrak{p}_1^2 + 2n_1(s)\, n_3(s)\, (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3) + n_3^2(s)\, \mathfrak{p}_3^2$$

zu setzen ist.

Wären nun die Dreiecksverhältnisse (IX; 5) bekannt, so ließe sich das Problem streng lösen. Es ist

$$\text{(IX; 8)} \qquad \mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i - \mathfrak{s}_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

wenn durch die Vektoren

$$\text{(IX; 9)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{p}(x, y, z) & \text{die heliozentrischen Planetenörter,} \\ \mathfrak{q}(\xi, \eta, \zeta) & \text{die topozentrischen Planetenörter,} \\ \mathfrak{s}(X, Y, Z) & \text{die topozentrischen Sonnenörter} \end{cases}$$

dargestellt werden. Setzt man, für $t = t_2$, (IX; 8) in (IX; 4) ein und schreibt man kürzer $n_i(t_2) = n_i$ $(i = 1, 3)$, so erhält man

$$\text{(IX; 10)} \qquad n_1\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}_2 + n_3\mathfrak{q}_3 = n_1\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_2 + n_3\mathfrak{s}_3.$$

Für die Erdbahnlösung (Beobachtungsort oder locus fictus) sind die $\mathfrak{q}_i = 0$, und es ist, wenn die der Erdbahn entsprechenden Dreiecksverhältnisse mit

$$N_1 = \frac{[\mathfrak{s}_2 \mathfrak{s}_3]}{[\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_3]}; \quad N_3 = \frac{[\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2]}{[\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_3]}$$

bezeichnet werden,

(IX; 11) $$0 = N_1 \mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_2 + N_3 \mathfrak{s}_3,$$

so daß man statt (IX; 10) auch

(IX; 12) $$n_1 \mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}_2 + n_3 \mathfrak{q}_3 = (n_1 - N_1)\, \mathfrak{s}_1 + (n_3 - N_3)\, \mathfrak{s}_3$$

schreiben kann.

Nun seien im System der Ekliptik

$$\sigma_i = \varrho_i \cos \beta_i$$

die „kurtierten Distanzen", d.h. die Projektionen der topozentrischen Distanzen ϱ_i auf die Ekliptikebene. Wenn man dann mit

(IX; 13) $$\mathfrak{i}_i (f_i, g_i, h_i); \quad f_i = \cos \lambda_i, \quad g_i = \sin \lambda_i, \quad h_i = \operatorname{tg} \beta_i$$

Vektoren in der Richtung der $\mathfrak{q}_i$ bezeichnet, so wird

$$\mathfrak{q}_i = \sigma_i \mathfrak{i}_i.$$

Setzt man dies in (IX; 12) ein und multipliziert diese Gleichung skalar mit $[\mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_3]$, so erhält man

(IX; 14) $$\sigma_2 (\mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2 \mathfrak{i}_3) = (N_1 - n_1)\, (\mathfrak{i}_1 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{i}_3) + (N_3 - n_3)\, (\mathfrak{i}_1 \mathfrak{s}_3 \mathfrak{i}_3).$$

Dabei ist für gemischte Produkte aus Vektoren $\mathfrak{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathfrak{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\mathfrak{c}(c_1, c_2, c_3)$ allgemein

$$(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$$

gesetzt worden, und es darf dabei die Reihenfolge der Vektoren zyklisch vertauscht werden, während der Ausdruck das entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, wenn zwei Vektoren die Plätze wechseln.

Multipliziert man ferner (IX; 12) nacheinander vektoriell mit $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_3$ und danach nacheinander skalar mit $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_3$, so entstehen die Beziehungen

$$-\sigma_2 (\mathfrak{i}_2 \mathfrak{i}_1 \mathfrak{s}_1) + n_3 \sigma_3 (\mathfrak{i}_3 \mathfrak{i}_1 \mathfrak{s}_1) = (n_3 - N_3)\, (\mathfrak{s}_3 \mathfrak{i}_1 \mathfrak{s}_1),$$

$$n_1 \sigma_1 (\mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_3 \mathfrak{s}_3) - \sigma_2 (\mathfrak{i}_2 \mathfrak{i}_3 \mathfrak{s}_3) = (n_1 - N_1)\, (\mathfrak{s}_1 \mathfrak{i}_3 \mathfrak{s}_3)$$

oder

$$\text{(IX; 15)}\qquad \begin{aligned}\sigma_1(\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3\mathfrak{s}_3) &= \frac{\sigma_2}{n_1}(\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_3\mathfrak{s}_3) + \left(\frac{N_1}{n_1} - 1\right)(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_3\mathfrak{i}_3),\\ \sigma_3(\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3\mathfrak{s}_1) &= \frac{\sigma_2}{n_3}(\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_1) + \left(\frac{N_3}{n_3} - 1\right)(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_3\mathfrak{i}_1)\end{aligned}$$

zur Bestimmung von σ_1 und σ_3 aus σ_2. Multipliziert man schließlich (IX; 12) vektoriell mit $\mathfrak{i}_2$ und danach skalar mit $\mathfrak{s}_2$, so erhält man als Kontrollbeziehung zwischen σ_1 und σ_3 noch die Gleichung

$$n_1\sigma_1(\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_2) + n_3\sigma_3(\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_2) = (n_1 - N_1)(\mathfrak{s}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_2) + (n_3 - N_3)(\mathfrak{s}_3\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_2)$$

oder

$$\sigma_3(\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_3\mathfrak{s}_2) = \sigma_1\frac{n_1}{n_3}(\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_2) + \frac{N_1 - n_1}{n_3}(\mathfrak{s}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_2) - \frac{N_3 - n_3}{n_3}(\mathfrak{s}_2\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_3).$$

Es ist aber nach (IX; 11)

$$N_1(\mathfrak{s}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_2) + N_3(\mathfrak{s}_3\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_2) = 0, \quad \text{also} \quad (\mathfrak{s}_2\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_3) = \frac{N_1}{N_3}(\mathfrak{s}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_2).$$

Setzt man dies ein, so nimmt die soeben abgeleitete Kontrollgleichung die bemerkenswerte Form

$$\text{(IX; 16)}\qquad \sigma_3(\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_3\mathfrak{s}_2) = \sigma_1\frac{n_1}{n_3}(\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_2) + \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3}\right)(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2\mathfrak{i}_2)$$

an.

Die Aufgabe der Bahnbestimmung ist lösbar, wenn es gelingt, für die Dreiecksverhältnisse n_1, n_3 hinreichend gute Näherungswerte abzuleiten. Dann erhält man σ_2 aus (IX; 14) und σ_1, σ_3 aus (IX; 15) und damit genäherte ϱ_i. Es sind dann alle Daten gegeben, um die Dreiecksverhältnisse genauer berechnen zu können und mit ihnen das Iterationsverfahren fortzusetzen. Mit dieser Bemerkung ist der Gang der Hypothesenrechnung, der später (Abschn. 81) noch präziser zu formulieren sein wird, in großen Zügen angedeutet. In der Praxis kommt es also darauf an, eine Methode zu entwickeln, um geeignete Ausgangswerte für die Dreiecksverhältnisse zu gewinnen, die eine möglichst rasche Konvergenz des Iterationsverfahrens gewährleisten. Daß die rohen Näherungen, die man erhält, wenn man die Dreiecksverhältnisse den Verhältnissen der Zwischenzeit gleichsetzt, dazu nicht ausreichen, haben wir bereits weiter oben begründet.

80. *Die Entwicklung der Dreiecksverhältnisse nach Potenzen der Zwischenzeiten*

Die Dreiecksverhältnisse lassen sich nach den uns schon bekannten Methoden als Funktionen der Zwischenzeiten darstellen, die wir hier, um die Nomen-

klatur der klassischen Literatur zu verwenden, *abweichend von den früheren Bezeichnungen*, in der Form

$$\tau_1 = k(t_3 - t_2)\,; \quad \tau_2 = k(t_3 - t_1)\,; \quad \tau_3 = k(t_2 - t_1)$$

festsetzen wollen. Alle τ_i sind hier also positiv, und es gilt zwischen ihnen die Beziehung

$$\tau_2 = \tau_1 + \tau_3 .$$

Es ist dann, wenn wir $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_3$ in üblicher Weise durch $\mathfrak{p}_2$ und $\dot{\mathfrak{p}}_2$ ausdrücken,

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 F_1 + \dot{\mathfrak{p}}_2 G_1; \quad \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{p}_2 F_3 + \dot{\mathfrak{p}}_2 G_3,$$

und es gilt nach (VIII; 72) für die Inhalte der doppelten Dreiecksflächen

$$[\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2] = -[\mathfrak{p}_2 \dot{\mathfrak{p}}_2]\, G_1; \quad [\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3] = [\mathfrak{p}_2 \dot{\mathfrak{p}}_2]\, G_3;$$

$$[\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_3] = [\mathfrak{p}_2 \dot{\mathfrak{p}}_2]\,(F_1 G_3 - F_3 G_1).$$

Für die Verhältnisse der Dreiecksflächen erhält man somit

$$n_1(t_2) = \frac{G_3}{F_1 G_3 - F_3 G_1}; \quad n_3(t_2) = -\frac{G_1}{F_1 G_3 - F_3 G_1}.$$

Ferner ist nach (VII; 9, 12, 13)

$$F = 1 - \frac{1}{2}\mu\tau^2 + \frac{1}{2}\mu\sigma\tau^3 - \cdots; \quad G = \tau\left(1 - \frac{1}{6}\mu\tau^2 + \frac{1}{4}\mu\sigma\tau^3 - \cdots\right),$$

also, wenn wir in F_1, G_1 bzw. F_3, G_3, entsprechend der oben eingeführten neuen Bezeichnung der Zwischenzeiten,

$$\tau = -\tau_3 \quad \text{bzw.} \quad \tau = \tau_1$$

setzen,

$$F_1 = 1 - \frac{1}{2}\mu\tau_3^2 - \frac{1}{2}\mu\sigma\tau_3^3 - \cdots, \quad G_1 = -\tau_3\left(1 - \frac{1}{6}\mu\tau_3^2 - \frac{1}{4}\mu\sigma\tau_3^3 - \cdots\right),$$

$$F_3 = 1 - \frac{1}{2}\mu\tau_1^2 + \frac{1}{2}\mu\sigma\tau_1^3 - \cdots, \quad G_3 = \quad \tau_1\left(1 - \frac{1}{6}\mu\tau_1^2 + \frac{1}{4}\mu\sigma\tau_1^3 - \cdots\right)$$

und schließlich, wegen $\tau_1 + \tau_3 = \tau_2$,

$$F_1 G_3 - F_3 G_1 = \tau_2\left[1 - \frac{1}{6}\mu\tau_2^2 + \frac{1}{4}\mu\sigma\tau_2^2(\tau_1 - \tau_3) - \cdots\right]$$

bis zur 4. Ordnung in den Zwischenzeiten genau. Es ist demnach

$$n_1(t_2) = \frac{\tau_1}{\tau_2}\,\frac{1 - \frac{1}{6}\mu\tau_1^2 + \frac{1}{4}\mu\sigma\tau_1^3 - \cdots}{1 - \frac{1}{6}\mu\tau_2^2 + \frac{1}{4}\mu\sigma\tau_2^2(\tau_1 - \tau_3) - \cdots},$$

$$n_3(t_2) = \frac{\tau_3}{\tau_2} \frac{1 - \frac{1}{6}\mu\tau_3^2 - \frac{1}{4}\mu\sigma\tau_3^3 - \cdots}{1 - \frac{1}{6}\mu\tau_2^2 + \frac{1}{4}\mu\sigma\tau_2^2(\tau_1 - \tau_3) - \cdots}$$

oder, wenn man die Division ausführt, bis zur 3. Ordnung genau

$$\text{(IX; 17)} \quad \begin{aligned} n_1(t_2) &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{1}{6}\mu\tau_3(\tau_1 + \tau_2) + \frac{1}{4}\mu\sigma\tau_3(\tau_2\tau_3 - \tau_1^2) + \cdots\right], \\ n_3(t_2) &= \frac{\tau_3}{\tau_2}\left[1 + \frac{1}{6}\mu\tau_1(\tau_2 + \tau_3) - \frac{1}{4}\mu\sigma\tau_1(\tau_1\tau_2 - \tau_3^2) + \cdots\right]. \end{aligned}$$

In diesen Formeln ist $\mu = r_2^{-3}$ und $\mu\sigma = \dot{r}_2 r_2^{-4}$. Da nun aber in der GAUSSschen Methode (im Gegensatz zu den Methoden nach dem LAPLACEschen Prinzip) die Verwendung von Geschwindigkeiten prinzipiell vermieden wird, werden die Glieder von der 3. Ordnung ab vernachlässigt. Die Näherungswerte

$$\text{(IX; 18)} \quad \begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_3(\tau_1 + \tau_2)}{r_2^3}\right] = \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{\tau_1\tau_3}{6r_2^3}\left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right), \\ n_3 &= \frac{\tau_3}{\tau_2}\left[1 + \frac{1}{6}\frac{\tau_1(\tau_2 + \tau_3)}{r_2^3}\right] = \frac{\tau_3}{\tau_2} + \frac{\tau_1\tau_3}{6r_2^3}\left(1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}\right) \end{aligned}$$

sind von ENCKE eingeführt worden, während GAUSS noch die weniger genauen Werte

$$\text{(IX; 19)} \qquad n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{\tau_1\tau_3}{2r_2^3}\right); \quad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1 + \frac{\tau_1\tau_3}{2r_2^3}\right)$$

benutzt hat, in die die ENCKEschen übergehen, wenn die Zwischenzeiten gleich sind, denn dann kann $\tau_2 = 2\tau_1 = 2\tau_3$ gesetzt werden.

Übrigens ist es sehr leicht, wie BUCERIUS[1]) gezeigt hat, diese und andere Näherungen direkt aus den Integralgleichungen (IX; 6) zu gewinnen. Setzt man $\varkappa = k(t_3 - t_1) = \tau_2$ und nach (IX; 2)

$$1 - t_2 = \frac{\tau_1}{\tau_2}; \quad t_2 = \frac{\tau_3}{\tau_2},$$

so folgt aus (IX; 6)

$$\text{(IX; 20)} \quad \begin{aligned} n_1(t_2) &= \frac{\tau_1}{\tau_2} + \tau_2^2 \int_0^1 K(s, t_2)\frac{n_1(s)}{r^3(s)}\,ds, \\ n_3(t_2) &= \frac{\tau_3}{\tau_2} + \tau_2^2 \int_0^1 K(s, t_2)\frac{n_3(s)}{r^3(s)}\,ds. \end{aligned}$$

---

[1]) Astron. Nachr. *278*, 193 (1950).

Man kann dann nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int_0^1 K(s,t_2)\, f(s)\, ds = f(\sigma) \int_0^1 K(s,t_2)\, ds$$

setzen, wo $f(\sigma)$ einen Mittelwert der stets positiven Funktionen

$$f(s) = \frac{n_1(s)}{r^3(s)} \quad \text{bzw.} \quad f(s) = \frac{n_3(s)}{r^3(s)}$$

darstellt. Da nun

$$\int_0^1 K(s,t_2)\, ds = \int_0^{t_2} s(1-t_2)\, ds + \int_{t_2}^1 t_2(1-s)\, ds = \frac{t_2}{2}(1-t_2) = \frac{\tau_1\tau_3}{2\tau_2^2},$$

so erhält man eine Näherung für die Ausdrücke (IX; 20), wenn man als Mittelwerte für n_1 bzw. n_3 die Verhältnisse der Zwischenzeiten τ_1/τ_2 bzw. τ_3/τ_2 und als Mittelwert von $r(s)$ den Wert r_2 annimmt. Es folgen dann unmittelbar die GAUSSschen Näherungen (IX; 19).

Eine weitaus bessere Näherung erhält man, wenn man in den Ausdrücken

$$n_1(s) = \frac{[\mathfrak{p}(s)\,\mathfrak{p}_3]}{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]} \quad \text{bzw.} \quad n_3(s) = \frac{[\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}(s)]}{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]}$$

im Integranden den unbekannten Verlauf der Funktion $\mathfrak{p}(s)$ dadurch anzunähern sucht, daß man $\mathfrak{p}(s) = \bar{\mathfrak{p}}(s)$ setzt, also eine geradlinig-gleichförmige Bewegung längs der Sehne annimmt. Man erhält dann nach (IX; 2)

$$[\bar{\mathfrak{p}}(s)\,\mathfrak{p}_3] = [\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]\,(1-s); \quad [\mathfrak{p}_1\bar{\mathfrak{p}}(s)] = [\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]\, s,$$

und es ist

$$\int_0^1 K(s,t_2)\,(1-s)\, ds = \frac{1}{6} t_2 (t_2-1)(t_2-2) = \frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2^3}(\tau_1+\tau_2),$$

$$\int_0^1 K(s,t_2)\, s\, ds = \frac{1}{6} t_2(1-t_2^2) = \frac{1}{6}\frac{\tau_3}{\tau_2^3}(\tau_2^2-\tau_3^2) = \frac{1}{6}\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2^3}(\tau_2+\tau_3).$$

Auf diese Weise ergeben sich die ENCKEschen Formeln (IX; 18).

In diesen Versuchen ist immer r_2 als Mittelwert der Funktion $r(s)$ vor das Integral gesetzt worden, obwohl das nicht immer vertretbar ist, denn es könnte der Fall eintreten, daß r_2 gerade einem Extremum der Funktion $r(s)$ entspricht, d.h. also t_2 auf die Durchgangszeit durch das Perihel oder Aphel der Bahn fällt. In den meisten Fällen wird aber r_2 zwischen den Randwerten r_1 und r_3 liegen, und es bedeutet natürlich eine wesentliche Erleichterung des Problems, wenn man r_2 als Mittelwert benutzen kann. Die allgemeinste Lösung, die sich

auf diese Weise erzielen läßt, führt auf lineare Integralgleichungen von der Form

$$(IX; 21) \qquad f_i(t_2) = n_i(t_2) - \lambda \int_0^1 K(s, t_2)\, n_i(s)\, ds, \quad (i = 1, 3)$$

wo

$$f_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} = 1 - t_2; \quad f_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} = t_2; \quad \lambda = \frac{\tau_2^2}{r_2^3}$$

gesetzt worden ist. Die Lösungen der homogenen Integralgleichung

$$(IX; 22) \qquad 0 = \varphi(t_2) - \lambda \int_0^1 K(s, t_2)\, \varphi(s)\, ds$$

sind, wenn a und b zwei konstante Größen bedeuten, von der Form

$$\varphi = a \sin\left(t_2 \sqrt{\lambda}\right) + b \cos\left(t_2 \sqrt{\lambda}\right),$$

denn durch zweimaliges Differenzieren von (IX; 22) nach t_2 entsteht die äquivalente Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} = -\lambda \varphi,$$

die diese allgemeine Lösung hat. Nun folgen aber aus (IX; 22) die Randbedingungen

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0,$$

da der Kern für $t_2 = 0$ und $t_2 = 1$ identisch verschwindet. Als einzige Lösungen der homogenen Gleichung erhält man demnach die „Eigenfunktionen"

$$\varphi_\nu(t_2) = a \sin\left(t_2 \sqrt{\lambda}\right), \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

die den „Eigenwerten" $\lambda_\nu = (\nu\pi)^2$ entsprechen.

Die Theorie der linearen Integralgleichungen lehrt, daß die inhomogene Gleichung (IX; 21) nur dann eine wohlbestimmte Lösung hat, wenn λ von den Eigenwerten λ_ν des homogenen Problems verschieden ist. In unserem Fall besagt das, daß $\tau_2 r_2^{-\frac{3}{2}} \neq \nu\pi$ sein muß; speziell soll also (bei kleinen Zwischenzeiten) $\sqrt{\lambda} < \pi$ sein.

Die Lösung der Integralgleichung (IX; 21) läßt sich dann durch die NEUMANNsche *Reihe*

$$n_i = A_0^{(i)} + A_1^{(i)} \lambda + A_2^{(i)} \lambda^2 + A_3^{(i)} \lambda^3 + \cdots \quad (i = 1, 3)$$

darstellen, wo die Koeffizienten $A_\nu^{(i)}$ nacheinander durch die Rekursion

$$A_0^{(i)} = f_i(t_2) = \begin{cases} 1 - t_2 & \text{für } i = 1, \\ t_2 & \text{für } i = 3, \end{cases}$$

$$A_1^{(i)} = \int_0^1 K(s, t_2)\, A_0^{(i)}(s)\, ds; \quad A_2^{(i)} = \int_0^1 K(s, t_2)\, A_1^{(i)}(s)\, ds; \quad \ldots$$

gefunden werden. Wendet man diese Formeln auf den Kern (IX; 3) und die Funktionen f_i an, so erhält man die Reihenentwicklungen

$$\text{(IX; 23)}\quad \begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{\tau_3(\tau_1+\tau_2)}{6\,r_2^3} + \frac{3\tau_1^4 - 10\tau_1^2\tau_2^2 + 7\tau_2^4}{360\,r_2^6} + \cdots\right],\\ n_3 &= \frac{\tau_3}{\tau_2}\left[1 + \frac{\tau_1(\tau_2+\tau_3)}{6\,r_2^3} + \frac{3\tau_3^4 - 10\tau_3^2\tau_2^2 + 7\tau_2^4}{360\,r_2^6} + \cdots\right], \end{aligned}$$

deren Anfangsglieder wiederum der ENCKEschen Näherung entsprechen. Diese Entwicklungen, die übrigens auch in der geschlossenen Form

$$n_\nu = \frac{\sin\left(\tau_\nu/\sqrt{r_2^3}\right)}{\sin\left(\tau_2/\sqrt{r_2^3}\right)}, \quad (\nu = 1, 3)$$

geschrieben werden können, sind streng, wenn die Bahn ein Kreis ist, da dann $r = r_2 = \text{const}$ ist, die Gleichung (IX; 21) also exakt gilt. Bei Planetoiden mit schwach exzentrischen Bahnen wird also der Fehler dieser Näherung (und bei genügend kleinen und möglichst gleichen Zwischenzeiten auch der Fehler der ENCKEschen Formel) klein sein, während er bei langgestreckten Ellipsen, insbesondere in Perihelnähe, größere Beträge annehmen kann. H. BUCERIUS hat loc. cit. verschiedene interessante Versuche unternommen, um noch bessere Näherungen zu erzielen, etwa dadurch, daß er auch im Nenner der im Integranden von (IX; 20) auftretenden Funktion n/r^3 die lineare Abhängigkeit von der Zeit einführt, d.h. den Vektor $\mathfrak{p}$ durch $\bar{\mathfrak{p}}$ ersetzt. Die sich dabei ergebenden Formeln sind aber für die Bedürfnisse der praktischen Rechnung bereits zu kompliziert. Es kommt ja hier nicht unbedingt darauf an, auf Anhieb schon die endgültige Lösung in die Hand zu bekommen, sondern man verlangt Näherungen, die als Ausgangsbasis für ein Iterationsverfahren brauchbar sind. Das leisten aber die ENCKEschen Formeln, die einen ausgezeichneten Kompromiß zwischen den beiden einander widerstrebenden Forderungen nach größtmöglicher Einfachheit und größtmöglicher Genauigkeit darstellen.

Formeln, die genauer als die ENCKEschen sind, sind schon von ENCKE selbst und von TH. V. OPPOLZER vorgeschlagen worden. Man erhält sie, wenn man aus den ersten Gliedern der Entwicklungen

$$r_1 = r_2 - \tau_3\dot{r}_2 + \cdots; \quad r_3 = r_2 + \tau_1\dot{r}_2 + \cdots$$

r_2 und $\dot{r}_2$ bestimmt:

$$\text{(IX; 24)}\quad \begin{aligned} \dot{r}_2 &= \frac{r_3 - r_1}{\tau_2};\\ r_2 &= \frac{r_1\tau_1 + r_3\tau_3}{\tau_2} = \frac{1}{2}(r_1 + r_3) + \frac{\tau_3 - \tau_1}{2\tau_2}(r_3 - r_1). \end{aligned}$$

Führt man dies in (IX; 17) ein, so ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$
\text{(IX; 25)}\quad
\begin{aligned}
n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{4}{3}\frac{\tau_3(\tau_1+\tau_2)}{(r_1+r_3)^3} - 4\frac{\tau_1^2\tau_3}{\tau_2}\frac{r_1-r_3}{(r_1+r_3)^4} + \cdots\right],\\
n_3 &= \frac{\tau_3}{\tau_2}\left[1 + \frac{4}{3}\frac{\tau_1(\tau_2+\tau_3)}{(r_1+r_3)^3} + 4\frac{\tau_1\tau_3^2}{\tau_2}\frac{r_1-r_3}{(r_1+r_3)^4} + \cdots\right].
\end{aligned}
$$

Diese Näherungen, die auch die Glieder 3. Ordnung berücksichtigen, haben aber geringere praktische Bedeutung, weil die Koeffizienten von *zwei* Werten des Radiusvektors abhängen. Dasselbe gilt für die Näherungsformeln von J. W. GIBBS, die die Formeln (IX; 25) sowohl an Genauigkeit als auch an Einfachheit übertreffen und aus diesem Grunde Beachtung verdienen. Sie enthalten zwar alle drei Abstände r_i, berücksichtigen aber alle Glieder der Entwicklungen (IX; 17) bis zur 4. Ordnung und sind bei gleichen Zwischenzeiten sogar bis zur 5. Ordnung genau.

Um die GIBBSschen Formeln abzuleiten, eliminiert man aus den fünf Gleichungen

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 - \tau_3\dot{\mathfrak{p}}_2 + \frac{1}{2}\tau_3^2\ddot{\mathfrak{p}}_2 - \frac{1}{6}\tau_3^3\dddot{\mathfrak{p}}_2 + \frac{1}{24}\tau_3^4\mathfrak{p}_2^{\mathrm{IV}} - \cdots,$$

$$\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{p}_2 + \tau_1\dot{\mathfrak{p}}_2 + \frac{1}{2}\tau_1^2\ddot{\mathfrak{p}}_2 + \frac{1}{6}\tau_1^3\dddot{\mathfrak{p}}_2 + \frac{1}{24}\tau_1^4\mathfrak{p}_2^{\mathrm{IV}} + \cdots,$$

$$\ddot{\mathfrak{p}}_1 = -\frac{\mathfrak{p}_1}{r_1^3} = \ddot{\mathfrak{p}}_2 - \tau_3\dddot{\mathfrak{p}}_2 + \frac{1}{2}\tau_3^2\mathfrak{p}_2^{\mathrm{IV}} - \cdots,$$

$$-\frac{\mathfrak{p}_2}{r_2^3} = \ddot{\mathfrak{p}}_2,$$

$$\ddot{\mathfrak{p}}_3 = -\frac{\mathfrak{p}_3}{r_3^3} = \ddot{\mathfrak{p}}_2 + \tau_1\dddot{\mathfrak{p}}_2 + \frac{1}{2}\tau_1^2\mathfrak{p}_2^{\mathrm{IV}} + \cdots,$$

indem man die höheren Glieder vernachlässigt, die vier Größen $\dot{\mathfrak{p}}_2, \ldots \mathfrak{p}_2^{\mathrm{IV}}$ und erhält dann nach elementarer Rechnung die merkwürdige Beziehung

$$\mathfrak{p}_1\frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1 + \frac{A_1}{r_1^3}\right) - \mathfrak{p}_2\left(1 + \frac{A_2}{r_2^3}\right) + \mathfrak{p}_3\left(1 + \frac{A_3}{r_3^3}\right) = 0,$$

in der

$$A_1 = \frac{1}{12}(\tau_2\tau_3 - \tau_1^2);\quad A_2 = -\frac{1}{12}(\tau_1\tau_3 + \tau_2^2);\quad A_3 = \frac{1}{12}(\tau_1\tau_2 - \tau_3^2)$$

bekannte Funktionen der Zwischenzeiten sind. Multipliziert man diese Glei-

chung vektoriell mit $\mathfrak{p}_1$ bzw. $\mathfrak{p}_3$, so findet man

$$-[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]\left(1+\frac{A_2}{r_2^3}\right)+[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]\frac{\tau_3}{\tau_2}\left(1+\frac{A_3}{r_3^3}\right)=0,$$

$$[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]\frac{\tau_1}{\tau_2}\left(1+\frac{A_1}{r_1^3}\right)-[\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3]\left(1+\frac{A_2}{r_2^3}\right)=0$$

oder

(IX; 26) $$n_1=\frac{\tau_1}{\tau_2}\,\frac{1+\frac{A_1}{r_1^3}}{1+\frac{A_2}{r_2^3}};\quad n_3=\frac{\tau_3}{\tau_2}\,\frac{1+\frac{A_3}{r_3^3}}{1+\frac{A_2}{r_2^3}}.$$

Das sind die GIBBSschen Näherungsausdrücke für die Dreiecksverhältnisse, die an Genauigkeit die ENCKEschen bedeutend übertreffen. Ein Verfahren zur praktischen Verwendung dieser Formeln ist von R. VOGEL und W. FABRITIUS angegeben worden, über das man in den Originalarbeiten[1]) oder in Abschn. 94 von J. BAUSCHINGERS „Bahnbestimmung der Himmelskörper" nachlesen möge.

81. *Das Iterationsverfahren nach GAUSS-ENCKE*

Die Näherungswerte für die Dreiecksverhältnisse haben die Form

(IX; 27) $$\begin{cases} n_1=n_1^{(0)}+\dfrac{\nu_1^{(0)}}{r_2^3};\quad n_3=n_3^{(0)}+\dfrac{\nu_3^{(0)}}{r_2^3} \\ \text{mit}\quad n_i^{(0)}=\dfrac{\tau_i}{\tau_2};\quad \nu_i^{(0)}=\dfrac{\tau_1\tau_3}{6}\left(1+n_i^{(0)}\right), \end{cases}$$

wenn man sich der ENCKEschen Formeln (IX; 18) bedient. Dabei ist zu bemerken, daß die Größen $n_i^{(0)}$ bekannt sind und nur noch eine geringfügige Änderung erfahren, wenn im Laufe des Verbesserungsverfahrens die Zwischenzeiten wegen der Lichtzeit korrigiert werden. Die Größen $\nu_i^{(0)}$ dagegen sind noch hypothetisch, da sie Fehler von der 3. Ordnung in den Zwischenzeiten enthalten.

Führt man die n_i in der Form (IX; 27) in die Gleichung (IX; 14) ein, so erhält man zunächst

(IX; 28) $$\varrho_2=\sigma_2\sec\beta_2=k^{(0)}-\frac{l^{(0)}}{r_2^3},$$

wo $k^{(0)}$ und $l^{(0)}$ von bekannten Größen und den noch verbesserungsbedürftigen $\nu_i^{(0)}$ abhängen. Andererseits gilt die geometrische Beziehung

(IX; 29) $$r_2^2=\varrho_2^2-2\varrho_2R_2\cos\psi_2+R_2^2,$$

[1]) Astron. Nachr. *128*, 225 (1891) und *129*; 37 (1892).

in der ψ_2 den bekannten Winkel zwischen den beiden topozentrischen Richtungen nach dem Planeten und nach der Sonne zur Zeit t_2 darstellt. Aus (IX; 28, 29) folgt dann die Gleichung achten Grades oder die GAUSSsche Gleichung, nach deren Auflösung r_2 und ϱ_2 bekannt werden. Damit sind aber nach (IX; 27) die n_i und nach (IX; 15) auch die Größen σ_1, σ_3 bzw. ϱ_1, ϱ_3 bekannt.

Das Verbesserungsverfahren, das nach Vorliegen der ersten Näherung einsetzt, geschieht nun mit Hilfe der Verhältnisse Sektor: Dreieck, über deren Bestimmung in Abschn. 52 und 53 das Nötige gesagt worden ist. Aus

$$\gamma_1 = \frac{\tau_1 \sqrt{p}}{|[\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3]|}; \quad \gamma_2 = \frac{\tau_2 \sqrt{p}}{|[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]|}; \quad \gamma_3 = \frac{\tau_3 \sqrt{p}}{|[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]|},$$

folgt für die Dreiecksverhältnisse

$$\text{(IX; 30)} \qquad n_1 = \frac{[\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3]}{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{\tau_1}{\tau_2}; \quad n_3 = \frac{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]}{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]} = \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \cdot \frac{\tau_3}{\tau_2}.$$

Mit den Näherungen für die ϱ_i sind nun auch die drei heliozentrischen Örter genähert bekannt geworden, und man hat also alle Daten zur Hand, um die γ_i zu berechnen. Ist dies geschehen, so werden die nach (IX; 30) berechneten n_i im allgemeinen mit den Ausgangswerten (IX; 27) nicht übereinstimmen. Setzt man aber

$$n_1 = n_1^{(0)} + \frac{\nu_1^{(1)}}{r_2^3} = n_1^{(0)} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1}; \quad n_3 = n_3^{(0)} + \frac{\nu_3^{(1)}}{r_2^3} = n_3^{(0)} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_3},$$

so erhält man in

$$\nu_1^{(1)} = n_1^{(0)} r_2^3 \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1\right); \quad \nu_3^{(1)} = n_3^{(0)} r_2^3 \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_3} - 1\right)$$

neue Größen ν_1, ν_3, mit denen man das Verfahren zur Bestimmung von r_2, ϱ_2 usw. nach dem gleichen Algorithmus wiederholen kann, und man tut dies so oft, bis sich die γ_i nicht mehr ändern und somit die nach (IX; 30) bestimmten Dreiecksverhältnisse als endgültig betrachtet werden dürfen. Die Berechnung der Kegelschnittelemente nach Abschn. 50, wobei zur Bestimmung von p die Verhältnisse γ_1, γ_2, γ_3 aus der letzten Hypothese benutzt werden (die Übereinstimmung der drei Werte p liefert eine wertvolle Kontrolle der Rechnung!), macht dann keine Schwierigkeiten mehr.

Eine Variante dieses Verfahrens, die eine besonders gute Konvergenz verspricht, verdanken wir P. HERGET[1]). Er benutzt dabei die schon in Abschn. 72 von K. STUMPFF eingeführten Größen

$$\begin{aligned} U_i &= \operatorname{tg} \alpha_i; & V_i &= \operatorname{tg} \delta_i \sec \alpha_i, \\ P_i &= Y_i - U_i X_i; & Q_i &= Z_i - V_i X_i. \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

[1]) The Computation of Orbits, S. 60ff.

Nach (IX; 4) ist dann, wenn wir $t = t_2$ setzen,

$$x_2 = n_1 x_1 + n_3 x_3,$$
$$(IX; 31) \qquad y_2 = n_1 y_1 + n_3 y_3,$$
$$z_2 = n_1 z_1 + n_3 z_3.$$

Da nun nach (VIII; 56)

$$(IX; 32) \qquad y_i = U_i x_i - P_i; \quad z_i = V_i x_i - Q_i,$$

so kann man die letzten beiden Gleichungen (IX; 31) auch

$$n_1(U_1 x_1 - P_1) + n_3(U_3 x_3 - P_3) = U_2(n_1 x_1 + n_3 x_3) - P_2,$$
$$n_1(V_1 x_1 - Q_1) + n_3(V_3 x_3 - Q_3) = V_2(n_1 x_1 + n_3 x_3) - Q_2$$

schreiben. Das sind aber zwei lineare Gleichungen in x_1 und x_3:

$$n_1 x_1(U_1 - U_2) + n_3 x_3(U_3 - U_2) = n_1 P_1 - P_2 + n_3 P_3 = P,$$
$$n_1 x_1(V_1 - V_2) + n_3 x_3(V_3 - V_2) = n_1 Q_1 - Q_2 + n_3 Q_3 = Q.$$

Setzt man für die Determinante dieses Systems

$$D = \begin{vmatrix} U_1 - U_2, & U_3 - U_2 \\ V_1 - V_2, & V_3 - V_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix},$$

so sind nach

$$(IX; 33) \qquad \begin{aligned} D n_1 x_1 &= P(V_3 - V_2) - Q(U_3 - U_2), \\ D n_3 x_3 &= P(U_1 - U_2) - Q(V_1 - V_2) \end{aligned}$$

x_1 und x_3 bekannt, wenn n_1 und n_3, die auch in P und Q enthalten sind, vorliegen. Aus der ersten Gleichung (IX; 31) und den Gleichungen (IX; 32) folgen dann die übrigen Koordinaten der drei Örter.

Dieser Algorithmus, der sich besonders gut für die Maschinenrechnung eignet, kann mit dem GAUSS-ENCKEschen Verfahren zur Bestimmung der Dreiecksverhältnisse verbunden werden. Es ist aber auch möglich, den Weg über die GAUSSsche Gleichung (bzw. die Gleichung achten Grades) zu umgehen, indem man (ähnlich wie VÄISÄLÄ in seinem Abschn. 74 beschriebenen Verfahren) von plausiblen Annahmen über die Distanzen des Himmelskörpers ausgeht. Diese Methode, die allerdings Erfahrung und Einfühlungsvermögen erfordert, kann bei Bahnbestimmungen von Planetoiden mit Erfolg angewandt werden. Man darf dabei zwecks Ableitung erster Näherungen für die Dreiecksverhältnisse von der Annahme ausgehen, daß alle r_i nahezu gleich sind. Mit einem plausiblen Wert für r (bei normalen Planetoiden etwa 2.0 oder 2.5) geht man in die Gleichungen (IX; 23) ein, die HERGET in der Form

$$(IX; 34) \qquad n_i = p_i + \frac{p_i(1 - p_i^2)}{6} q \left(1 + \frac{7 - 3p_i^2}{60} q\right), \quad (i = 1, 3)$$

schreibt, wo

$$p_i = n_i^{(0)} = \frac{\tau_i}{\tau_2}; \quad q = \frac{\tau_2^2}{r^3}$$

gesetzt ist. Bequemer ist es, die geschlossenen Formeln

$$n_i = \frac{\sin\left(\tau_i/\sqrt{r^3}\right)}{\sin\left(\tau_2/\sqrt{r^3}\right)} = \frac{\sin\left(p_i\sqrt{q}\right)}{\sin\sqrt{q}} \tag{IX; 35}$$

zu benutzen, deren strenge Gültigkeit für Kreisbahnen evident ist. Die Gleichungen (IX; 34) bzw. (IX; 23) geben die ersten Entwicklungsglieder dieser Ausdrücke nach Potenzen von q wieder.

HERGET benutzt statt (IX; 35) die Funktionen

$$n_i = \frac{\sin\left(p_i\sqrt{q_i}\right)}{\sin\sqrt{q_i}}; \quad q_i = \frac{\tau_2^2}{r_i^3}, \tag{IX; 36}$$

deren erste Entwicklungsglieder er auf dem Weg einer Interpolation der Vektorfunktion $\mathfrak{p}(t)$ zwischen den Randwerten $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_3$ unter Vernachlässigung aller von der Bahnexzentrizität abhängigen Terme ableitet. Diese Formeln sind für kreisähnliche Bahnen den Ausdrücken (IX; 34) gleichwertig, was die Güte der Näherungen anbelangt. Darüber hinaus haben sie den Vorteil, daß nunmehr n_1 nur von r_1, n_3 nur von r_3 abhängt; dadurch gelingt es, das Iterationsverfahren beträchtlich abzukürzen. Beginnt man die Hypothesenrechnung mit irgendeinem $r_1 = r_3 = r$, so erhält man aus (IX; 35) die n_i, mit denen man nach (IX; 33) x_1 und x_3 berechnet. Dann folgen aus

$$r_i^2 = (1 + U_i^2 + V_i^2)\, x_i^2 - 2(U_i P_i + V_i Q_i)\, x_i + (P_i^2 + Q_i^2) \tag{IX; 37}$$

r_1 und r_3, mit denen man nach (IX; 36) sofort verbesserte n_i erhält.

Allerdings ist dieses Verfahren nicht streng, da die dynamischen Beziehungen zwischen den n_i und den Zwischenzeiten durch (IX; 36) nur genähert ausgedrückt werden. Man gelangt aber auf diesem Weg – selbst wenn man mit einem roh geschätzten r beginnt – sehr rasch zu so guten Näherungswerten für die Dreiecksverhältnisse, daß dann das GAUSS-ENCKEsche Verfahren über die Verhältnisse Sektor : Dreieck (in denen die dynamischen Zusammenhänge ihren präzisen Ausdruck finden) meist in einem einzigen Schritt zum Ziel führt. Die dazu nötigen Formeln sind von C. VEITHEN und G. MERTON für die Arbeit mit der Rechenmaschine zurechtgemacht worden:

Aus

$$f_3 = \frac{1}{2}(v_2 - v_1); \quad r_1 r_2 \cos 2f_3 = r_1 r_2 (2\cos^2 f_3 - 1) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

leitet man

$$r_1 r_2 \cos^2 f_3 = \frac{1}{2}[x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + r_1 r_2] = \frac{1}{2}\varkappa_3^2$$

ab.

Danach erhält man zur Bestimmung des Verhältnisses y_3 = Sektor : Dreieck im Intervall (t_1, t_2) an Stelle der Formeln (VI; 59, 68)

$$l_3 = \frac{r_1 + r_2}{2\sqrt{2}\,\varkappa_3} - \frac{1}{2};\quad m_3 = \frac{\tau_3^2}{(\sqrt{2}\,\varkappa_3)^3};\quad h_3 = \frac{\tau_3^2}{\varkappa_3^2\left[\frac{2}{3}\sqrt{2}\,\varkappa_3 + r_1 + r_2\right]}$$

und entsprechende Ausdrücke für die Intervalle (t_2, t_3) und (t_1, t_3) durch Vertauschung der Indizes. Die y_i leitet man am bequemsten (und meistens auch mit hinreichender Genauigkeit) mit Hilfe des Hansenschen Kettenbruchs ab. Die Hypothesenrechnung ist abgeschlossen, wenn die Ausdrücke

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} \cdot \frac{y_2}{y_1};\quad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{y_2}{y_3} \tag{IX; 38}$$

nach der letzten Verbesserung der r_i unverändert geblieben sind.

82. *Die Bahnbestimmung nach Bažénow*

Die Methode von Gauss-Encke hat im Laufe der Zeit noch zahlreiche Varianten erfahren, die jedoch an dem Prinzip und an dem der Lösung zugrundeliegenden Gedankengang nichts Wesentliches geändert haben. Bemerkenswert ist, daß das Verfahren immer darauf abzielt, zwei Größen (ϱ_1, ϱ_3 oder r_1, r_3 oder x_1, x_3) zu bestimmen, durch die man die Schnittpunkte zwischen der Bahnebene und den beiden von den Erdörtern E_1, E_3 nach den entsprechenden Planetenörtern P_1, P_3 führenden und aus den Beobachtungen bekannten Visierlinien festlegt. Wenn diese Geraden die Ebene unter sehr kleinen Winkeln schneiden, wird die räumliche Lage von P_1, P_3 unsicher, d.h., die obengenannten Größenpaare lassen sich aus ihren Bestimmungsgleichungen, deren Determinante klein ist, nur mit geringem Genauigkeitsgrad ableiten. Dagegen ist die Lage der Bahnebene meistens auch in solchen Fällen, in denen das Problem selbst unlösbar ist (z.B. wenn die drei Örter in der Ekliptik liegen), scharf definiert.

Es liegt daher nahe, die Bestimmung der Lagekoordinaten der Bahnebene in den Vordergrund zu rücken, also anstatt der Größen ϱ_1, ϱ_3 oder der kurtierten Distanzen $\sigma_i = \varrho_i \cos \beta_i$ oder anderer in ungünstigen Fällen unscharf bestimmbarer Größenpaare die Winkel i, ☊ oder besser noch die Funktionen

$$f = \operatorname{tg} i \cos ☊;\quad g = \operatorname{tg} i \sin ☊ \tag{IX; 39}$$

als Hauptunbekannte einzuführen. Dieser interessante Versuch ist von G. Bažénow[1]) unternommen worden.

[1]) Astron. Nachr. *234*, 427 (1929).

Es seien für irgendeine Zeit t im System der Ekliptik die Koordinaten (IX; 9) gegeben – die Größen ξ, η, ζ und X, Y, ($Z = 0$) mögen sich auf die Ekliptik und den locus fictus beziehen. Setzt man dann

$$x = \xi - X, \quad y = \eta - Y, \quad z = \zeta,$$

so erhält man nach (IV; 14)

$$\begin{aligned} r \cos u &= (\xi - X) \cos \Omega + (\eta - Y) \sin \Omega, \\ r \sin u \cos i &= (\eta - Y) \cos \Omega - (\xi - X) \sin \Omega, \\ r \sin u \sin i &= \zeta \end{aligned}$$

oder, wenn man, wie in Abschn. 74,

$$C = \frac{\xi}{\zeta} = \operatorname{ctg} \beta \cos \lambda; \quad S = \frac{\eta}{\zeta} = \operatorname{ctg} \beta \sin \lambda$$

einführt,

$$\begin{aligned} r \cos u &= \zeta (C \cos \Omega + S \sin \Omega) - (X \cos \Omega + Y \sin \Omega), \\ r \sin u \cos i &= \zeta (S \cos \Omega - C \sin \Omega) - (Y \cos \Omega - X \sin \Omega), \\ r \sin u \sin i &= \zeta. \end{aligned} \tag{IX; 40}$$

Dividiert man die zweite Gleichung (IX; 40) durch die dritte, so ergibt sich

$$\operatorname{ctg} i = (S \cos \Omega - C \sin \Omega) - \frac{1}{\zeta} (Y \cos \Omega - X \sin \Omega)$$

oder, wenn man mit $\operatorname{tg} i$ multipliziert und die Abkürzungen (IX; 39) benutzt,

$$1 = (Sf - Cg) - \frac{1}{\zeta} (Yf - Xg),$$

d.h.

$$\zeta = \frac{Xg - Yf}{1 - Sf + Cg}. \tag{IX; 41}$$

Setzt man (IX; 41) in die ersten beiden Gleichungen (IX; 40) ein, und berücksichtigt man, daß

$$\begin{aligned} f \cos \Omega + g \sin \Omega &= \operatorname{tg} i \\ f \sin \Omega - g \cos \Omega &= 0, \end{aligned}$$

so folgt nach einfacher Rechnung, mit $Q = SX - CY$,

$$\begin{aligned} r \cos u &= \frac{Q \operatorname{tg} i - (X \cos \Omega + Y \sin \Omega)}{1 - Sf + Cg}, \\ r \sin u &= \frac{X \sin \Omega - Y \cos \Omega}{1 - Sf + Cg} \sec i. \end{aligned} \tag{IX; 42}$$

Das sind die Grundgleichungen, auf denen die Methode beruht.

Für die Zeitpunkte t_1, t_2, t_3 sind die doppelten Inhalte der Dreiecksflächen gleich den Beträgen der Ausdrücke

$$\Delta_1 = r_2 r_3 \sin (u_3 - u_2),$$
$$\Delta_2 = r_3 r_1 \sin (u_1 - u_3),$$
$$\Delta_3 = r_1 r_2 \sin (u_2 - u_1),$$

die durch zyklische Vertauschung der Indices auseinander hervorgehen. Setzt man (IX; 42) ein, so ergibt sich, wenn unter der Indexfolge i, j, k eine der drei zyklischen Permutationen von 1, 2, 3 verstanden wird, nach leichter Umformung

$$\Delta_i (1 - S_j f + C_j g)(1 - S_k f + C_k g) = D_i \sec i \,(1 - \mu_i f + \nu_i g),$$

wo zur Abkürzung

$$D_i = X_j Y_k - X_k Y_j; \quad D_i \mu_i = Q_j Y_k - Q_k Y_j; \quad D_i \nu_i = Q_j X_k - Q_k X_j$$

gesetzt worden ist. Die Beträge der D_i sind dabei die doppelten Inhalte der von den Erdörtern E_j, E_k gebildeten Dreiecksflächen. Setzen wir daher, wie schon früher,

$$n_1 = -\frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \quad N_1 = -\frac{D_1}{D_2}; \quad n_3 = -\frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad N_3 = -\frac{D_3}{D_2},$$

(wobei man bedenken möge, daß Δ_2 und D_2 negativ sind), so stellen die Größen

$$\varepsilon_1 = \frac{n_1}{N_1}; \quad \varepsilon_3 = \frac{n_3}{N_3}$$

die Quotienten zwischen den Dreiecksverhältnissen der Planetenbahn und den entsprechenden der Erdbahn dar, und es gelten die Beziehungen

$$\varepsilon_1 (1 - S_2 f + C_2 g)(1 - \mu_2 f + \nu_2 g) = (1 - S_1 f + C_1 g)(1 - \mu_1 f + \nu_1 g),$$
$$\varepsilon_3 (1 - S_2 f + C_2 g)(1 - \mu_2 f + \nu_2 g) = (1 - S_3 f + C_3 g)(1 - \mu_3 f + \nu_3 g),$$

die auf zwei quadratische Gleichungen für f und g von der Form

$$\text{(IX; 43)} \qquad \begin{aligned} a_1 f^2 + b_1 f g + c_1 g^2 + d_1 f + e_1 g + h_1 &= 0, \\ a_3 f^2 + b_3 f g + c_3 g^2 + d_3 f + e_3 g + h_3 &= 0 \end{aligned}$$

führen. Multipliziert man diese Gleichungen mit a_3 bzw. $-a_1$ und addiert sie, so erhält man eine weitere Gleichung von der Form

$$b_2 f g + c_2 g^2 + d_2 f + e_2 g + h_2 = 0,$$

aus der

$$\text{(IX; 44)} \qquad f = -\frac{c_2 g^2 + e_2 g + h_2}{b_2 g + d_2}$$

folgt. Setzt man dies in eine der beiden Gleichungen (IX; 43) ein, so entsteht eine Gleichung vierten Grades für g, die in dieser Methode die Stelle der GAUSS-

schen Gleichung bzw. der LAGRANGEschen Gleichung achten Grades vertritt, und deren Auflösung durch Näherungsrechnung keine großen Schwierigkeiten macht, zumal bei Planetoidenbahnen, wo f und g gewöhnlich klein sind. Ist g gefunden, ergibt sich f aus (IX; 44).

Man beginnt die Hypothesenrechnung, indem man n_1, n_3 mit einem geschätzten r_2 nach der ENCKEschen Formel (IX; 19) berechnet, bestimmt dann, wie eben geschildert, f und g, womit genäherte Werte i, Ω bekannt sind. Aus (IX; 42) folgen dann für die drei Örter die r_i, die Argumente der Breite u_i und damit auch die Differenzen $u_j - u_k = v_j - v_k$ der wahren Anomalien. Mit Hilfe dieser Größen lassen sich aber die Verhältnisse Sektor : Dreieck berechnen, worauf nach (IX; 38) neue n_i folgen, mit denen man die Rechnung wiederholt.

BAŽENOW führt diese hübsche Methode, deren Ausführung hier nur skizziert werden sollte, etwas anders durch, indem er aus (IX; 43) die konstanten Glieder eliminiert und dann eine Gleichung vierten Grades für $\frac{f}{g} = \operatorname{tg} \Omega$ aufstellt. Der oben beschriebene Weg ist aber vorzuziehen, da bei kleinen Neigungen die Knotenlänge unsicher bestimmbar wird, während die Größen f und g, die dann beide klein sind, in jedem Fall mit hinreichender Schärfe berechnet werden können.

83. *Bestimmung einer Kreisbahn*

Sind von einem neu entdeckten Planetoiden nur zwei vollständige Beobachtungen α_1, δ_1; α_2, δ_2 verfügbar, so ist die Bestimmung einer elliptischen Bahn unmöglich. Man muß sich dann damit begnügen, eine *Kreisbahn* zu bestimmen, die die beiden Beobachtungen befriedigt. Das gelingt im allgemeinen, da eine Kreisbahn durch vier unabhängige Elemente $[i, \Omega, a, u(t_0)]$ charakterisiert ist. In vielen Fällen wird die auf Grund einer solchen provisorischen Bahn berechnete Ephemeride die Wiederauffindung des Objekts und dann, mit Hilfe weiterer Beobachtungsdaten, die Berechnung elliptischer Bahnelemente ermöglichen.

Führen wir für die Zeiten t_1, t_2 die Vektoren $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{s}_i$ $(i = 1, 2)$ nach (IX; 9) ein, und seien

$$\mathfrak{q}_i = \varrho_i \mathfrak{i}_i$$

die topozentrischen Ortsvektoren des Planeten, wo

$$\mathfrak{i}_i(\cos\delta_i \cos\alpha_i;\quad \cos\delta_i \sin\alpha_i;\quad \sin\delta_i)$$

die Einheitsvektoren in der Richtung vom Beobachtungsort zum Planeten im Äquatorsystem bedeuten, ferner X_i, Y_i, Z_i als Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{s}_i$ die wegen der täglichen Parallaxe verbesserten Sonnenkoordinaten, so ist

$$\mathfrak{p}_i = \varrho_i \mathfrak{i}_i - \mathfrak{s}_i$$

und, da für eine Kreisbahn $|\mathfrak{p}_i| = a = \text{const}$,

$$(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) = a^2 \cos(u_2 - u_1) = a^2\left[1 - 2\sin^2\frac{u_2 - u_1}{2}\right] =$$

$$= (\varrho_1\mathfrak{i}_1 - \mathfrak{s}_1)(\varrho_2\mathfrak{i}_2 - \mathfrak{s}_2) = \varrho_1\varrho_2(\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2) - \varrho_1(\mathfrak{i}_1\mathfrak{s}_2) - \varrho_2(\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_1) + (\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2).$$

Es besteht also die geometrische Beziehung

$$\text{(IX; 45)} \qquad \sin^2\frac{u_2 - u_1}{2} = \frac{1}{2a^2}[a^2 - \varrho_1\varrho_2(\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2) + \varrho_1(\mathfrak{i}_1\mathfrak{s}_2) + \varrho_2(\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_1) - (\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2)],$$

während die dynamische Bedingung aus dem Flächensatz (bzw. der für $e = 0$ genommenen KEPLERschen Gleichung)

$$\text{(IX; 46)} \qquad u_2 - u_1 = \frac{\tau}{\sqrt{a^3}}$$

folgt. Schließlich ist, mit $(\mathfrak{s}_i\mathfrak{s}_i) = R_i^2$,

$$(\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_i) = a^2 = \varrho_i^2 - 2\varrho_i(\mathfrak{i}_i\mathfrak{s}_i) + R_i^2,$$

also der Zusammenhang zwischen a und den ϱ_i durch

$$\text{(IX; 47)} \qquad \varrho_i = (\mathfrak{i}_i\mathfrak{s}_i) \pm \sqrt{(\mathfrak{i}_i\mathfrak{s}_i)^2 + a^2 - R_i^2}$$

gegeben. Bei Planetoiden, die immer in der Nähe der Opposition beobachtet werden, ist $(\mathfrak{i}_i\mathfrak{s}_i)$ negativ, denn es ist dieses skalare Produkt dem Cosinus des Winkels zwischen den scheinbaren Örtern des Planeten und der Sonne proportional, der in diesem Fall immer $> 90°$ ist. Es ist demnach, da $\varrho_i > 0$, das positive Vorzeichen der Quadratwurzel zu wählen.

Die Hypothesenrechnung wird so durchgeführt, daß man mit einem plausiblen Wert für a die ϱ_i aus (IX; 47), sodann $u_2 - u_1$ sowohl aus der geometrischen Beziehung (IX; 45) als auch aus der dynamischen Gleichung (IX; 46) berechnet. Die Differenz

$$d = (u_2 - u_1)_{\text{geom.}} - (u_2 - u_1)_{\text{dyn.}}$$

wird dann durch Variation von a zum Verschwinden gebracht.

Die Ableitung der Elemente ist einfach, nachdem aus der letzten Hypothese a, ϱ_i, $u_2 - u_1$ endgültig bekannt geworden sind. Nach Abschn. 33 sind die rechtwinkligen Koordinaten im Äquatorsystem durch die GAUSSschen Gleichungen

$$\text{(IX; 48)} \qquad \begin{aligned} x_i &= \varrho_i \cos\delta_i \cos\alpha_i = a\,(p_x \cos u_i + q_x \sin u_i), \\ y_i &= \varrho_i \cos\delta_i \sin\alpha_i = a\,(p_y \cos u_i + q_y \sin u_i), \\ z_i &= \varrho_i \sin\delta_i \qquad\quad\; = a\,(p_z \cos u_i + q_z \sin u_i) \end{aligned}$$

darstellbar, wobei die Konstanten $p_x, \ldots q_z$ durch (IV; 18) als Funktionen von i, Ω und der Schiefe der Ekliptik ε gegeben sind. Setzt man $u = u(t_0) = \frac{u_1 + u_2}{2}$ als das zum Zeitpunkt $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$ gehörende Argument der Breite an (in der Kreisbewegung läuft ja u der Zeit proportional), so kann man

$$x_1 = a\left[p_x \cos\left(u - \frac{u_2 - u_1}{2}\right) + q_x \sin\left(u - \frac{u_2 - u_1}{2}\right)\right],$$

$$x_2 = a\left[p_x \cos\left(u + \frac{u_2 - u_1}{2}\right) + q_x \sin\left(u + \frac{u_2 - u_1}{2}\right)\right]$$

schreiben und daraus

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = a\,(p_x \cos u + q_x \sin u) \cos\frac{u_2 - u_1}{2},$$

$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = a\,(q_x \cos u - p_x \sin u) \sin\frac{u_2 - u_1}{2}$$

oder

$$P_x = p_x \cos u + q_x \sin u = \frac{1}{2a}(x_1 + x_2) \sec\frac{u_2 - u_1}{2},$$

(IX; 49)

$$Q_x = q_x \cos u - p_x \sin u = \frac{1}{2a}(x_2 - x_1) \operatorname{cosec}\frac{u_2 - u_1}{2}$$

ableiten. Entsprechende Formeln gelten für y und z. Da nun aus (IX; 48) die x_i, y_i, z_i bekannt sind, liefern (IX; 49) die Größen $P_x, \ldots Q_z$. Aus (IX; 49) und (IV; 18) leitet man aber leicht die Gleichungen

$$\sin i \sin u = P_z \cos\varepsilon - P_y \sin\varepsilon; \quad \sin\Omega = (P_y \cos u - Q_y \sin u) \sec\varepsilon;$$

$$\sin i \cos u = Q_z \cos\varepsilon - Q_y \sin\varepsilon; \quad \cos\Omega = P_x \cos u - Q_x \sin u$$

ab, aus denen i, Ω, $u(t_0)$ bestimmt werden können. Als Rechenkontrolle dienen die Beziehungen

$$P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = 0; \quad P_x \sin u + Q_x \cos u = -\cos i \sin\Omega.$$

Eine andere Möglichkeit, die Elemente abzuleiten, ergibt sich folgendermaßen. Schreibt man

$$x_2 = x_1 F + \dot{x}_1 G; \quad y_2 = y_1 F + \dot{y}_1 G; \quad z_2 = z_1 F + \dot{z}_1 G,$$

so ist für Kreisbahnen nach (VII; 14) wegen $\eta = \zeta = 0$

$$F = \cos\tau\sqrt{\mu}; \quad \sqrt{\mu}\,G = \sin\tau\sqrt{\mu},$$

wenn $\tau = k(t_2 - t_1)$ und $\mu = \frac{1}{a^3}$ gesetzt wird. Man findet demnach, wenn a und nach (IX; 48) die rechtwinkligen Koordinaten der beiden Örter bekannt sind,

$$\dot{x}_1 = \sqrt{\mu}\,\frac{x_2 - x_1 \cos \tau\sqrt{\mu}}{\sin \tau\sqrt{\mu}}$$

und entsprechende Formeln für $\dot{y}$, $\dot{z}$. Dann erhält man nach (V; 7), da hier $p = a$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{a}\cos i &= x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1,\\
\sqrt{a}\sin i \sin \Omega &= y_1\dot{z}_1 - z_1\dot{y}_1,\\
-\sqrt{a}\sin i \cos \Omega &= z_1\dot{x}_1 - x_1\dot{z}_1
\end{aligned}$$

zur Bestimmung von i, Ω; außerdem ergibt sich a als Kontrollwert. Nach (IV; 14) ist schließlich

$$\begin{aligned}
a \cos u_1 &= x_1 \cos \Omega + y_1 \sin \Omega,\\
a \sin u_1 \cos i &= y_1 \cos \Omega - x_1 \sin \Omega,\\
a \sin u_1 \sin i &= z_1,
\end{aligned}$$

woraus u_1 als Abstand des Ortes P_1 vom aufsteigenden Knoten folgt, außerdem a und i nochmals zur Kontrolle.

84. *Bestimmung einer Parabelbahn. Methode von* OLBERS

Bei Kometen wird man eine vorläufige Bahnbestimmung meist unter der Annahme durchführen, daß es sich um eine Parabelbahn handelt. In der Nähe des Perihels, in der sich Kometen zur Zeit der Entdeckung meist aufhalten, unterscheidet sich eine stark exzentrische Ellipse so wenig von einer Parabel, daß die Darstellung der ersten Beobachtungen des Objekts, die meist nur einen kurzen Bahnbogen überspannen, durch eine Parabelbahn fast immer befriedigend ist. Dieses Verfahren ist um so mehr gerechtfertigt, als die beobachteten Örter infolge des verwaschenen Aussehens der Kometen merklich unschärfer definiert sind als die von Planetoiden. Man wird daher bei der Bestimmung von Kometenbahnen aus den ersten Beobachtungen nach der Entdeckung nicht nur von der vereinfachenden Annahme $e = 1$ Gebrauch machen, sondern auch die kleinen Korrektionen wegen täglicher Parallaxe und Lichtzeit vernachlässigen dürfen, da diese weit innerhalb der durch die Unsicherheit der Beobachtungsdaten gesetzten Grenzen liegen. Aus denselben Gründen wird man solche Bahnbestimmungen auch meist mit fünfstelliger Rechnung durchführen, während bei der Berechnung von Planetoidenbahnen sechs- oder siebenstellige Rechnung angebracht ist.

Eine Parabel ist durch fünf Elemente (i, Ω, ω, q, T) bestimmt; es reichen also auch fünf unabhängige Beobachtungsdaten zu deren Ableitung aus. Man kann dieser Besonderheit dadurch Rechnung tragen, daß man etwa von der mittleren der drei Beobachtungen nur die Rektaszension α_2 oder die Deklination δ_2 heranzieht, oder daß man statt α_2 und δ_2 nur eine Funktion dieser beiden Werte benutzt. So benutzt WILKENS in seiner Methode (Abschn. 74), wenn es sich um die Bestimmung einer Parabelbahn handelt, von den beiden Funktionen C_2, S_2 der Koordinaten des mittleren Orts nur die eine, oder er führt (Abschn. 75) statt ihrer den Quotienten $U_2 = \frac{S_2}{C_2} = \operatorname{tg}\alpha_2$ ein. Es bleibt also von sechs verfügbaren unabhängigen Größen eine unbenutzt. Sie dient nach beendeter Bahnrechnung als Kontrolle: Wenn sie durch die aus den übrigen fünf Größen errechnete Bahn nicht dargestellt wird, der Fehler Beobachtung minus Rechnung also größer ist, als die Genauigkeit der beobachteten Örter erwarten läßt, so wird die hypothetische Voraussetzung einer Parabelbahn als unzureichend aufgegeben und eine nichtparabolische Lösung unter Verwendung aller sechs Daten versucht werden müssen.

Die klassische Methode der Bestimmung einer Parabelbahn durch W. OLBERS, deren Gedankengang hier beschrieben werden soll, ist von GAUSS und ENCKE in einigen Einzelheiten verbessert, neuerdings von T. BANACHIEWICZ und anderen in eine für das Maschinenrechnen bequemere Form gebracht worden.

Ausgangsbasis der OLBERSschen Analyse bildet die Gleichung (IX; 16), die man in der Form

$$\text{(IX; 50)} \qquad \varrho_3 = M\varrho_1 + m$$

schreiben kann, wenn man an Stelle der kurtierten Distanzen $\sigma_i = \varrho_i \cos\beta_i$ die Distanzen ϱ_i selbst wieder einführt. Es gelten dann die Formeln des Abschn. 79 unverändert, wenn man ϱ_i statt σ_i setzt und unter $\mathfrak{i}_i$ die Einheitsvektoren

$$\mathfrak{i}_i\,(\cos\beta_i\cos\lambda_i;\quad \cos\beta_i\sin\lambda_i;\quad \sin\beta_i)$$

versteht, die von den Erdörtern zu den Kometenörtern führen. Dabei ist M durch

$$\text{(IX; 51)} \qquad M = \frac{n_1}{n_3}\,\frac{(\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{s}_2)}{(\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_3\mathfrak{s}_2)} \approx \frac{\tau_1}{\tau_3}K$$

darstellbar, also angenähert dem Verhältnis der Zwischenzeiten proportional, während der Faktor K eine bekannte Größe ist. Ferner ist

$$\text{(IX; 52)} \qquad m = \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3}\right)\frac{(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2\mathfrak{i}_2)}{(\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_3\mathfrak{s}_2)} = \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3}\right)k \approx 0$$

verschwindend klein, denn ebenso wie die Dreiecksverhältnisse der Kometenbahn sind auch die der Erdbahn den Zwischenzeiten angenähert proportional, so daß die Quotienten n_1/n_3 und N_1/N_3 bis auf Terme höherer Ordnung ein-

ander gleich sind. Man darf daher in erster Näherung

$$\varrho_3 = M \varrho_1 \tag{IX; 53}$$

setzen.

Daß man hier, im Gegensatz zu den Methoden der Bahnbestimmung ohne Voraussetzungen über die Exzentrizität, die grobe Näherung $\frac{n_1}{n_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3}$ verwenden darf, liegt daran, daß die Gleichung (IX; 53) nicht dazu verwendet wird, um die dynamischen Beziehungen zwischen den Örtern zum Ausdruck zu bringen. Zu diesem Zwecke stehen hier andere Gleichungen zur Verfügung, die für die Parabelbewegung streng gültig sind. In der Methode von OLBERS dient als dynamische Bedingung die EULERsche Gleichung (VI; 13)

$$6\tau_2 = (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}}. \tag{IX; 54}$$

Im System der Ekliptik seien nun wieder

$$\mathfrak{p}_i(x_i, y_i, z_i); \quad \mathfrak{q}_i = \varrho_i \mathfrak{i}_i; \quad \mathfrak{S}_i(X_i, Y_i, 0)$$

die Vektoren, die den heliozentrischen Ort des Kometen und die topozentrischen (bzw. die auf den locus fictus bezogenen) Örter des Kometen und der Sonne bestimmen. Dann gilt

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i - \mathfrak{S}_i.$$

Ferner sind die Quadrate der Kometenabstände von der Sonne und der zwischen den beiden äußeren Kometenörtern ausgespannten Sehne

$$\begin{aligned} r_i^2 &= \varrho_i^2 - 2\varrho_i(\mathfrak{i}_i \mathfrak{S}_i) + R_i^2, \\ s^2 &= (\mathfrak{p}_3 - \mathfrak{p}_1)^2 = (\varrho_3 \mathfrak{i}_3 - \varrho_1 \mathfrak{i}_1 - \mathfrak{S}_3 + \mathfrak{S}_1)^2. \end{aligned} \tag{IX; 55}$$

Setzt man nun nach (IX; 53) $\varrho_3 = M\varrho_1$, was in dieser geometrischen Formel als Näherung, und in den meisten Fällen auch endgültig, ausreicht, so ergeben sich r_1^2, r_3^2, s^2 als quadratische Funktionen von ϱ_1 allein, die man leicht in der Form

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (\varrho_1 + f_1)^2 + l_1^2, \\ r_3^2 &= M^2[(\varrho_1 + f_3)^2 + l_3^2], \\ s^2 &= h^2[(\varrho_1 + f)^2 + l^2] \end{aligned} \tag{IX; 56}$$

schreiben kann. Dabei sind $f_1, l_1; f_3, l_3; f, l$ und h gewisse Funktionen bekannter Größen, deren explizite Wiedergabe hier nicht erforderlich ist. Führt man nun die drei Winkel ϑ_1, ϑ_3, ϑ durch

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\varrho_1 + f_1}{l_1}; \quad \operatorname{tg}\vartheta_3 = \frac{\varrho_1 + f_3}{l_3}; \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\varrho_1 + f}{l} \tag{IX; 57}$$

ein, so folgt aus (IX; 56)

(IX; 58) $$r_1 = l_1 \sec\vartheta_1; \quad r_3 = M l_3 \sec\vartheta_3$$

und

(IX; 59) $$s = h l \sec\vartheta.$$

Der Wert (IX; 59) für die Sehnenlänge stammt aus der geometrischen Beziehung (IX; 55). Zu einem dynamisch bedingten s, das mit diesem geometrischen in Einklang gebracht werden muß, verhilft dann die EULERsche Gleichung (IX; 54). Aus ihr ergibt sich

$$6\tau_2 = (r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}} \left[\left(1 + \frac{s}{r_1 + r_3}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{s}{r_1 + r_3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

oder, wenn man $\frac{s}{r_1 + r_3} = \varepsilon$ setzt und die Ausdrücke in der eckigen Klammer entwickelt,

$$2\tau_2 (r_1 + r_3)^{-\frac{3}{2}} = \eta = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{24}\varepsilon^2 - \frac{1}{128}\varepsilon^4 - \cdots\right).$$

Kehrt man diese Potenzreihe um, so erhält man

$$\varepsilon = \eta \left(1 + \frac{1}{24}\eta^2 + \frac{5}{384}\eta^4 + \cdots\right) = \frac{s}{r_1 + r_3}$$

und damit $s = \eta (r_1 + r_3) \cdot \mu(\eta^2)$, wo

$$\mu(\eta^2) = 1 + \frac{1}{24}\eta^2 + \frac{5}{384}\eta^4 + \cdots$$

leicht mit dem stets kleinen Argument η^2 tabuliert werden kann. Für s folgen demnach die beiden Ausdrücke

(IX; 60) $$s_{\text{geom.}} = h l \sec\vartheta; \qquad s_{\text{dyn.}} = \eta (r_1 + r_3)\, \mu(\eta^2) \quad \text{mit} \quad \eta^2 = \frac{4\tau^2}{(r_1 + r_3)^3}.$$

Die Hypothesenrechnung läßt sich nun auf zwei verschiedene Arten durchführen:

1. Man beginnt mit einem geschätzten Wert für $r_1 + r_3$; bei Kometen z.Z. der Entdeckung wird die Schätzung $r_1 + r_3 = 2$ selten allzusehr von der Wahrheit abweichen. Geht man hiermit in die zweite Gleichung (IX; 60) ein, so erhält man den dynamischen Wert von s. Mit ihm berechnet man ϑ aus (IX; 59), sodann ϱ_1 aus der letzten Gleichung (IX; 57), ϑ_1 und ϑ_2 aus den ersten beiden Gleichungen (IX; 57), schließlich r_1 und r_3 aus (IX; 58), worauf die Rechnung wiederholt wird. Das Näherungsverfahren ist abgeschlossen, wenn sich ϑ nicht mehr ändert und daher $s_{\text{geom.}} = s_{\text{dyn.}}$ ist.

2. Man berechnet mit einer plausiblen Annahme über ϱ_1 (etwa $\varrho_1 = 1$) nacheinander ϑ_1, ϑ_3, ϑ aus (IX; 57), r_1, r_3 aus (IX; 58) und schließlich die beiden Werte für s aus (IX; 60) und sorgt dann durch Variation des Anfangswertes dafür, daß beide s übereinstimmen.

In den Konstanten der Gleichung (IX; 56) sind von den sphärischen Koordinaten des Kometen nur die des ersten und des dritten Ortes enthalten, während M (und ebenfalls m) auch von denen des mittleren Ortes abhängen. Es läßt sich nun zeigen, daß die am Beginn dieses Abschnitts gestellte Forderung erfüllt ist, daß nämlich nicht beide Koordinaten des mittleren Ortes in die Rechnung eingehen, sondern nur eine Funktion beider.

Durch Ausführung der Operationen (IX; 51, 52) erhält man nach Auflösung der durch die gemischten Produkte dargestellten Determinanten

$$K = \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_3} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_1 \sin(\lambda_2 - L_2) - \operatorname{tg}\beta_2 \sin(\lambda_1 - L_2)}{\operatorname{tg}\beta_2 \sin(\lambda_3 - L_2) - \operatorname{tg}\beta_3 \sin(\lambda_2 - L_2)},$$

$$k = \frac{1}{\cos\beta_3} \cdot \frac{R_1 \sin(L_2 - L_1) \operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_3 \sin(\lambda_2 - L_2) - \operatorname{tg}\beta_2 \sin(\lambda_3 - L_2)}.$$

Diese beiden Ausdrücke lassen sich aber in der Form

$$\operatorname{tg} J_i = \frac{\operatorname{tg}\beta_i}{\sin(\lambda_i - L_2)} \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$K = \frac{\cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2)}{\cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2)} \cdot \frac{\operatorname{tg} J_1 - \operatorname{tg} J_2}{\operatorname{tg} J_2 - \operatorname{tg} J_3},$$

$$k = \frac{R_1 \sin(L_2 - L_1)}{\cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2)} \cdot \frac{\operatorname{tg} J_2}{\operatorname{tg} J_3 - \operatorname{tg} J_2}$$

schreiben, aus der ersichtlich ist, daß K und k bzw. M und m von λ_2, β_2 nur insofern abhängen, als in ihnen die Größe

$$\text{(IX; 61)} \qquad \operatorname{tg} J_2 = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\sin(\lambda_2 - L_2)}$$

erscheint. Das bedeutet aber folgendes: Seien K_2 der Ort des Kometen und S_2 (auf der Ekliptik) der Ort der Sonne z.Z. der mittleren Beobachtung, dann gilt für den Neigungswinkel J_2 des Größtkreises S_2K_2 gegen die Ekliptik eben die Formel (IX; 61). Diese Beziehung erfüllen aber, außer den Koordinaten von K_2, auch die Koordinaten jedes anderen auf diesem Größtkreise liegenden Punktes. Der Ort K_2 wird also bei der Bahnbestimmung nur insofern herangezogen, als die Tatsache benutzt wird, daß er jenem Kreise angehört.[1])

[1]) In der klassischen Literatur werden meistens statt der Sonnenlängen die von ihnen um 180° verschiedenen heliozentrischen Längen der Erde (des locus fictus) benutzt. Bezeichnet man diese mit L_i, so ändert sich in dem obigen Formelsystem nur das Vorzeichen von k.

Die Näherungswerte $m = 0$, $M = K\frac{\tau_1}{\tau_3}$ bedürfen bei ersten Bahnbestimmungen von Kometen selten einer Verbesserung. Bei größeren Zwischenzeiten – besonders wenn diese auch noch stark verschieden sind – ist es jedoch nötig, strengere Ausdrücke einzuführen, d.h. das Dreiecksverhältnis

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{y_3}{y_1}$$

durch Bestimmung der Verhältnisse Sektor : Dreieck zu korrigieren, wobei man die für Parabelbahnen gültige einfache Formel (VI; 80) verwendet. Zu diesem Zweck benötigt man neben r_1 und r_3 auch einen Wert für r_2, den man mit hinreichender Genauigkeit aus (IX; 24)

$$r_2 \tau_2 = r_1 \tau_1 + r_3 \tau_3$$

erhält. Ist dies geschehen und sind M und m neu bestimmt, so kann man mit

$$\varrho_3 = \varrho_1 \left(M + \frac{m}{\varrho_1}\right) = \varrho_1 M^*$$

die Analyse unter Verwendung des gleichen Formelsatzes wiederholen. Der in der Klammer auftretende Ausdruck $\frac{m}{\varrho_1}$ wird dabei (wegen des sehr kleinen m) genügend genau mit dem aus der vorangegangenen Rechnung bekannten Näherungswert ϱ_1 berechnet.

Eine Kontrolle der Rechnung erzielt man, indem man die Koordinaten des mittleren Ortes mit Hilfe der nach Abschluß des Verfahrens erhaltenen Bahnelemente ableitet und mit den beobachteten vergleicht. Die Bahnrechnung selbst ist in Ordnung, wenn die Funktion (IX; 61) mit den berechneten Koordinaten λ_2, β_2 innerhalb der Rechengenauigkeit den gleichen Wert ergibt wie mit den beobachteten. Bestehen darüber hinaus noch fühlbare Abweichungen in den Werten λ_2 und β_2 selbst, so ist die Annahme einer Parabelbahn unzulässig gewesen, und man muß die Bahnbestimmung ohne Voraussetzung über die Exzentrizität nach einem der früher geschilderten Verfahren wiederholen.

85. *Bahnbestimmung aus vier Örtern*

In jenem Ausnahmefall, daß alle Örter des Himmelskörpers in der Ekliptik liegen, sind, da die Neigung ($i = 0$) und die Knotenlänge entfallen, nur noch vier Elemente zu bestimmen. Es sind also, da die ekliptikalen Breiten alle null sind, vier ekliptikale Längen λ_i zur Festlegung der Bahn nötig. Man wird aber auch dann, wenn die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik zwar nicht verschwindet, aber klein ist, vier Beobachtungen brauchen, da dann das Problem aus drei Beobachtungen, wie schon im Abschn. 73 festgestellt wurde, nur ungenau lösbar ist. Man wird dann acht Daten zur Bestimmung der sechs

Bahnelemente zur Verfügung haben – von den vier ekliptikalen Breiten, die sämtlich klein sind, wird man also nur zwei brauchen. In der nachfolgend beschriebenen Methode werden statt dessen von den vier Breiten nur die Cosinus verwendet, die sich von eins nur wenig unterscheiden. Diese Methode ist von A. Berberich auf eine Form gebracht worden, die sich in der Praxis bewährt hat. J. Bauschinger hat ihr einige Verbesserungen hinzugefügt, während C. Veithen ihr die auch dem Folgenden zugrundeliegende Gestalt gegeben hat, die für das Maschinenrechnen besonders geeignet ist.

Von den Verhältnissen der Inhalte der zwischen den vier Planetenörtern möglichen sechs Dreiecke werden die folgenden vier benutzt, nämlich

$$n_1 = \frac{[\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4]}{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4]}, \quad n_4 = \frac{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]}{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4]}; \quad \bar{n}_1 = \frac{[\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4]}{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4]}, \quad \bar{n}_4 = \frac{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3]}{[\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_4]}.$$

Es bestehen dann, entsprechend (IX; 10), die beiden Vektorgleichungen

$$n_1\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}_2 + n_4\mathfrak{q}_4 = n_1\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_2 + n_4\mathfrak{s}_4,$$
$$\bar{n}_1\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{q}_3 + \bar{n}_4\mathfrak{q}_4 = \bar{n}_1\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_3 + \bar{n}_4\mathfrak{s}_4$$

oder, wenn wir, wie in Abschn. 84,

$$\mathfrak{q}_i = \varrho_i \mathfrak{i}_i$$

setzen und unter den $\mathfrak{i}_i$ die Einheitsvektoren mit den Koordinaten

$$\cos\beta_i \cos\lambda_i, \quad \cos\beta_i \sin\lambda_i, \quad \sin\beta_i$$

verstehen,

$$\text{(IX; 62)} \qquad \begin{aligned} n_1\varrho_1\mathfrak{i}_1 - \varrho_2\mathfrak{i}_2 + n_4\varrho_4\mathfrak{i}_4 &= n_1\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_2 + n_4\mathfrak{s}_4, \\ \bar{n}_1\varrho_1\mathfrak{i}_1 - \varrho_3\mathfrak{i}_3 + \bar{n}_4\varrho_4\mathfrak{i}_4 &= \bar{n}_1\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_3 + \bar{n}_4\mathfrak{s}_4. \end{aligned}$$

Das sind also sechs skalare Gleichungen, in denen außer den vier Distanzen ϱ_i noch die vier Dreiecksverhältnisse als unbekannte Größen auftreten. Multipliziert man die Gleichungen (IX; 62) vektoriell mit $\mathfrak{i}_2$ bzw. $\mathfrak{i}_3$, dann skalar mit dem Einheitsvektor $\mathfrak{e}$, der nach dem Nordpol der Ekliptik zeigt, so daß z. B.

$$(\mathfrak{e}[\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2]) = (\mathfrak{e}\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\lambda_1 & \sin\lambda_1 & \operatorname{tg}\beta_1 \\ \cos\lambda_2 & \sin\lambda_2 & \operatorname{tg}\beta_2 \end{vmatrix} \cos\beta_1\cos\beta_2$$
$$= \cos\beta_1\cos\beta_2\sin(\lambda_2 - \lambda_1)$$

und ebenso auch die übrigen gemischten Produkte von den Sinus der Breiten des Planeten und der Sonne unabhängig werden, so erhält man

$$n_1\varrho_1(\mathfrak{e}\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2) - n_4\varrho_4(\mathfrak{e}\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_4) = n_1(\mathfrak{e}\mathfrak{s}_1\mathfrak{i}_2) - (\mathfrak{e}\mathfrak{s}_2\mathfrak{i}_2) + n_4(\mathfrak{e}\mathfrak{s}_4\mathfrak{i}_2),$$
$$\bar{n}_1\varrho_1(\mathfrak{e}\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3) - \bar{n}_4\varrho_4(\mathfrak{e}\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_4) = \bar{n}_1(\mathfrak{e}\mathfrak{s}_1\mathfrak{i}_3) - (\mathfrak{e}\mathfrak{s}_3\mathfrak{i}_3) + \bar{n}_4(\mathfrak{e}\mathfrak{s}_4\mathfrak{i}_3).$$

Zwischen ϱ_1 und ϱ_4 bestehen also zwei Gleichungen von der Form

$$\text{(IX; 63)} \quad \begin{aligned} \varrho_4 &= A_2 \frac{n_1}{n_4} \varrho_1 + B_2 \frac{n_1}{n_4} + C_2 \frac{1}{n_4} + D_2, \\ \varrho_4 &= A_3 \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_4} \varrho_1 + B_3 \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_4} + C_3 \frac{1}{\bar{n}_4} + D_3. \end{aligned}$$

Wenn man nun

$$\begin{aligned} \tau_1 &= k(t_4 - t_2), & & & \tau_4 &= k(t_2 - t_1), \\ & & \tau_2 = \bar{\tau}_2 &= k(t_4 - t_1), & & \\ \bar{\tau}_1 &= k(t_4 - t_3), & & & \bar{\tau}_4 &= k(t_3 - t_1) \end{aligned}$$

setzt, so erhält man nach (IX; 25)

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{4}{3}\frac{\tau_4(\tau_1 + \tau_2)}{(r_1 + r_4)^3} - 4\frac{\tau_1^2\tau_4}{\tau_2}\frac{r_1 - r_4}{(r_1 + r_4)^4} + \cdots\right],$$

$$n_4 = \frac{\tau_4}{\tau_2}\left[1 + \frac{4}{3}\frac{\tau_1(\tau_2 + \tau_4)}{(r_1 + r_4)^3} + 4\frac{\tau_1\tau_4^2}{\tau_2}\frac{r_1 - r_4}{(r_1 + r_4)^4} + \cdots\right],$$

also

$$\text{(IX; 64)} \quad \begin{aligned} \frac{n_1}{n_4} &= \frac{\tau_1}{\tau_4} + \frac{4}{3}\xi\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_4}(\tau_4 - \tau_1) - 4\xi\eta\tau_1^2 + \cdots, \\ \frac{1}{n_4} &= \frac{\tau_2}{\tau_4} - \frac{4}{3}\xi\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_4}(\tau_2 + \tau_4) - 4\xi\eta\tau_1\tau_4 - \cdots, \end{aligned}$$

wenn

$$\xi = \frac{1}{(r_1 + r_4)^3}; \quad \eta = \frac{r_1 - r_4}{r_1 + r_4}$$

gesetzt wird. Entsprechende Formeln ergeben sich für $\bar{n}_1/\bar{n}_4$ und $1/\bar{n}_4$, wenn man die τ_i durch die $\bar{\tau}_i$ ersetzt. Führt man diese ziemlich genauen Ausdrücke in die Gleichungen (IX; 63) ein, so ergeben sich dynamische Zusammenhänge zwischen ϱ_1, ϱ_4 einerseits und r_1, r_4 andererseits. Daneben bestehen die geometrischen Beziehungen (IX; 55)

$$\text{(IX; 65)} \quad \begin{aligned} r_1^2 &= \varrho_1^2 - 2a_1\varrho_1 + b_1, \\ r_4^2 &= \varrho_4^2 - 2a_4\varrho_4 + b_4. \end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichungen (IX; 63; 65) erfolgt durch Versuche. Es wird nur selten nötig sein, die Ausdrücke (IX; 64) noch mittels der Verhältnisse Sektor : Dreieck zu verbessern, wofür nach Vorliegen von ϱ_1, ϱ_4 und nach Berechnung von ϱ_2, ϱ_3 aus (IX; 62) alle Vorbedingungen gegeben sind. Die Ableitung der Bahnelemente erfolgt nach Abschluß der Näherungsrechnung aus den Koordinaten der äußeren Örter.

86. *Bahnverbesserung durch Variation der geozentrischen Distanzen*

Von denjenigen Methoden der Bahnverbesserung durch Berücksichtigung weiterer Beobachtungsdaten, die sich auf das GAUSSsche Bahnbestimmungsprinzip stützen, zeichnet sich die der „Variation der geozentrischen Distanzen" durch ihre Einfachheit besonders aus.

Bei der Bahnbestimmung aus Randwerten werden ja, wie gezeigt worden ist, zwei Örter des Himmelskörpers im Raume festgelegt, indem man zu zwei durch Beobachtung bekannten sphärischen Positionen $\alpha_1, \delta_1; \alpha_2, \delta_2$ die zugehörigen geozentrischen Distanzen ϱ_1, ϱ_2 ermittelt. Diese beiden geozentrischen Örter, die man leicht in heliozentrische transformieren kann, ergeben dann, zusammen mit der Zwischenzeit $\tau = k(t_2 - t_1)$, die Bahnelemente.

Die Methode der Variation der geozentrischen Distanzen beruht auf dem Gedanken, die beiden aus der ersten Bahnbestimmung folgenden Abstände ϱ_1, ϱ_2 so abzuändern, daß die mit den veränderten Distanzen $\varrho_1 + \delta\varrho_1, \varrho_2 + \delta\varrho_2$ gerechneten Örter des Himmelskörpers, nötigenfalls nach Berücksichtigung der Störungen, die Menge der beobachteten Positionen so gut wie möglich darstellen – etwa so, daß die Quadratsumme der übrigbleibenden Abweichungen (Widersprüche) möglichst klein wird (vgl. Abschn. 77).

Es seien α_i, δ_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ die beobachteten Koordinaten zu den Zeiten t_i (wobei die Folge der Indices i nicht unbedingt eine zeitliche zu sein braucht), und es seien t_1, t_2 diejenigen beiden Zeitpunkte (etwa die beiden äußeren der drei Zeiten, mit denen die erste Bahnbestimmung durchgeführt worden ist), die zu den zu variierenden Abständen ϱ_1, ϱ_2 gehören. Man berechne nun drei Elementensysteme, und zwar

1. das System $E^{(\mathrm{I})}$ mit ϱ_1, ϱ_2;
2. das System $E^{(\mathrm{II})}$ mit $\varrho_1 + \Delta\varrho_1, \varrho_2$;
3. das System $E^{(\mathrm{III})}$ mit $\varrho_1, \varrho_2 + \Delta\varrho_2$,

wo $\Delta\varrho_1, \Delta\varrho_2$ zwei willkürlich gewählte kleine Größen (etwa $\Delta\varrho_1 = \Delta\varrho_2 = 0.001$) bedeuten. Die mit diesen Elementen berechneten sphärischen Koordinaten $\alpha_i^{(\mathrm{I})}, \delta_i^{(\mathrm{I})}; \alpha_i^{(\mathrm{II})}, \delta_i^{(\mathrm{II})}; \alpha_i^{(\mathrm{III})}, \delta_i^{(\mathrm{III})}$ werden von den beobachteten mehr oder weniger abweichen. Dagegen seien, wie schon erwähnt, $\varrho_1 + \delta\varrho_1, \varrho_2 + \delta\varrho_2$ die Distanzen, die dasjenige Elementensystem liefern, das die Beobachtungen im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate am befriedigendsten darstellt. Setzt man nun

$$\delta\varrho_1 = x\,\Delta\varrho_1; \quad \delta\varrho_2 = y\,\Delta\varrho_2,$$

so werden die Faktoren x und y die Unbekannten des Problems sein.

Solange man nun die Variationen $\delta\varrho_1, \delta\varrho_2$ als differentielle Größen ansehen darf (also als Größen, deren Quadrate unter die Schwelle der Rechengenauigkeit fallen), kann man irgendeine Funktion der Argumente ϱ_1, ϱ_2 nach dem TAYLORschen Satz in die Reihe

$$f(\varrho_1 + \delta\varrho_1;\ \varrho_2 + \delta\varrho_2) = f(\varrho_1; \varrho_2) + \frac{\partial f}{\partial\varrho_1}\,\delta\varrho_1 + \frac{\partial f}{\partial\varrho_2}\,\delta\varrho_2 + \cdots$$

entwickeln und Glieder höherer Ordnung vernachlässigen. Das gilt insbesondere für α_i und δ_i als Funktionen der beiden Distanzen. Es ist dann

$$\alpha_i(\varrho_1; \varrho_2) = \alpha_i^{(\mathrm{I})},$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \varrho_1} = \frac{\alpha_i^{(\mathrm{II})} - \alpha_i^{(\mathrm{I})}}{\Delta \varrho_1}; \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial \varrho_2} = \frac{\alpha_i^{(\mathrm{III})} - \alpha_i^{(\mathrm{I})}}{\Delta \varrho_2},$$

und es gelten daher die Beziehungen

$$\alpha_i - \alpha_i^{(\mathrm{I})} = x(\alpha_i^{(\mathrm{II})} - \alpha_i^{(\mathrm{I})}) + y(\alpha_i^{(\mathrm{III})} - \alpha_i^{(\mathrm{I})}),$$

$$\delta_i - \delta_i^{(\mathrm{I})} = x(\delta_i^{(\mathrm{II})} - \delta_i^{(\mathrm{I})}) + y(\delta_i^{(\mathrm{III})} - \delta_i^{(\mathrm{I})}),$$

aus denen x und y durch Ausgleichung zu bestimmen sind. Man hat dabei die Gleichungen in α_i noch mit den „Gewichten“ $\cos\delta_i$ zu multiplizieren. Als „Widersprüche“, deren Quadratsumme zu einem Minimum zu machen ist, wird man nämlich die sphärischen Abstände der berechneten Örter von den beobachteten wählen müssen. Es ist aber (Abb. 60) in dem sphärischen Dreieck zwischen dem Himmelsnordpol N und den beiden sehr dicht benachbarten Örtern P_0 (beobachtet) und P_1 (berechnet) des Planeten oder Kometen nach dem Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie

$$\cos\sigma = \sin\delta_1 \sin\delta_0 + \cos\delta_1 \cos\delta_0 \cos(\alpha_1 - \alpha_0),$$

wenn σ den kleinen Abstand zwischen P_0 und P_1 bedeutet. Setzt man nun

$$\cos\sigma = 1 - 2\sin^2\frac{\sigma}{2}; \quad \cos(\alpha_1 - \alpha_0) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2};$$

$$\cos(\delta_1 - \delta_0) = 1 - 2\sin^2\frac{\delta_1 - \delta_0}{2},$$

so erhält man leicht die Beziehung

$$\sin^2\frac{\sigma}{2} = \sin^2\frac{\delta_1 - \delta_0}{2} + \cos\delta_1 \cos\delta_0 \sin^2\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2},$$

aus der, wenn man die Sinus der kleinen Winkel mit den Bögen vertauscht und $\cos\delta_1 \cos\delta_0 = \cos^2\delta$ setzt,

$$\sigma^2 = (\delta_1 - \delta_0)^2 + (\alpha_1 - \alpha_0)^2 \cos^2\delta$$

folgt. Sind also $\Delta\alpha_i$ und $\Delta\delta_i$ die Widersprüche zwischen Beobachtung und Rechnung, so erfordert die Methode der kleinsten Quadrate, daß die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [(\Delta\alpha_i \cos\delta_i)^2 + (\Delta\delta_i)^2] = \mathrm{Min.}$$

erfüllt wird.

Die Methode der Variation der geozentrischen Distanzen in der hier geprägten Form zeichnet sich dadurch aus, daß die Normalgleichungen nur zwei Unbekannte haben und daher leicht zu lösen sind, während die in Abschn. 77 beschriebene Methode der Bahnverbesserung auf sechs (bzw. vier) Unbekannte führt. Diesem Vorteil steht aber als Nachteil gegenüber, daß zur Berechnung der Widersprüche die zeitraubende Ableitung der Bahnelemente und mit deren Hilfe die Berechnung der Örter mehrfach durchgeführt werden muß, während bei den auf dem Anfangswertprinzip beruhenden Methoden die Örter auf einfachste Weise, ohne den Umweg über die Kegelschnittelemente, direkt nach (V; 12) erhalten werden. Vorzüge und Nachteile beider Rechnungsarten stehen sich also gegenüber, und es bleibt letzten Endes dem Geschmack und der Gewohnheit des Rechners überlassen, welcher von beiden (und welcher der zahlreichen Varianten, die in Lehrbüchern und Abhandlungen zu finden sind) er den Vorzug geben will.

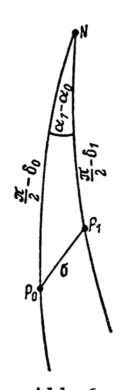


Abb. 60.
Abweichung des berechneten vom beobachteten Planetenort.

87. *Bahnbestimmung mit gleichzeitiger Berücksichtigung der Störungen*

Als letzte Variante der nach dem Gaussschen Prinzip aufgebauten Bahnbestimmungsmethoden verdient hier noch die von B. Numeroff[1]) erwähnt zu werden. Sie unterscheidet sich von der überwiegenden Mehrzahl der anderen Methoden dieser Art und natürlich auch von der Gaussschen Methode selbst dadurch, daß die Frage des Einflusses der Planetenstörungen nicht erst in einer der ersten Bahnbestimmung folgenden Bahnverbesserung aufgeworfen, sondern bereits von vornherein in Betracht gezogen wird. Tatsächlich spielen die Störungen, wie in Abschn. 78 gezeigt worden ist, schon bei Zwischenzeiten, wie sie bei Bahnbestimmungen von Planetoiden gewöhnlich vorkommen, eine merkliche Rolle: Das dort diskutierte Beispiel zeigt, daß bei einer Zwischenzeit von 58 Tagen die Koordinatenstörungen eines Planetoiden in dem sehr häufig vorkommenden Sonnenabstand von 2.5 A.E. sechs Einheiten der fünften Dezimale erreichen, wenn der Planet in Konjunktion mit Jupiter steht. Auch bei einer Zwischenzeit von 30 Tagen würde also diese (mit der zweiten Potenz der Zwischenzeit wachsende) Störung immer noch rund 15 Einheiten der sechsten Dezimale betragen. Damit ist gezeigt, daß eine Rechengenauigkeit von sechs Dezimalstellen, wie sie bei Bahnbestimmungen von Planetoiden angestrebt wird, sehr wohl zu falschen Vorstellungen über die Sicherheit der Resultate führen kann, wenn nicht die Störungen mit einbezogen werden. Jedenfalls sind die Fehler, die man begeht, wenn man in der Entwicklung der Koordinaten nach

[1]) Publ. Observ. Astrophys. Central de Russie *2*, 188. Moskau 1923.

Potenzen der Zwischenzeiten Glieder der 5. und 6. Ordnung vernachlässigt, bedeutend geringer als diejenigen, die entstehen, wenn man die Einflüsse der störenden Kräfte außer acht läßt.

Führt man, wie in Abschn. 72, die Größen[1])

(IX; 66)
$$U_i = \frac{y_i + Y_i}{x_i + X_i} = \operatorname{tg} \alpha_i; \qquad V_i = \frac{z_i + Z_i}{x_i + X_i} = \operatorname{tg} \delta_i \sec \alpha_i; \qquad (i = 1, 2, 3)$$
$$P_i = Y_i - U_i X_i; \quad Q_i = Z_i - V_i X_i$$

ein, so gelten zwischen den neun heliozentrischen Koordinaten x_i, y_i, z_i die sechs linearen Gleichungen

(IX; 67)
$$y_i = U_i x_i - P_i; \quad z_i = V_i x_i - Q_i.$$

Zur vollständigen Kenntnis der drei Örter fehlen also noch drei Gleichungen, die durch die dynamischen Beziehungen zwischen den Positionen des Himmelskörpers aufgestellt werden können. Numeroff leitet sie folgendermaßen ab: Allgemein ist

$$x = x_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 + \cdots,$$
$$\ddot{x} = 2a_2 + 6a_3 \tau + 12 a_4 \tau^2 + \cdots,$$

wo $a_1, a_2, \ldots$ gewisse Koeffizienten bedeuten, in denen (mit Ausnahme von a_1) auch Störungsglieder enthalten sind. Setzt man, wenn drei Beobachtungen zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 vorliegen, die Epoche auf den mittleren Ort ($t_2 = 0$) fest, so ist speziell

(IX; 68)
$$x_0 = x_2; \quad 2a_2 = \ddot{x}_2.$$

Ferner soll für die Zwischenzeiten

$$\omega = k(t_2 - t_1); \quad n\omega = k(t_3 - t_2)$$

gesetzt werden. Der Faktor $n = \dfrac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$ ist speziell gleich der Einheit, wenn die Zwischenzeiten gleich sind. Für die Taylorsche Entwicklung der x-Koordinate (für y und z gilt entsprechendes) des ersten und dritten Ortes von t_2 aus erhält man dann

[1]) Wenn es die Umstände verlangen, können die Funktionen U, V, P, Q auch gemäß (VIII; 62) anders definiert werden. Der nachfolgend beschriebene Algorithmus ist dann entsprechend umzuformen.

	(I)	(II)	(III)
$x_1 = x_2 - a_1\omega + a_2\omega^2 - a_3\omega^3 + a_4\omega^4 + \delta_1,$			n
$x_3 = x_2 + a_1 n\omega + a_2 n^2\omega^2 + a_3 n^3\omega^3 + a_4 n^4\omega^4 + \delta_3,$			1
$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 - 6a_3\omega + 12a_4\omega^2 + \varepsilon_1,$	$-n^2$	n	
$\ddot{x}_3 = \ddot{x}_2 + 6a_3 n\omega + 12a_4 n^2\omega^2 + \varepsilon_3,$	1	1	

wenn mit δ_i, ε_i Restglieder von 5. und höherer Ordnung bezeichnet werden. Multipliziert man diese Gleichungen mit den Faktoren (I) bis (III) und addiert, so ergibt sich

$$\text{(I)} \quad \ddot{x}_3 - (1 - n^2)\,\ddot{x}_2 - n^2\ddot{x}_1 = 6a_3 n(1 + n)\,\omega - n^2\varepsilon_1 + \varepsilon_3,$$

$$\text{(II)} \quad \ddot{x}_3 - (1 + n)\,\ddot{x}_2 + n\ddot{x}_1 = 12a_4 n(1 + n)\,\omega^2 + n\varepsilon_1 + \varepsilon_3,$$

$$\text{(III)} \quad x_3 - (1 + n)\,x_2 + nx_1 = a_2 n\omega^2 - a_3 n(1 - n^2)\,\omega^2 + a_4 n(1 + n^3)\,\omega^4 + n\delta_1 + \delta_3.$$

Setzt man dann die aus (IX; 68), (I) und (II) abgeleiteten Ausdrücke

$$a_2 n\omega^2 = \frac{1}{2} n\omega^2\ddot{x}_2,$$

$$a_3 n\omega^3 = \frac{\omega^2}{6(1 + n)}\,[\ddot{x}_3 - (1 - n^2)\,\ddot{x}_2 - n^2\ddot{x}_1 + n^2\varepsilon_1 - \varepsilon_3],$$

$$a_4 n\omega^4 = \frac{\omega^2}{12(1 + n)}\,[\ddot{x}_3 - (1 + n)\,\ddot{x}_2 + n\ddot{x}_1 - n\varepsilon_1 - \varepsilon_3]$$

in (III) ein, so entsteht die für die x-Koordinaten gültige dynamische Beziehung in Gestalt der Gleichung

$$\begin{aligned} x_3 - (1 + n)\,x_2 + nx_1 - \frac{\omega^2}{12}[n(1 + n - n^2)\,\ddot{x}_1 + (1 + n)\,(1 + 3n + n^2)\,\ddot{x}_2 + \\ + (n^2 + n - 1)\,\ddot{x}_3] = n\delta_1 + \delta_3 - \frac{\omega^2}{6}\,(1 - n)\,(n^2\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - \\ - \frac{\omega^2}{12}\,(1 - n + n^2)\,(n\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = \Delta x. \end{aligned} \qquad \text{(IX; 69)}$$

Entsprechende Formeln gelten für y und z.

In (IX; 69) sind die Entwicklungsglieder der 3. und 4. Ordnung, und zwar einschließlich der in ihnen enthaltenen Störungen, eliminiert worden, während

die Störungen der 2. Ordnung, als die Hauptstörungsterme, berücksichtigt werden, wenn man nach (VIII; 83)

$$\text{(IX; 70)} \quad \ddot{x} = -\frac{x}{r^3} + \frac{R(x)}{\omega^2} \quad \text{mit} \quad R(x) = \omega^2 \sum_\nu m_\nu \left(\frac{x_\nu - x}{\varrho_\nu^3} - \frac{x_\nu}{r_\nu^3} \right)$$

setzt. Die Summe erstreckt sich über alle Planeten, deren Störungen merklich sind; bei ersten Bahnbestimmungen von Planetoiden genügt es immer, sich auf den von Jupiter ($m_1 = 1/1047$) herrührenden Summanden zu beschränken.

Der „Rest“ Δ_x auf der rechten Seite von (IX; 69) setzt sich also aus den Entwicklungs- und Störungsgliedern von der 5. Ordnung an zusammen. Man kann diese Glieder in der Form

$$\Delta = \sum_{i=5}^{\infty} A_i a_i \omega^i$$

zusammenfassen. Aus

$$\delta_1 = \sum_{i=5}^{\infty} (-1)^i a_i \omega^i, \quad \varepsilon_1 = \sum_{i=5}^{\infty} (-1)^i i(i-1) a_i \omega^{i-2},$$

$$\delta_3 = \sum_{i=5}^{\infty} a_i n^i \omega^i, \quad \varepsilon_3 = \sum_{i=5}^{\infty} i(i-1) a_i n^{i-2} \omega^{i-2}$$

erhält man nämlich

$$n\delta_1 + \delta_3 = \sum a_i \omega^i [n^i + (-1)^i n],$$
$$n^2\varepsilon_1 - \varepsilon_3 = -\sum i(i-1) a_i \omega^{i-2} [n^{i-2} - (-1)^i n^2],$$
$$n\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \sum i(i-1) a_i \omega^{i-2} [n^{i-2} + (-1)^i n]$$

und daher, nach kurzer Rechnung,

$$A_i = n^i + (-1)^i n - \frac{i(i-1)}{12} [(-1)^i n(1 + n - n^2) + n^{i-2}(n^2 + n - 1)].$$

Speziell ist für $n = 1$

$$A_i = [1 + (-1)^i] \cdot \left[1 - \frac{i(i-1)}{12}\right],$$

d.h. $A_i = 0$ für ungerade Ordnungen i. Bei gleichen Zwischenzeiten werden die Reste Δ also erst in den geraden Ordnungen von der 6. ab bemerkbar.

Setzt man nun in (IX; 69) die Ausdrücke (IX; 70) ein, so erhält man, wenn als Abkürzungen

(IX; 71)

$$\lambda_i = \frac{n\omega^2}{2r_i^3}; \quad \alpha_1 = \frac{1 + n - n^2}{6(1+n)}, \quad \alpha_2 = \frac{3n - n^2 - 1}{6n}, \quad \alpha_3 = \frac{n^2 + n - 1}{6n(n+1)}$$

eingeführt werden,

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{1+n} + \frac{n}{2}[\alpha_1 R_1(x) + (1-\alpha_2) R_2(x) + \alpha_3 R_3(x)] = \tag{IX; 72}$$

$$= x_1\left(\frac{n}{1+n} + \alpha_1\lambda_1\right) - x_2[1-(1-\alpha_2)\lambda_2] + $$

$$+ x_3\left(\frac{1}{1+n} + \alpha_3\lambda_3\right).$$

Zwei weitere Gleichungen dieser Art erhält man für die y und z, die man aber mit Hilfe der Beziehungen (IX; 67) auf die x zurückführen kann. Setzt man vorübergehend

$$\beta_1 = \frac{n}{1+n} + \alpha_1\lambda_1; \quad \beta_2 = 1-(1-\alpha_2)\lambda_2; \quad \beta_3 = \frac{1}{1+n} + \alpha_3\lambda_3,$$

$$\bar{x}_i = x_i\beta_i; \quad \bar{P}_i = P_i\beta_i; \quad \bar{Q}_i = Q_i\beta_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

so erscheinen die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x}_3 &= \delta_x, \\ U_1\bar{x}_1 - U_2\bar{x}_2 + U_3\bar{x}_3 &= \delta_y + \bar{P}_1 - \bar{P}_2 + \bar{P}_3, \\ V_1\bar{x}_1 - V_2\bar{x}_2 + V_3\bar{x}_3 &= \delta_z + \bar{Q}_1 - \bar{Q}_2 + \bar{Q}_3 \end{aligned} \tag{IX; 73}$$

als Grundgleichungen der NUMEROFFschen Methode. Sie enthalten außer den Arbeitsunbekannten x_1, x_2, x_3 noch die Größen λ_i, die den reziproken Kuben der heliozentrischen Distanzen r_i proportional sind. Die Lösung des Systems ist immer möglich, wenn die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, und kann durch Iteration gewonnen werden, wenn man die geometrischen Beziehungen (IX; 37)

$$r_i^2 = x_i^2(1 + U_i^2 + V_i^2) - 2x_i(U_iP_i + V_iQ_i) + (P_i^2 + Q_i^2) \tag{IX; 74}$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

benutzt. Man beginnt etwa mit der Hypothese $r_1 = r_2 = r_3 = 2.5$ (oder irgendeinem anderen plausiblen Wert), rechnet nach (IX; 73) genäherte x_i und verbessert mit ihnen die r_i nach (IX; 74). Dabei reicht es aus, in der ersten Hypothesenrechnung $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$ zu setzen, und meistens genügt es auch später, die genäherten Ausdrücke

$$\delta_x = \frac{n}{2}R_2(x); \quad \delta_y = \frac{n}{2}R_2(y); \quad \delta_z = \frac{n}{2}R_2(z)$$

statt (IX; 72) zu gebrauchen. Hierbei sind nicht nur die gegen die Hauptstörungsglieder immer kleinen Reste Δ_x, Δ_y, Δ_z vernachlässigt, sondern es ist in

$$\delta_x = \frac{n}{2} R_2(x) + \frac{n}{2} [\alpha_1 R_1(x) - \alpha_2 R_2(x) + \alpha_3 R_3(x)]$$

der Klammerausdruck gleich null gesetzt worden. Für $n = 1$ wird nämlich $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{6}$, $\alpha_2 = \frac{1}{12}$ und daher

$$\alpha_1 R_1 - \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 = \frac{1}{6} (R_1 - 2 R_2 + R_3).$$

Der Klammerausdruck ist also (auch wenn die Zwischenzeiten nicht genau gleich sind) von der Größenordnung der zweiten Differenzen der Störungsgrößen, die immer sehr klein sind.

Sind brauchbare Ausgangswerte für die heliozentrischen Distanzen nicht zu erlangen oder handelt es sich um einen der Fälle, in denen man mit dem Auftreten von Doppellösungen zu rechnen hat, läßt sich aus der Gleichung für x_2, die man aus (IX; 73) durch Elimination von x_1 und x_3 erhält, und aus (IX; 74) leicht die Lagrangesche Gleichung achten Grades für r_2 herleiten, etwa indem man zunächst alle r_i gleich groß annimmt und die δ vernachlässigt. Form und Lösungen dieser Schlüsselgleichung liefern dann sowohl die nötigen Informationen über Ein- oder Mehrdeutigkeit des Problems als auch einen geeigneten Ausgangswert für das Iterationsverfahren.

Ein für die praktische Durchführung der Bahnbestimmung geeignetes Formelschema läßt sich aus den Gleichungen (IX; 73) leicht ableiten und soll daher hier nicht explizit angegeben werden, zumal der weitere Ausbau der Theorie auf Überlegungen führt, die den Rahmen der im Band I dieses Werkes zu behandelnden Themen überschreiten. So ist es z. B. genaugenommen nicht möglich, aus den drei heliozentrischen Örtern, die nach Abschluß der Hypothesenrechnung vorliegen, das System der Elemente einer oskulierenden Kegelschnittbahn abzuleiten, weil es sich ja hier bereits um gestörte Örter handelt. Numeroff hat deshalb im Anschluß an die Methode der Bahnbestimmung ein Verfahren entwickelt, ausgehend von diesen Örtern eine Ephemeride der gestörten Bewegung des Himmelskörpers durch numerische Integration der Bewegungsgleichungen zu berechnen. Das interessante Verfahren, das er dabei entwickelt und das in gewisser Hinsicht den aus der klassischen Astronomie bekannten Methoden der speziellen Störungsrechnung überlegen ist, wird mit diesen zusammen im Band II gewürdigt werden. Nachdem eine solche Ephemeride der gestörten heliozentrischen Koordinaten berechnet ist, kann man die Koordinaten und ihre ersten Ableitungen nach der Zeit für irgendeine Epoche durch Interpolation aus ihr entnehmen und diese Größen zur Ableitung der oskulierenden Bahnelemente nach dem in Abschn. 39 entwickelten Verfahren verwenden.

KAPITEL X

DAS ALLGEMEINE ZWEIKÖRPERPROBLEM

88. *Zweikörperbewegung unter dem Einfluß beliebiger Zentralkräfte*

Seit NEWTON sind viele Versuche unternommen worden, die Bewegung von Massenpunkten zu diskutieren, die unter der Annahme verschiedener Kraftgesetze vor sich gehen würde. Schon NEWTON selbst hat in seinem grundlegenden Werk dieses Problem angeschnitten, und die Mathematiker des 18. und 19. Jh. haben den von ihm untersuchten Beispielen viele andere hinzugefügt. Obwohl das Problem vorwiegend mathematisches Interesse hat, ist es für die Himmelsmechanik nicht ohne praktische Bedeutung. Vor allem sind es zwei Sonderfälle, in denen es wichtig ist, außer dem NEWTONschen Gravitationsgesetz noch andere Annahmen über die Abhängigkeit der Attraktionskraft von der Entfernung r des bewegten Körpers vom Attraktionszentrum zuzulassen. In Abschn. 27 haben wir gefunden, daß ein Stern im Innern eines kugelförmigen Sternhaufens sich nicht nach dem NEWTONschen Gesetz bewegt, sondern (wenn wir die Bewegung im statistischen Sinne betrachten, d.h., wenn wir den Fall größerer Annäherung an einzelne Individuen des Haufens ausschließen und die Potentialfunktion als stetige Funktion des Abstandes vom Haufenmittelpunkt ansehen) unter dem Einfluß einer Zentralkraft, deren Größe irgendeine von der Dichteverteilung der Massen im Haufen abhängige Funktion ist und von der wir a priori nur aussagen können, daß sie im Mittelpunkt des Haufens verschwindet und an seiner Oberfläche in das NEWTONsche Gesetz übergeht. Bei konstanter Massendichte (eine Annahme, die praktisch nur im Kern des Haufens annähernd verwirklicht sein wird) fanden wir, daß die Bewegung sich nach dem Kraftgesetz $f(r) \sim r$ vollzieht; nach Abschn. 29 ist dieses Gesetz außer dem NEWTONschen $f(r) \sim r^{-2}$ das einzige, das geschlossene Ellipsen als allgemeine Bahnformen liefert. Der zweite Fall, in dem Abweichungen vom NEWTONschen Gesetz eine Rolle in der Himmelsmechanik spielen, betrifft die Bewegung sonnennaher Planeten (Merkur!) auf Grund der allgemeinen Relativitätstheorie.

Eigentlich gehören auch noch jene Varianten der Zweikörpertheorie hierher, in denen die Anziehungskraft nicht nur vom Radiusvektor, sondern auch von der räumlichen Richtung abhängt, in der sich, vom Zentralkörper aus gesehen, der bewegte Massenpunkt befindet. Auch hierüber sind Untersuchungen angestellt worden, z.B. über den Fall einer ebenen Bewegung, bei der das Kraftgesetz die Form $f(r, \varphi)$ hat, wenn r, φ die Polarkoordinaten in der Bahnebene sind. Für die Himmelsmechanik sind diese mathematischen Probleme aber uninteressant. Anders ist es, wenn *räumliche* Bewegungen untersucht werden sollen, die sich in einem Kraftfeld abspielen, dessen Potentialfunktion nicht kugelsymmetrisch, sondern nur symmetrisch zu einer festen Achse im Raum gestaltet ist. In Abschn. 28 haben wir gesehen, daß Potentialfunktionen dieser Art das Kraftfeld eines abgeplatteten Himmelskörpers bestimmen: Die

Niveauflächen der Potentialfunktion eines abgeplatteten Gestirns sind ellipsoidähnliche Rotationsflächen; die zu diesen Flächen normalen Kraftvektoren haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt, und es handelt sich daher nicht um Zentralkräfte, wenn auch die Abweichungen von der Zentralbewegung klein sind und in größerer Entfernung vom Zentralkörper unmerklich werden. Für die Theorie des Mondes und der Satelliten der großen Planeten, insbesondere aber für die Theorie der künstlichen Erdsatelliten hat dieses Problem außerordentlich große Bedeutung. Es soll daher auch erst im Zusammenhang mit der Theorie der Satelliten behandelt werden, und wir begnügen uns hier noch mit der einfacheren Voraussetzung, daß die Potentialfunktion U bzw. das Kraftgesetz $f(r)$ eine Funktion des Abstandes r allein ist.

Die Bewegung ist in diesem Fall eine *Zentralbewegung*, deren Differentialgleichung in vektorieller Form

$$\ddot{\mathfrak{p}} = -f(r)\,\frac{\mathfrak{p}}{r} = \pm \operatorname{grad} U(r) \tag{X; 1}$$

lautet. Das Vorzeichen ist so zu wählen, daß $f(r)$ wesentlich positiv ist, wenn es sich um attraktive Kräfte handeln soll. Setzt man, wenn $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren in Richtung der positiven Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems bedeuten,

$$\mathfrak{p} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k},$$

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathfrak{k} = \frac{dU}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\mathfrak{k}\right),$$

so ist, da aus $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

folgt,

$$\operatorname{grad} U = \frac{dU}{dr}\cdot\frac{\mathfrak{p}}{r}; \quad f(r) = \left|\frac{dU}{dr}\right|.$$

Multipliziert man (X; 1) vektoriell mit $\mathfrak{p}$ bzw. skalar mit $\dot{\mathfrak{p}}$, so erhält man

$$\begin{aligned} &[\mathfrak{p}\ddot{\mathfrak{p}}] = \pm [\mathfrak{p} \operatorname{grad} U] = 0, \\ &(\dot{\mathfrak{p}}\ddot{\mathfrak{p}}) = \pm (\dot{\mathfrak{p}} \operatorname{grad} U) = \pm \left(\dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \pm \dot{U}. \end{aligned} \tag{X; 2}$$

In der zweiten Gleichung (X; 2) wird $U = U(x, y, z)$ als Funktion der Zeit angesehen, insofern als der Ort $\mathfrak{p}(x, y, z)$ eine Funktion der Zeit ist. Dagegen ist $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, d.h., die Potentialfunktion selbst ändert sich nicht mit der Zeit. Das ist durchaus nicht selbstverständlich: Man könnte z.B. annehmen, daß die Masse des Zentralkörpers im Laufe der Zeit zu- oder abnimmt, etwa, daß die

Sonne durch Aufsammeln interplanetarer Materie (Meteoriten) an Masse gewinnt oder durch Abstrahlung an Masse verliert.

Die Integration von (X; 2) ergibt den *Flächensatz*

$$[\mathfrak{p}\,\dot{\mathfrak{p}}] = \mathfrak{g} = \text{const}; \quad |\mathfrak{g}| = g \tag{X; 3}$$

und den *Energiesatz*

$$(\dot{\mathfrak{p}}\,\dot{\mathfrak{p}}) \pm 2U = h = \text{const.} \tag{X; 4}$$

Der Flächensatz besagt, daß die Bewegung eben ist; er läßt sich mithin (mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ als Koordinaten) skalar in der Form

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\varphi} = g = \text{const} \tag{X; 5}$$

schreiben. Den Energiesatz erhält man weniger einfach, aber ohne Vorzeichenschwierigkeiten, wenn man die zweite Gleichung (X; 2)

$$(\dot{\mathfrak{p}}\,\ddot{\mathfrak{p}}) = -\Phi(r)\,(\mathfrak{p}\,\dot{\mathfrak{p}}); \quad \Phi(r) = \frac{1}{r}f(r)$$

schreibt. Durch partielle Integration folgt dann

$$\frac{1}{2}\,(\dot{\mathfrak{p}}\,\dot{\mathfrak{p}}) = -\frac{1}{2}\Phi(r)\,(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}) + \frac{1}{2}\int\dot{\Phi}\cdot(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p})\,dt + h$$

oder, da

$$(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}) = r^2; \quad \dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dr}\cdot\frac{dr}{dt},$$

$$(\dot{\mathfrak{p}}\,\dot{\mathfrak{p}}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = -r^2\Phi(r) + \int r^2\frac{d\Phi}{dr}\,dr + h. \tag{X; 6}$$

Die Bahngleichung $r = r(\varphi)$ ist implizit durch die Differentialgleichung (II; 39)

$$f(r) = \frac{g^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right] \tag{X; 7}$$

gegeben, während der Zusammenhang zwischen φ und der Zeit t (in Einheiten von $1/k$ Tagen) aus dem Flächensatz

$$g\,dt = r^2\,d\varphi; \quad g(t - t_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2(\varphi)\,d\varphi \tag{X; 8}$$

folgt.

Die Hauptschwierigkeit des in dieser Form erweiterten Zweikörperproblems besteht in der Integration der Differentialgleichung 2. Ordnung (X; 7). Viel leichter ist natürlich das umgekehrte Problem zu lösen, zu einer vorgegebenen Bahn $r = r(\varphi)$ das Beschleunigungsgesetz derjenigen Zentralkraft zu finden,

die den Massenpunkt diese Bahn beschreiben läßt. Als Beispiel hierfür sei eine Bahn von der Gestalt

$$r = 2a \cos \varphi \tag{X; 9}$$

vorgelegt, die für $r \geqq 0 \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq +\frac{\pi}{2}\right)$ einen durch das Attraktionszentrum $r = 0$ gehenden Kreis vom Halbmesser a darstellt. Man findet dann aus (X; 7)

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{a \cos^3 \varphi} = \frac{8a^2}{r^3}$$

und damit

$$f(r) = \frac{8a^2 g^2}{r^5},$$

also eine Beschleunigung, die der fünften Potenz des Abstandes umgekehrt proportional ist. Die Kreisbahn (X; 9) stellt allerdings nur eine partikuläre Lösung des Problems $f(r) \sim r^{-5}$ dar; die allgemeine Lösung, auf die wir im nächsten Abschnitt noch zurückkommen werden, ist viel komplizierter.

Für $f(r) \sim r^{-2}$ und $f(r) \sim r$ läßt sich die Lösung der Differentialgleichung leicht erzwingen: Wir wissen, daß sie im ersteren Fall auf die NEWTONschen Kegelschnittbahnen mit dem Attraktionszentrum im Brennpunkt, im letzteren auf die „harmonische Bewegung" führt. Für andere Formen des Kraftgesetzes ergeben sich durchweg größere Schwierigkeiten, die zu eingehenden, aber weniger den Astronomen als den Mathematiker interessierenden Untersuchungen Anlaß gegeben haben.

Bei dem Versuch, die Integration des erweiterten Zweikörperproblems unter sehr allgemeinen Annahmen über das Kraftgesetz durchzuführen, können die im Kapitel V, insbesondere im Abschn. 41, entwickelten Gedankengänge mit Nutzen verwendet werden. Es sei $\psi(r)$ eine Funktion von r (etwa eine Potenz mit ganzzahligem Exponenten), deren Bestimmung als Funktion der Zeit gewünscht werde. Es sei ferner die Aufgabe gestellt, anstatt der Zeit $\tau = \varkappa(t - t_0)$ eine „Anomalie" q einzuführen, die mit τ gleichzeitig verschwindet und mit τ monoton wächst und die so beschaffen ist, daß ψ als Funktion von q der Differentialgleichung

$$\psi''' + \alpha^2 \psi' = 0 \tag{X; 10}$$

genügt, in der α^2 eine reelle Konstante ist und die Striche Ableitungen nach q bedeuten.

Für den Fall, daß es gelingen sollte, $q = q(\tau)$ so zu bestimmen, daß (X; 10) gilt, ist es nach Abschn. 41 immer möglich, ψ in der geschlossenen Form

$$\psi(q) = \psi_0 + c_1 \psi_0' q + c_2 \psi_0'' q^2$$

darzustellen, wo ψ_0, ψ_0', ψ_0'' Integrationskonstanten sind und die Funktionen

$c_\nu = c_\nu(\alpha^2 q^2)$ die in (V; 43) definierten c-Funktionen bedeuten. Die Anomalie q soll nach (V; 34) die Form

$$q(\tau) = \int_0^\tau p(\xi)\, d\xi \tag{X; 11}$$

haben, wo $p(\tau)$ eine für alle Zeiten positive Funktion ist, die der Bedingung

$$p(\tau) = \frac{\dot{\psi}}{\psi'} = \dot{q} \tag{X; 12}$$

unterworfen ist. Um diese „Quellfunktion" zu finden, wird man sowohl $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{d\tau}$ als auch $\psi' = \frac{d\psi}{dq}$ als Funktion von $\psi(q)$ darstellen müssen. Man erhält dann aus $d\tau = \frac{dq}{p(q)}$ die „Hauptgleichung"

$$\tau = \int_0^q \frac{dq}{p(q)}, \tag{X; 13}$$

die den Zusammenhang zwischen τ und q herstellt. Nun sind aber von den drei Integralen von (X; 10) zwei bekannt, nämlich der Energiesatz (X; 6) und der Flächensatz (X; 5). Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, $\dot{r}$ als Funktion von r auszudrücken, damit aber auch $\dot{\psi}$ als Funktion von ψ. Es folgt nämlich aus (II; 30) die für alle ebenen Bewegungen gültige Beziehung

$$(\dot{\mathfrak{p}}\dot{\mathfrak{p}}) = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

Drückt man hierin $(\dot{\mathfrak{p}}\dot{\mathfrak{p}})$ durch (X; 6) und $\dot{\varphi}$ durch (X; 5) aus, so ergibt sich

$$\dot{r} = \pm\sqrt{-r^2\Phi(r) + \int r^2 \frac{d\Phi}{dr}\, dr + h - \frac{g}{r^2}}\,; \quad \dot{\psi} = \frac{d\psi}{dr}\,\dot{r}. \tag{X; 14}$$

Andererseits besitzt (X; 10) die Integrale (V; 37)

$$\begin{aligned} \psi &= a + b\cos\alpha q + c\sin\alpha q, && (\alpha^2 > 0)\\ \psi &= a + bq + cq^2, && (\alpha^2 = 0)\\ \psi &= a + b\,\mathrm{Cof}\,\beta q + c\,\mathrm{Sin}\,\beta q. && (\alpha^2 = -\beta^2 < 0) \end{aligned} \tag{X; 15}$$

In diesen drei Fällen ist dann

$$\begin{aligned} \psi' &= \pm\alpha\sqrt{b^2 + c^2 - (\psi - a)^2}, && (\alpha^2 > 0)\\ \psi' &= \pm\sqrt{b^2 + 4c(\psi - a)}, && (\alpha^2 = 0)\\ \psi' &= \pm\beta\sqrt{(\psi - a)^2 - (b^2 - c^2)}. && (\alpha^2 = -\beta^2 < 0) \end{aligned} \tag{X; 16}$$

Um das Prinzip der folgenden Schlüsse zu erläutern, genügt es, sich auf den elliptischen Typ ($\alpha^2 > 0$) zu beschränken, wenn es auch gelegentlich nötig sein

wird, sich der übrigen Fälle zu erinnern. Man erhält dann aus (X; 12), wenn man, wie schon früher, $a = A$, $b^2 + c^2 = B^2$ setzt,

$$p = \frac{1}{\alpha}\frac{d\psi}{dr}\sqrt{\frac{-r^2\Phi + \int r^2 \frac{d\Phi}{dr}\,dr + h - \frac{g^2}{r^2}}{B^2 - (\psi - A)^2}}. \tag{X; 17}$$

Die Bedingung, daß $p(r)$ wesentlich positiv sein soll, wird immer dann erfüllt sein, wenn es gelingt, eine stets reelle Funktion $F(r)$ zu finden, die das Vorzeichen von $\frac{d\psi}{dr}$ hat und so beschaffen ist, daß

$$p(r) = F(r)\,\frac{d\psi}{dr}$$

geschrieben werden kann. Es muß also die Identität

$$\alpha^2 F^2 [B^2 - (\psi - A)^2] \equiv -r^2\Phi + \int r^2 \frac{d\Phi}{dr}\,dr + h - \frac{g^2}{r^2} \tag{X; 18}$$

erfüllt sein. Man hat also, wenn $\Phi(r)$ vorgelegt ist, durch geeignete Wahl von ψ und F als Funktionen von r dafür zu sorgen, daß beide Seiten von (X; 18) die gleiche mathematische Form erhalten und daß die Identität durch Vergleich der auf beiden Seiten auftretenden willkürlichen Koeffizienten hergestellt wird.

Ist dies gelungen, was man in vielen Fällen erwarten darf, so ist $\psi(r)$ als Lösung von (X; 10) in der Form (X; 15) darstellbar, und man erhält daraus auch $r = r(q)$. Daneben gilt die Hauptgleichung (X; 13), die den Zusammenhang zwischen q und der Zeit τ herstellt. Schließlich wird man noch die Gleichung $r = r(\varphi)$ aufzustellen wünschen. Zu diesem Zweck bildet man nach (X; 5, 14)

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{g}{r^2}; \quad \frac{dr}{d\tau} = \dot{r}(r); \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{g}{r^2 \cdot \dot{r}}$$

und hieraus durch Integration die Bahngleichung in Polarkoordinaten

$$\varphi - \varphi_0 = g\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2 \cdot \dot{r}(r)}. \tag{X; 19}$$

Ob die Hauptgleichung (X; 13) und die Bahngleichung (X; 19) sich durch Auswertung der Integrale in geschlossener Form oder durch konvergente Reihenentwicklungen darstellen lassen, ist eine Frage für sich, die in jedem Sonderfall individuell beantwortet werden muß. Einige dieser speziellen Fälle werden in den nächsten Abschnitten behandelt werden.

89. *Zentralkräfte, die Potenzen des Abstandes proportional sind*

Ist die Beschleunigung $f(r)$ einer Potenz von r proportional, also

$$f(r) = r^n; \quad \Phi(r) = r^{n-1},$$

so ist

$$\int r^2 \frac{d\Phi}{dr} dr = (n-1) \int r^n dr = \frac{n-1}{n+1} r^{n+1},$$

und die Identität (X; 18) nimmt die Form

$$\text{(X; 20)} \qquad \alpha^2 F^2 [B^2 - (\psi - A)^2] \equiv -\frac{2}{n+1} r^{n+1} + h - g^2 r^{-2} = \dot{r}^2$$

an. Der Fall $n = -1$ muß also ausgeschlossen bleiben; er entspricht der Potentialfunktion $U = \log r$ (logarithmisches Potential), die in diesem Problem mathematisch eine Sonderstellung einnimmt und hier übergangen werden darf. Für alle anderen ganzzahligen positiven oder negativen n läßt sich (X; 20) durch geeignete algebraische Funktionen $F^2(r)$, $\psi(r)$ erfüllen. Man darf sich dabei auf $\psi = r^k$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ beschränken.

Setzt man auch $F = r^m$ als Potenz von r an, so zeigt sich, daß die Identität nur für gewisse n gilt. Es ist in diesen einfachsten Sonderfällen

$$\text{(X; 21)} \quad \alpha^2 r^{2m} [B^2 - A^2 + 2A r^k - r^{2k}] \equiv -\frac{2}{n+1} r^{n+1} + h - g^2 r^{-2}.$$

Beide Seiten haben nur dann die gleiche algebraische Form, wenn die Exponenten $2m$, $2m + k$, $2m + 2k$ der linken Seite mit den Exponenten $n + 1$, 0, -2 der rechten Seite in Übereinstimmung gebracht werden können. Da die ersteren eine arithmetische Folge (eine aufsteigende oder absteigende, je nachdem k positiv oder negativ ist) bilden, muß dies auch für die letzteren gefordert werden. Das ist aber nur dann möglich, wenn n einen der drei Werte 1, -2, -5 annimmt. Für jedes dieser drei Beschleunigungsgesetze $f(r) = r$, r^{-2}, r^{-5} ergeben sich zwei Möglichkeiten m, k, nämlich

1) für $n = 1$: a) $k = 2$, $m = -1$; b) $k = -2$, $m = 1$,

2) für $n = -2$: a) $k = 1$, $m = -1$; b) $k = -1$, $m = 0$,

3) für $n = -5$: a) $k = 2$, $m = -2$; b) $k = -2$, $m = 0$.

Setzt man die Koeffizienten gleicher Potenzen von r in (X; 21) gleich, so ergeben sich in diesen Spezialfällen die jeweiligen Zusammenhänge zwischen α und den Integrationskonstanten A, B einerseits, h und g andererseits. Folgende Zusammenstellung zeigt für diese einfachsten Typen des allgemeinen Zweikörperproblems das Ergebnis dieser Untersuchung:

(X; 22)

n		k	m	α^2	A	B	$\dot{q}$
1	a)	2	-1	1	$\frac{h}{2}$	$\pm\frac{h}{2}\sqrt{1-\frac{4g^2}{h^2}}$	2
	b)	-2	1	g^2	$\frac{h}{2g^2}$	$\pm\frac{h}{2g^2}\sqrt{1-\frac{4g^2}{h^2}}$	$\frac{2}{r^2}$
-2	a)	1	-1	$-h$	$-\frac{1}{h}$	$\pm\frac{1}{h}\sqrt{1+hg^2}$	$\frac{1}{r}$
	b)	-1	0	g^2	$\frac{1}{g^2}$	$\pm\frac{1}{g^2}\sqrt{1+hg^2}$	$\frac{1}{r^2}$
-5	a)	2	-2	$-h$	$\frac{g^2}{2h}$	$\pm\frac{g^2}{2h}\sqrt{1-\frac{2h}{g^4}}$	$\frac{2}{r}$
	b)	-2	0	$-\frac{1}{2}$	g^2	$\pm g^2\sqrt{1-\frac{2h}{g^4}}$	$\frac{2}{r^3}$

Im einzelnen ist dazu noch zu bemerken:

1. $n = 1$: Beschleunigung dem Abstand direkt proportional (harmonische Bewegung, elastische Schwingung). Da hier $\alpha^2 \geqq 0$ (das Gleichheitszeichen wird nur im Fall (b) bei der geradlinigen Bewegung angenommen, da dann die Flächenkonstante g verschwindet), so beschränkt sich die Form der Bewegung auf den elliptischen Typ. Es gilt also

a) $r^2 = A + B\cos[\alpha(q - q_0)]$ mit $\alpha = 1$ und $\dot{q} = 2$, d.h. $q = 2\tau$. Ist $q_0 = 0$ der Wert, den q für $\tau = 0$ annimmt, so gilt also

$$r^2 = A + B\cos 2\tau.$$

Tatsächlich läßt sich die harmonische Bewegung mit der Zeit τ als Parameter durch

$$x = a\cos\tau, \quad y = b\sin\tau \tag{X; 23}$$

beschreiben, und es folgt hieraus

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2\cos^2\tau + b^2\sin^2\tau = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2}\cos 2\tau.$$

Im geradlinigen Fall ($g = 0$) ist $A = B$, d.h. $b = 0$, und die Bewegung verläuft längs der x-Achse nach der Gleichung $x = a\cos\tau$. Oder es ist $A = -B$, $a = 0$ und $y = b\sin\tau$.

b) Setzt man $\psi = r^{-2}$, so erhält man

$$\frac{1}{r^2} = A + B\cos[\alpha(q - q_0)]$$

mit

$$\alpha = g; \quad \dot{q} = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{g}\dot{\varphi}; \quad \alpha q = 2\varphi.$$

Diese Gleichung stellt also die Bahn in Polarkoordinaten, $r = r(\varphi)$ dar. Ist $q_0 = 0$ der Wert der Anomalie für $\varphi = 0$, so ist demnach

$$\frac{1}{r^2} = A + B\cos 2\varphi.$$

Das ist aber die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse; denn sind a, b deren Halbachsen, so ist

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Das geht aber, wenn man $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ einführt, in

$$r^2[b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi] = r^2\left[\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2\varphi\right] = a^2b^2$$

über, also in eine Gleichung der obigen Form.

Die Hauptgleichung lautet in diesem Fall, mit $\alpha = g$,

$$\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^q \frac{dq}{A + B\cos\alpha q}.$$

Sie ist, nach Ausführung des Integrals, von der Form

$$\tau = \operatorname{arc\,tg}\left(\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha q}{2}\right) \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\tau = \beta\operatorname{tg}\varphi.$$

Tatsächlich geht aus (X; 23)

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{bx}{ay} = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$$

hervor.

2. $n = -2$: Beschleunigung dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional (Newtonsches Gravitationsgesetz). Auch hier gibt es zwei Möglichkeiten, eine Funktion $\psi(r)$ durch eine Anomalie q in der geschlossenen Form (X; 18) darzustellen, nämlich (wenn wir uns auf den elliptischen Typ der Bewegung beschränken)

$$\text{a)} \quad r = A + B\cos\alpha q = a(1 - e\cos E),$$

$$\text{b)} \quad \frac{1}{r} = A + B\cos\alpha q = \frac{1}{p}(1 + e\cos v).$$

Im Fall (a) finden wir, mit $\dot{q} = \frac{1}{r}$, in der Hauptgleichung

$$\tau = \int_0^q r\,dq = \frac{A}{\alpha}(\alpha q) + \frac{B}{\alpha}\sin(\alpha q)$$

die KEPLERsche Gleichung wieder. Im Fall (b) ist

$$\alpha\dot{q} = \frac{\alpha}{r^2}, \quad \text{also} \quad r^2(\alpha\dot{q}) = \alpha = g,$$

somit $\alpha q = v$ die vom Perihel aus gezählte „wahre Anomalie" und (b) die Bahngleichung (Polargleichung der Kegelschnitte).

Da im Fall (b) $\alpha^2 \geqq 0$, so folgt, daß $\frac{1}{r}$ im allgemeinen beschränkt ist, also r stets oberhalb einer unteren positiven Grenze (Periheldistanz) liegt. Nur für $g = 0$ (geradlinige Bewegung) wird $r = 0$ erreicht.

3. $n = -5$: Beschleunigung der fünften Potenz des Abstandes umgekehrt proportional.

a) Für $k = 2$ erhält man

$$r^2 = A + B\cos[\alpha(q - q_0)] = A + B\,\mathfrak{Cof}\left[\sqrt{h}\,(q - q_0)\right], \tag{X; 24}$$

je nachdem $\alpha^2 = -h$ positiv oder negativ ist, was a priori nicht entschieden werden kann. Die Hauptgleichung hat die Form

$$\tau = \frac{1}{2}\int_0^q r\,dq = \frac{1}{2}\int_{q_0}^q \sqrt{A + B\cos[\alpha(q - q_0)]}\,dq.$$

Da ferner nach (X; 20)

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}r^{-4} + h - g^2 r^{-2}},$$

so folgt als Bahngleichung nach (X; 19)

$$\varphi - \varphi_0 = \pm g \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{2} - g^2 r^2 + h r^4}}. \tag{X; 25}$$

In beiden Fällen treten also elliptische Integrale auf, die nur unter besonderen Verhältnissen in geschlossener Form ausgeführt werden können. So erhält man

z.B. für $h = 0$ (parabolischer Typ), wenn man noch $g^2 = \frac{1}{8a^2}$ setzt, als Bahngleichung

$$\varphi = \pm \frac{1}{a\sqrt{8}} \int^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{r^2}{8a^2}}} = \pm \frac{1}{2a} \int^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2a}\right)^2}} = \pm \arccos \frac{r}{2a}$$

oder $r = 2a \cos \varphi$, d.h. die partikuläre Lösung (X; 9).

Ein weiterer einfacher Sonderfall ergibt sich, wenn $2h = g^4$ ist. In (X; 22) wird dann $B = 0$ und daher $r^2 = A =$ const. Diese Lösung, die eine Kreisbahn darstellt, ist aber nicht die einzige, die unter der obigen Bedingung existiert. Da nämlich $h = \frac{1}{2} g^4 > 0$, so ist hier $\alpha^2 = -h < 0$; es liegt also der hyperbolische Fall (X; 15, 16) vor. Die Identität (X; 18) lautet dann mit $F = r^{-2}$, $\psi = r^2$, $\beta^2 = -\alpha^2 = \frac{1}{2} g^4$

$$\frac{1}{2} g^4 r^{-4} \left[(r^2 - a)^2 - (b^2 - c^2)\right] \equiv \frac{1}{2} r^{-4} g^4 \left[r^2 - g^{-2}\right]^2.$$

Die linke Seite wird ein vollständiges Quadrat für $b^2 = c^2$, also $b = \pm c$. Es ist dann $a = \frac{1}{g^2}$, und die Lösung (X; 15) nimmt die Gestalt

$$r^2 = \frac{1}{g^2} + b\left(\mathfrak{Cof} \frac{g^2}{\sqrt{2}} q \pm \mathfrak{Sin} \frac{g^2}{\sqrt{2}} q\right) = \frac{1}{g^2} + e^{\pm \frac{g^2}{\sqrt{2}}(q - q_0)}$$

an. Die Kreisbahn $r = \frac{1}{g}$ stellt also nur den Grenzfall dieses Bahntyps für $b = 0$ dar.

Die Bahngleichung (X; 25) erhält für $h = \frac{1}{2} g^4$ die Form

$$\text{(X; 26)} \qquad \varphi - \varphi_0 = g\sqrt{2} \int^r \frac{dr}{(gr)^2 - 1} = \sqrt{2}\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\, gr$$

oder

$$r = \frac{1}{g} \mathfrak{Ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{\sqrt{2}}.$$

Die Kreisbahnlösung ist in (X; 26) als Grenzfall enthalten; für sie werden Zähler und Nenner des Integranden null [siehe Fußnoten [1]) und [2]) auf S. 450].

b) Für $k = -2$ erhält man ebenfalls elliptische Integrale in Haupt- und Bahngleichung.

Um andere Kraftgesetze $f(r) = r^n$ zu diskutieren, wird man für $F^2(r)$ irgendwelche gebrochenen rationalen Funktionen wählen müssen. Hier wollen wir,

ohne auf Einzelheiten einzugehen, nur das Prinzip, nach dem man zu verfahren hat, an zwei weiteren Beispielen erläutern:

4. $n = -3$: Man setze $\psi = r^2$ und $F^2 = \frac{1}{r^2(1 + r^2)}$. Dann ergibt (X; 20)

$$\alpha^2(B^2 - A^2 + 2Ar - r^4) \equiv 1 - g^2 + r^2(h - g^2 + 1) + hr^4.$$

Die Koeffizientenvergleichung liefert

$$\alpha^2(B^2 - A^2) = 1 - g^2,$$
$$2\alpha^2 A = 1 - g^2 + h,$$
$$\alpha^2 = -h,$$

woraus α^2, A, B als Funktionen von g und h folgen.

5. $n = -7$: Man setze $\psi = r^2$, $F^2 = \frac{1 + \gamma r^2}{r^6}$, wo γ eine noch zu bestimmende Konstante ist. Die Identität (X; 20) nimmt dann die Form

$$\alpha^2(B^2 - A^2 + 2Ar^2 - r^4)(1 + \gamma r^2) \equiv r^6\left(\frac{1}{3}r^{-6} - g^2 r^{-2} + h\right)$$

an. Vergleicht man die Koeffizienten gleicher Potenzen von r, so folgt

$$\alpha^2(B^2 - A^2) = \frac{1}{3}, \quad \alpha^2(1 - 2\gamma A) = g^2,$$
$$2A + \gamma(B^2 - A^2) = 0, \quad \alpha^2\gamma = -h.$$

Aus diesen vier Gleichungen erhält man, indem man A und B eliminiert, γ als Funktion von g, h aus der kubischen Gleichung

$$\gamma^3 - 3\gamma g^2 = 3h;$$

sodann

$$\alpha^2 = -\frac{h}{\gamma}, \quad B^2 - A^2 = -\frac{\gamma}{3h}, \quad A = \frac{\gamma^2}{6h}.$$

Alle diese Beispiele lehren, daß die Zentralbewegungen auf Grund verschiedener Kraftgesetze $f(r)$ gewisse gemeinsame Eigenschaften haben. Es soll hier nicht auf die interessante Frage eingegangen werden, ob immer, d.h. für *be-*

---

[1]) Im NEWTONschen Problem ($n = 2$; $\psi = r$) könnte man ähnliche Überlegungen anstellen. Für $h = -\frac{1}{g^2}$ wird nach (X; 22) $B = 0$, und es ergibt sich die Kreisbahnlösung $r = A = g^2$. Hier handelt es sich aber wegen $\alpha^2 = -h = \frac{1}{g^2} > 0$ um den elliptischen Typ; auf der linken Seite von (X; 20) erscheint ein vollständiges Quadrat nur für $b^2 + c^2 = 0$, d.h. für $b = c = 0$. Die Kreisbahn ist also hier die einzige Lösung dieses Typs.

[2]) Eine vollständige Diskussion des Falles $n = -5$ findet man bei MCMILLAN in The American Journ. of Math. XXX, 282 (1908). Siehe auch F. R. MOULTON: Einführung in die Himmelsmechanik (Übersetzung von W. FENDER), Leipzig 1927, S. 89ff.

liebige (stetige und differenzierbare) Funktionen $f(r)$ die Differentialgleichungen für $\psi(\tau)$ durch Übergang auf eine mit τ monoton wachsende Anomalie q auf die Normalform (X; 10) gebracht werden können. Die obigen Beispiele haben aber gezeigt, daß dieser Versuch für viele Beschleunigungsgesetze Erfolg hat und daß die Aussicht, ihn für eine sehr umfangreiche Gruppe von Gesetzen, etwa für alle rationalen Funktionen $f(r)$, durchführen zu können, recht groß ist.

Soweit dies aber der Fall ist, gilt folgender Satz: Die Bewegung erfolgt so, daß der Abstand r entweder periodisch zwischen zwei endlichen Grenzen (Perizentrum und Apozentrum) hin- und herschwankt (elliptischer Typ), oder so, daß r $\left(\text{oder } \frac{1}{r}\right)$ zwischen null und einem endlichen Wert einfach variiert. Als ein partikuläres Integral gibt es stets die Kreisbahn $r = \text{const}$, da es immer ein r gibt, für das Attraktions- und Zentrifugalkraft im Gleichgewicht stehen.

Besonderes Interesse verdienen die *periodischen Lösungen*. In den beiden Fällen $f(r) = r$ und r^{-2} sind alle Lösungen (im letzteren Fall alle Lösungen des elliptischen Typs) periodisch und haben die Gestalt geschlossener Ellipsen. Für andere Zentralkräfte sind die Bahnen nur für besondere Werte der Integrationskonstanten g, h Kurven, die sich nach jedem Umlauf oder nach einer endlichen Zahl von Umläufen schließen. Andernfalls wird der bewegte Körper im Laufe der Zeit jeden Punkt der Bahnebene erreichen, der in dem Kreisring $r_{\min} \leqq r \leqq r_{\max}$ liegt. Die Bahnkurve ist dann „knäuelförmig" und überdeckt die Fläche des Kreisrings in unendlich vielen Windungen. Besonders wichtig erscheinen in dieser Hinsicht die „fast geschlossenen" Bahnen, die man sich so entstanden denken kann, daß eine geschlossene Bahnbewegung (etwa eine elliptische) durch eine sehr langsame Drehung der großen Achse (Apsidenbewegung) in eine nichtgeschlossene übergeführt wird.

Bei den nichtelliptischen Bahntypen wird die Bewegung im allgemeinen in Spiralen erfolgen, wie sie geometrisch erzeugt werden, wenn man eine parabolische oder hyperbolische Bewegung in einem sich (schnell oder langsam) drehenden Koordinatensystem betrachtet.

90. *Die relativistische Zweikörperbewegung*

Unter den fast geschlossenen Bewegungen, die im allgemeinen Zweikörperproblem unter gewissen Bedingungen auftreten, nimmt die Bahnbewegung sonnennaher Planeten auf Grund der *allgemeinen Relativitätstheorie* eine besonders wichtige Stellung ein. Man kann das Beschleunigungsgesetz, das dieser Bewegung zugrunde liegt, in der Form

$$f(r) = \frac{1}{r^2} + \frac{\beta}{r^4}$$

schreiben, wo β eine sehr kleine Konstante bedeutet. Setzt man also

$$\Phi(r) = \frac{1}{r^3} + \frac{\beta}{r^5}; \quad \int r^2 \frac{d\Phi}{dr} dr = \frac{3}{r} + \frac{5}{3} \frac{\beta}{r^3}$$

in (X; 18) ein, so erhält diese Identität mit

$$F^2 = 1 + \frac{\gamma}{r}; \quad \psi = \frac{1}{r}$$

die sinnvolle Gestalt

$$\alpha^2\left(B^2 - A^2 + 2\frac{A}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{r}\right) \equiv h + \frac{2}{r} - \frac{g^2}{r^2} + \frac{2}{3}\frac{\beta}{r^3},$$

und es folgt durch Koeffizientenvergleichung

$$\alpha^2(B^2 - A^2) = h, \quad \alpha^2(2A\gamma - 1) = -g^2,$$

$$\alpha^2[2A + \gamma(B^2 - A^2)] = 2, \qquad \alpha^2\gamma = -\frac{2}{3}\beta.$$

Eliminiert man α, A, $B^2 - A^2$, so erhält man für die Konstante γ die Gleichung

(X; 27) $$h\gamma^3 - 2\gamma^2 - g^2\gamma = \frac{2}{3}\beta = -\alpha^2\gamma.$$

In der allgemeinen Relativitätstheorie ist $\beta = \frac{3p}{c^2}$, wo p den Parameter der KEPLERschen Ellipse, c die Lichtgeschwindigkeit darstellt. Benutzt man, wie üblich, als Längeneinheit 1 A.E. $= 1.495 \cdot 10^8$ km, als Zeiteinheit $\frac{1}{k} = 58.13244$ mittlere Tage, so wird $c = 10071.6$. Für die Bahn des Planeten Merkur ($p \approx 0.37$) wird also $\beta \approx 10^{-8}$ zu setzen sein, so daß Quadrate und höhere Potenzen dieser kleinen Zahl unbedenklich vernachlässigt werden können. Aus (X; 27) folgt daher

$$\gamma = -\frac{2}{3}\frac{\beta}{\alpha^2}, \quad \alpha^2 = g^2\left(1 + \frac{2\gamma}{g^2}\right) = g^2\left(1 - \frac{4}{3}\frac{\beta}{g^4}\right),$$

$$\alpha = g\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\beta}{g^4}\right).$$

Ferner ist

$$\dot{q} = F\left|\frac{d\psi}{dr}\right| = \frac{1}{r^2}\sqrt{1 + \frac{\gamma}{r}} = \frac{1}{r^2}\sqrt{1 - \frac{2}{3}\frac{\beta}{rg^2}} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\beta}{rg^2}\right),$$

also

(X; 28) $$\alpha\dot{q} = \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_{\text{rel.}} = \frac{g}{r^2}\left[1 - \frac{\beta}{3g^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{g^2}\right)\right],$$

während für die KEPLERsche Bewegung

(X; 29) $$\alpha\dot{q} = \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_{\text{Kepl.}} = \frac{g}{r^2} = \frac{\sqrt{p}}{r^2}$$

die Winkelbewegung in der Zeiteinheit darstellt.

In beiden Fällen ist

$$\frac{1}{r} = A + B \cos \alpha (q - q_0),$$

d.h., eine Bewegungsperiode (von Perihel zu Perihel) ist vollendet, wenn αq um 2π zugenommen hat. Nun ist aber die relativistische Winkelgeschwindigkeit (X; 28) um einen geringfügigen Bruchteil kleiner als die Winkelgeschwindigkeit der KEPLERschen Bewegung (X; 29). Es wird also, wenn die wahre Anomalie der KEPLERschen Bewegung um 2π gewachsen ist, d.h. nach einem siderischen Umlauf, die anomalistische Bewegung in der relativistischen Bahn noch nicht ganz beendet sein. Integrieren wir also die Ausdrücke (X; 28, 29) über die siderische Umlaufszeit T des Planeten, so erhalten wir

$$\int_0^T \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_{\text{rel.}} d\tau = \int_0^T \frac{g}{r^2}\left[1 - \frac{\beta}{3g^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{g^2}\right)\right] d\tau = 2\pi - \delta\varphi,$$

$$\int_0^T \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_{\text{Kepl.}} d\tau = \int_0^T \frac{g}{r^2}\, d\tau = 2\pi,$$

wo $\delta\varphi$ die in der Zeit T entstandene Differenz zwischen den Apsidenrichtungen der beiden Bahnen bedeutet. Es ist daher, wenn wir noch annehmen, daß beide Bewegungen unter den gleichen Anfangsbedingungen, also auch mit derselben Flächenkonstanten g, beginnen,

$$\delta\varphi = \beta \int_0^T \frac{1}{3gr^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{g^2}\right) d\tau$$

oder wenn wir im Integranden $g^2 = p$, $d\tau = \frac{r^2}{\sqrt{p}}\, d\varphi$ setzen,

$$\delta\varphi = \frac{\beta}{3p} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{p}\right) d\varphi.$$

Nun ist aber nach Abschn. 25 der über die wahre Anomalie φ genommene Mittelwert von $\frac{1}{r}$ gleich $\frac{1}{p}$. Man erhält also

$$\delta\varphi = \frac{2\pi\beta}{p^2} = \frac{6\pi}{pc^2}.$$

Ist nun U die in tropischen Jahren ausgedrückte Umlaufszeit des Planeten Merkur, so beträgt die Perihelverschiebung in hundert Jahren, ausgedrückt in Bogensekunden,

$$\delta\omega = \frac{600\,\pi}{U p c^2} \cdot 206265'' = 42''.9,$$

wenn $c = 10071.6$ A.E./k^{-1} Tage, $p = 0.37073$ A.E., $U = 0.24084$ gesetzt wird.

ANHANG A

Zehn kleinere Hilfstafeln zur Ephemeridenrechnung und Bahnbestimmung

I. Korrektion rechtwinkliger Äquatorkoordinaten der Sonne wegen der täglichen Parallaxe.

II. Genäherte Lösung der KEPLERschen Gleichung.

III. Hilfstafel zur Ephemeridenrechnung bei parabelnahen Ellipsen.

IV. Zur Ephemeridenrechnung bei parabelnahen Kegelschnitten. ANDOYERsche Faktoren.

V. Tafel $n(w)$ zur Bestimmung des Verhältnisses Sektor : Dreieck.

VI. TIETJENscher Faktor zur Bestimmung des Verhältnisses Sektor : Dreieck.

VII. Hilfstafel zur Entwicklung rechtwinkliger Koordinaten.

VIII. Konvergenzbereich von Potenzreihen nach der Zeit im Zweikörperproblem nach F. R. MOULTON.

IX. Hilfstafel zur Auflösung der LAGRANGEschen Schlüsselgleichung nach Th. v. OPPOLZER.

X. Hilfstafel zur genäherten Auflösung der Hauptgleichung für die Apsiden als Ausgangsort.

I

φ	$\varphi - \varphi'$	$\log \varrho$	$10^7 C$	$10^7 S$
0°	0′ 0″.0	0.000000	427	0
10	3′ 57″.2	9.999956	420	74
20	7′ 26″.1	9.999830	401	145
30	10′ 1″.5	9.999637	370	212
40	11′ 24″.8	9.999398	327	273
50	11′ 25″.6	9.999144	275	325
60	10′ 3″.6	9.998904	214	368
70	7′ 28″.4	9.998708	146	399

Korrektionsgrößen C, S der rechtwinkligen äquatorealen Koordinaten beim Übergang vom geozentrischen auf das topozentrische System und umgekehrt, in Einheiten der siebenten Dezimale, für Beobachtungsorte mit der geographischen Breite φ.

$\varphi - \varphi'$ ist der Unterschied zwischen geographischer und geozentrischer Breite, ϱ der Abstand des Beobachtungsortes vom Erdmittelpunkt in Einheiten des äquatorealen Erdhalbmessers. Ist $\pi_\odot = 8''.80$ die mittlere Sonnenparallaxe, so ist

$$C = \varrho \pi_\odot \sin 1'' \cdot \cos \varphi',$$

$$S = \varrho \pi_\odot \sin 1'' \cdot \sin \varphi'.$$

Für südliche Breiten erhalten $\varphi - \varphi'$ und S das negative Vorzeichen. Das Vorzeichen von C bleibt unverändert.

II

Differenz $E - M$ (exzentrische minus mittlere Anomalie) für ganze Zehntel der numerischen Exzentrizität e, als Funktion von M. Für $180° < M < 360°$ (rechter Tafeleingang) ist der Tafelwert negativ zu nehmen.

$M \setminus e$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	e / M
0°	0°0	0°0	0°0	0°0	0°0	0°0	0°0	0°0	0°0	0°0	360°
5	0.6	1.2	2.1	3.3	5.0	7.4	11.2	17.7	28.3	41.7	355
10	1.1	2.5	4.2	6.5	9.6	14.0	20.1	28.6	38.8	49.2	350
15	1.6	3.7	6.2	9.5	13.8	19.4	26.7	35.2	44.4	53.2	345
20	2.2	4.8	8.1	12.2	17.4	23.8	31.3	39.5	47.7	55.5	340
25	2.7	5.9	9.8	14.6	20.4	27.1	34.6	42.3	49.8	56.7	335
30°	3.1	6.9	11.4	16.7	22.8	29.7	36.9	44.1	50.9	57.2	330°
35	3.6	7.8	12.7	18.4	24.8	31.5	38.4	45.2	51.5	57.2	325
40	4.0	8.6	13.9	19.8	26.2	32.8	39.4	45.7	51.6	56.9	320
45	4.4	9.3	14.9	20.9	27.3	33.7	40.0	45.8	51.3	56.2	315
50	4.7	9.9	15.7	21.8	28.0	34.2	40.1	45.6	50.7	55.3	310
55	5.0	10.4	16.3	22.4	28.5	34.4	40.0	45.1	49.9	54.1	305
60°	5.2	10.8	16.7	22.7	28.6	34.3	39.6	44.4	48.8	52.8	300°
65	5.4	11.1	17.0	22.9	28.6	34.0	38.9	43.5	47.6	51.3	295
70	5.5	11.3	17.2	22.9	28.3	33.4	38.1	42.4	46.2	49.8	290
75	5.6	11.4	17.2	22.7	27.9	32.7	37.2	41.2	44.8	48.0	285
80	5.7	11.5	17.1	22.4	27.3	31.9	36.0	39.8	43.2	46.2	280
85	5.7	11.4	16.8	21.9	26.6	30.9	34.8	38.3	41.5	44.3	275
90°	5.7	11.2	16.5	21.4	25.8	29.8	33.5	36.7	39.7	42.3	270°
95	5.6	11.0	16.0	20.7	24.8	28.6	32.0	35.1	37.8	40.3	265
100	5.5	10.7	15.5	19.9	23.8	27.3	30.5	33.3	35.9	38.2	260
105	5.4	10.4	14.9	19.0	22.7	26.0	28.9	31.5	33.9	36.0	255
110	5.2	9.9	14.2	18.0	21.5	24.5	27.2	29.7	31.8	33.8	250
115	5.0	9.4	13.5	17.0	20.2	23.0	25.5	27.7	29.8	31.6	245
120°	4.7	8.9	12.6	15.9	18.9	21.4	23.7	25.8	27.6	29.3	240°
125	4.4	8.3	11.8	14.8	17.5	19.8	21.9	23.8	25.4	27.0	235
130	4.1	7.7	10.8	13.6	16.0	18.1	20.0	21.7	23.2	24.6	230
135	3.8	7.0	9.9	12.4	14.5	16.4	18.1	19.6	21.0	22.2	225
140	3.4	6.4	8.9	11.1	13.0	14.7	16.2	17.5	18.7	19.8	220
145	3.0	5.6	7.8	9.8	11.4	12.9	14.2	15.4	16.4	17.4	215
150°	2.6	4.9	6.8	8.4	9.9	11.1	12.2	13.2	14.1	14.9	210°
155	2.2	4.1	5.7	7.1	8.2	9.3	10.2	11.0	11.8	12.5	205
160	1.8	3.3	4.6	5.7	6.6	7.5	8.2	8.9	9.4	10.0	200
165	1.4	2.5	3.4	4.3	5.0	5.6	6.2	6.6	7.1	7.5	195
170	0.9	1.7	2.3	2.8	3.3	3.8	4.1	4.4	4.7	5.0	190
175	0.4	0.8	1.1	1.4	1.7	1.9	2.1	2.2	2.4	2.5	185
180°	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	180°

III

Hilfstafeln zur Ephemeridenrechnung bei parabelnahen Ellipsen.

Gausssche Methode

A	$\log B$	$\log \sigma$	$\log \nu$
0.00	0.000000	0.000000	0.000000
.01	001	.001743	.002178
.02	003	.003498	.004369
.03	007	.005266	.006574
.04	012	.007046	.008792
0.05	0.000019	0.008838	0.011024
.06	027	.010643	.013269
.07	037	.012461	.015529
.08	049	.014292	.017803
.09	061	.016137	.020092
0.10	0.000076	0.017995	0.022395
.11	092	.019866	0.24713
.12	110	.021751	.027046
.13	130	.023650	.029395
.14	151	.025564	0.31759
0.15	0.000173	0.027492	0.034138
.16	198	.029434	.036534
.17	224	.031391	.038946
.18	251	.033364	.041374
.19	281	.035351	.043818
0.20	0.000312	0.037354	0.046280
.21	345	.039373	.048758
.22	379	.041408	.051254
.23	416	.043459	.053768
.24	454	.045526	.056299
0.25	0.000493	0.047610	0.058849
.26	535	.049711	.061417
.27	578	.051829	.064003
.28	624	.053965	.066609
.29	671	.056118	.069234
.30	720	.058289	.071878

IV

Zur Ephemeridenrechnung. Faktoren $g(t^2)$ und $g'(t^2)$ nach Andoyer.

a) *Ellipsen* $t = \operatorname{tg} \frac{E}{4}$

$\frac{E}{4}$	$\log g(t^2)$	$\frac{E}{4}$	$\log g(t^2)$	$\frac{E}{4}$	$\log g(t^2)$
0°	0.0000000	15°	0.0000034	30°	0.000081
1°	0.0000000	16°	0045	31°	095
2	0000	17	0058	32	112
3	0000	18	0075	33	132
4	0001	19	0095	34	154
5	0001	20	0120	35	180
6°	0.0000001	21°	0.000015	36°	0.000209
7	0002	22	018	37	242
8	0003	23	022	38	281
9	0004	24	027	39	324
10	0007	25	033	40	374
11°	0.0000010	26°	0.000040	41°	0.000431
12	0014	27	048	42	495
13	0019	28	057	43	568
14	0026	29	068	44	651
15	0034	30	081	45	744

b) *Hyperbeln* $\sin \frac{E'}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \quad t = \operatorname{tg} \frac{E'}{4}$

$\frac{E'}{4}$	$\log g'(t'^2)$	$\frac{E'}{4}$	$\log g'(t'^2)$	$\frac{E'}{4}$	$\log g'(t'^2)$
0°	0.0000000	15°	0.0000030	30°	0.000034
1°	0.0000000	16°	0.0000039	31°	0.000034
2	0000	17	0050	32	032
3	0000	18	0062	33	027
4	0001	19	0077	34	018
5	0001	20	0094	35	001
6°	0.000001	21°	0.0000113	36°	9.999973
7	0002	22	0135	37	930
8	0003	23	0160	38	864
9	0004	24	0187	39	763
10	0006	25	0215	40	610
11°	0.0000009	26°	0.0000245	41°	9.99937
12	0013	27	0275	42	9.99901
13	0017	28	0303	43	9.99841
14	0023	29	0327	44	9.99741
15	0030	30	0343	45	9.99547

V

$n(w)$ zur Bestimmung des Verhältnisses Sektor: Dreieck:

$$n = \mu \cdot w^2 = w^2\left(\frac{2}{35} + \cdots\right).$$

Hier ist $\log \mu$ mit dem Argument w gegeben.

w	$\log \mu$	w	$\log \mu$	w	$\log \mu$
0.00	8.75696	0.10	8.78292	0.20	8.81085
0.01	8.75950	0.11	8.78562	0.21	8.81376
0.02	8.76204	0.12	8.78834	0.22	8.81670
0.03	8.76459	0.13	8.79108	0.23	8.81966
0.04	8.76716	0.14	8.79384	0.24	8.82265
0.05	8.76974	0.15	8.79662	0.25	8.82566
0.06	8.77234	0.16	8.79942	0.26	8.82869
0.07	8.77495	0.17	8.80224	0.27	8.83175
0.08	8.77758	0.18	8.80509	0.28	8.83483
0.09	8.78024	0.19	8.80796	0.29	8.83794
0.10	8.78292	0.20	8.81085	0.30	8.84109

VI

Zur Bestimmung des Verhältnisses Sektor : Dreieck. TIETJENscher Faktor.

h	$\log \sigma \sqrt{\frac{100}{99}}$	h	$\log \sigma \sqrt{\frac{100}{99}}$	h	$\log \sigma \sqrt{\frac{100}{99}}$
0.00	0.0021824	0.20	0.0020921	0.40	0.0019740
.01	819	.21	861	.41	685
.02	805	.22	800	.42	630
.03	783	.23	739	.43	575
.04	755	.24	678	.44	521
.05	721	.25	617	.45	467
.06	683	.26	557	.46	414
.07	641	.27	497	.47	361
.08	596	.28	437	.48	308
.09	548	.29	377	.49	255
0.10	0.0021497	0.30	0.0020317	0.50	0.0019203
.11	444	.31	258	.51	152
.12	390	.32	199	.52	102
.13	335	.33	140	.53	051
.14	278	.34	082	.54	001
.15	220	.35	024	.55	0.0018951
.16	161	.36	0.0019966	.56	902
.17	102	.37	909	.57	853
.18	042	.38	852	.58	805
.19	0.0020981	.39	796	.59	757
0.20	0.0020921	0.40	0.0019740	0.60	0.0018709

VII

Entwicklung der rechtwinkligen Koordinaten ($-0.100 \leqq \eta \leqq -0.060$)

η	A	B	C	D
−0.100	−0.55728	+0.0579	−0.36116	+0.0437
.099	662	577	085	436
.098	597	575	054	435
.097	531	572	023	433
.096	466	570	−0.35993	432
.095	401	568	962	431
.094	337	566	931	430
.093	272	564	901	428
.092	208	562	870	427
.091	144	560	840	426
−0.090	−0.55080	+0.0558	−0.35810	+0.0425
.089	016	556	779	423
.088	−0.54953	554	749	422
.087	889	553	719	421
.086	826	551	689	420
.085	763	549	659	418
.084	700	547	629	417
.083	638	545	599	416
.082	575	543	569	415
.081	513	541	539	414
−0.080	−0.54451	+0.0540	−0.35510	+0.0413
.079	389	538	480	411
.078	327	536	451	410
.077	266	534	421	409
.076	204	532	392	408
.075	143	530	362	407
.074	082	528	333	406
.073	021	526	304	404
.072	−0.53961	525	275	403
.071	900	523	246	402
−0.070	−0.53840	+0.0521	−0.35217	+0.0401
.069	780	519	188	400
.068	720	517	159	399
.067	660	516	130	398
.066	600	514	101	397
.065	541	512	073	396
.064	481	510	044	394
.063	422	509	015	393
.062	363	507	−0.34987	392
.061	304	505	958	391
−0.060	−0.53246	+0.0504	−0.34930	+0.0390

VII

($-0.060 \leqq \eta \leqq -0.020$)

η	A	B	C	D
−0.060	−0.53246	+0.0504	−0.34930	+0.0390
.059	187	502	902	389
.058	129	500	874	388
.057	071	499	845	387
.056	013	497	817	386
.055	−0.52955	495	789	385
.054	897	494	761	384
.053	840	492	733	383
.052	782	491	705	382
.051	725	489	678	381
−0.050	−0.52668	+0.0487	−0.34650	+0.0380
.049	611	486	622	379
.048	554	484	594	378
.047	498	483	567	377
.046	441	481	539	376
.045	385	479	512	375
.044	329	478	484	374
.043	273	476	457	373
.042	217	475	430	372
.041	162	473	402	371
−0.040	−0.52106	+0.0472	−0.34375	+0.0370
.039	050	470	348	369
.038	−0.51995	469	321	368
.037	940	467	294	367
.036	885	466	267	366
.035	830	464	240	365
.034	776	463	213	364
.033	721	461	187	363
.032	667	460	160	362
.031	613	458	133	361
−0.030	−0.51559	+0.0457	−0.34107	+0.0360
.029	505	456	080	359
.028	451	454	054	358
.027	397	452	027	357
.026	344	451	001	356
.025	290	450	−0.33974	355
.024	237	448	948	354
.023	184	447	922	353
.022	131	446	896	353
.021	078	444	870	352
−0.020	−0.51026	+0.0443	−0.33844	+0.0351

VII

($-0.020 \leqq \eta \leqq +0.020$)

η	A	B	C	D
− 0.020	− 0.51026	+ 0.0443	− 0.33844	+ 0.0351
.019	− 0.50973	442	818	350
.018	921	440	792	349
.017	868	439	766	348
.016	816	437	740	347
.015	764	436	714	346
.014	712	435	688	345
.013	661	433	662	344
.012	609	432	637	344
.011	558	431	611	343
− 0.010	− 0.50506	+ 0.0430	− 0.33586	+ 0.0342
.009	455	428	560	341
.008	404	427	535	340
.007	353	425	510	339
.006	302	424	484	338
.005	252	423	459	338
.004	201	422	434	337
.003	150	420	408	336
.002	100	419	383	335
− .001	050	418	358	334
0.000	− 0.50000	+ 0.0417	− 0.33333	+ 0.0333
+ .001	− 0.49950	415	308	333
.002	900	414	283	332
.003	850	413	258	331
.004	801	411	234	330
.005	752	410	209	329
.006	702	409	184	328
.007	653	408	160	328
.008	604	407	135	327
.009	555	406	110	326
+ 0.010	− 0.49506	+ 0.0404	− 0.33086	+ 0.0325
.011	457	403	061	324
.012	409	402	037	324
.013	360	401	012	323
.014	312	399	− 0.32988	322
.015	264	398	964	321
.016	216	397	940	320
.017	168	396	915	320
.018	120	395	891	319
.019	072	394	867	318
+ 0.020	− 0.49024	+ 0.0393	− 0.32843	+ 0.0317

VII

$(+0.020 \leqq \eta \leqq +0.060)$

η	A	B	C	D
+0.020	−0.49024	+0.0393	−0.32843	+0.0317
.021	−0.48977	391	819	317
.022	929	390	795	316
.023	882	389	771	315
.024	835	388	747	314
.025	788	387	724	313
.026	741	386	700	313
.027	694	385	676	312
.028	647	384	652	311
.029	600	383	629	310
+0.030	−0.48554	+0.0382	−0.32605	+0.0310
.031	508	381	582	309
.032	461	379	558	308
.033	415	378	534	308
.034	369	377	511	307
.035	323	376	488	306
.036	277	375	464	305
.037	231	374	441	305
.038	186	373	418	304
.039	140	372	395	303
+0.040	−0.48095	+0.0371	−0.32372	+0.0302
.041	049	370	348	302
.042	004	369	325	301
.043	−0.47959	368	302	300
.044	914	367	279	300
.045	869	366	256	299
.046	824	365	234	298
.047	780	364	211	298
.048	735	363	188	297
.049	690	362	165	296
+0.050	−0.47646	+0.0361	−0.32142	+0.0295
.051	602	360	120	295
.052	558	359	097	294
.053	514	358	074	293
.054	470	357	052	293
.055	426	356	029	292
.056	382	355	007	291
.057	338	354	−0.31984	291
.058	294	353	962	290
.059	251	352	940	289
+0.060	−0.47208	+0.0351	−0.31918	+0.0289

VII

$(+0.060 \leqq \eta \leqq +0.100)$

η	A	B	C	D
+ 0.060	− 0.47208	+ 0.0351	− 0.31918	+ 0.0289
.061	164	350	895	288
.062	121	349	873	287
.063	078	348	851	287
.064	035	347	829	286
.065	− 0.46992	346	807	285
.066	949	345	785	285
.067	907	344	763	284
.068	864	343	741	283
.069	822	342	719	283
+ 0.070	− 0.46779	+ 0.0342	− 0.31697	+ 0.0282
.071	437	341	675	281
.072	694	340	653	281
.073	652	339	631	280
.074	610	338	610	279
.075	568	337	588	279
.076	526	336	566	278
.077	485	335	544	277
.078	443	334	523	277
.079	401	333	501	276
+ 0.080	− 0.46360	+ 0.0333	− 0.31480	+ 0.0275
.081	318	332	458	275
.082	277	331	437	274
.083	236	330	416	274
.084	195	329	394	273
.085	154	328	373	273
.086	113	327	352	272
.087	072	327	330	272
.088	031	326	309	271
.089	− 0.45990	325	288	270
+ 0.090	− 0.45950	+ 0.0324	− 0.31267	+ 0.0270
.091	909	323	246	269
.092	869	322	225	269
.093	829	321	204	268
.094	788	321	183	268
.095	748	320	162	267
.096	708	319	141	267
.097	668	318	120	266
.098	628	317	099	265
.099	588	316	079	265
+ 0.100	− 0.45549	+ 0.0316	− 0.31058	+ 0.0264

VIII

Konvergenzbereich der Potenzreihen in Tagen. Nach F. R. Moulton

a) Ellipsen mit $a = 2.65$

e	$M_0 = 0°$	$M_0 = 60°$	$M_0 = 120°$	$M_0 = 180°$
0.0	∞	∞	∞	∞
0.1	$501^{d}.2$	$553^{d}.0$	$726^{d}.0$	$933^{d}.7$
0.2	329.3	421.1	620.0	854.0
0.3	230.7	349.6	573.7	821.0
0.4	163.1	302.2	550.1	805.1
0.5	113.0	285.9	537.3	796.0
0.6	74.9	273.1	530.5	791.5
0.7	45.5	266.5	527.3	789.3
0.8	23.4	263.7	525.8	788.4
0.9	7.7	262.7	525.3	788.0
0.95	2.8	262.6	525.2	788.0

b) $q = 1$; $M_0 = 0$ (Ausgangspunkt Perihel)

Ellipsen		Hyperbeln	
e	$R(t)$	e	$R(t)$
0.0	∞	1.0	$54^{d}.8$
0.1	$136^{d}.1$	1.05	53.8
0.2	106.7	1.1	52.3
0.3	91.3	1.2	50.1
0.4	81.3	1.3	48.5
0.5	74.1	2.0	39.9
0.6	68.6	5.0	25.7
0.7	64.1	10.0	18.3
0.8	60.5	100.0	5.8
0.9	57.4	1000.0	1.8
0.95	55.6		

IX

$$\frac{1}{m} = f(\zeta, \psi) \text{ zur Auflösung der Gleichung}$$

$$\frac{\zeta}{m} = 1 - (1 - 2\zeta\cos\psi + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad \text{(nach Oppolzer)}$$

ζ	$\psi = 10°$	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0.0	− 2.954	− 2.819	−2.598	−2.298	−1.928	−1.500	−1.026	−0.521	0.000
0.1	− 3.641	− 3.417	−3.064	−2.609	−2.084	−1.520	−0.945	−0.383	+0.148
0.2	− 4.628	− 4.238	−3.656	−2.958	−2.218	−1.495	−0.825	−0.229	+0.286
0.3	− 6.120	− 5.400	−4.405	−3.327	−2.306	−1.414	−0.672	−0.072	+0.404
0.4	− 8.512	− 7.084	−5.329	−3.677	−2.318	−1.273	−0.496	+0.077	+0.499
0.5	− 12.645	− 9.570	−6.406	−3.940	−2.227	−1.079	−0.312	+0.209	+0.569
0.6	− 20.48	−13.21	−7.507	−4.029	−2.024	−0.849	−0.134	+0.318	+0.616
0.7	− 37.06	−18.18	−8.340	−3.866	−1.723	−0.606	+0.025	+0.403	+0.643
0.8	− 75.41	−23.54	−8.494	−3.437	−1.364	−0.374	+0.156	+0.464	+0.655
0.9	−152.84	−26.11	−7.717	−2.814	−0.995	−0.169	+0.260	+0.505	+0.655
1.0	−187.80	−22.87	−6.210	−2.124	−0.656	0.000	+0.338	+0.529	+0.646
1.1	− 99.56	−15.96	−4.495	−1.483	−0.371	+0.132	+0.392	+0.541	+0.632
1.2	− 38.58	− 9.662	−3.000	−0.953	−0.147	+0.230	+0.429	+0.544	+0.615
1.3	− 15.74	− 5.505	−1.881	−0.549	+0.021	+0.300	+0.451	+0.540	+0.595
1.4	− 7.122	− 3.073	−1.110	−0.256	+0.143	+0.348	+0.462	+0.531	+0.574
1.5	− 3.482	− 1.690	−0.600	−0.051	+0.228	+0.379	+0.466	+0.519	+0.553
1.6	− 1.768	− 0.895	−0.267	+0.090	+0.286	+0.397	+0.463	+0.505	+0.532
1.7	− 0.887	− 0.427	−0.052	+0.185	+0.324	+0.407	+0.458	+0.490	+0.512
1.8	− 0.404	− 0.145	+0.088	+0.248	+0.348	+0.410	+0.449	+0.475	+0.492
1.9	− 0.125	+ 0.029	+0.179	+0.289	+0.361	+0.408	+0.439	+0.459	+0.473
2.0	+ 0.042	+ 0.138	+0.237	+0.314	+0.368	+0.404	+0.428	+0.444	+0.455
2.1	+ 0.145	+ 0.207	+0.274	+0.329	+0.369	+0.397	+0.416	+0.429	+0.438
2.2	+ 0.209	+ 0.250	+0.297	+0.337	+0.368	+0.389	+0.404	+0.415	+0.422
2.3	+ 0.249	+ 0.277	+0.311	+0.340	+0.363	+0.380	+0.392	+0.401	+0.407
2.4	+ 0.273	+ 0.293	+0.317	+0.340	+0.358	+0.371	+0.381	+0.388	+0.393
2.5	+ 0.287	+ 0.302	+0.320	+0.337	+0.351	+0.361	+0.369	+0.375	+0.379
2.6	+ 0.295	+ 0.306	+0.319	+0.332	+0.343	+0.352	+0.358	+0.363	+0.367
2.7	+ 0.298	+ 0.306	+0.316	+0.327	+0.335	+0.342	+0.348	+0.352	+0.355
2.8	+ 0.298	+ 0.304	+0.312	+0.320	+0.327	+0.333	+0.337	+0.341	+0.343
2.9	+ 0.296	+ 0.301	+0.307	+0.314	+0.319	+0.324	+0.328	+0.331	+0.333
3.0	+ 0.293	+ 0.297	+0.302	+0.307	+0.311	+0.315	+0.318	+0.321	+0.323
3.1	+ 0.289	+ 0.292	+0.296	+0.300	+0.304	+0.307	+0.310	+0.312	+0.314
3.2	+ 0.284	+ 0.286	+0.289	+0.293	+0.296	+0.299	+0.301	+0.303	+0.304
3.3	+ 0.279	+ 0.281	+0.283	+0.286	+0.289	+0.291	+0.293	+0.294	+0.296
3.4	+ 0.273	+ 0.275	+0.277	+0.279	+0.282	+0.284	+0.285	+0.286	+0.287
3.5	+ 0.268	+ 0.269	+0.271	+0.273	+0.275	+0.276	+0.278	+0.279	+0.280
3.6	+ 0.262	+ 0.263	+0.265	+0.266	+0.268	+0.269	+0.271	+0.272	+0.272
3.7	+ 0.257	+ 0.258	+0.259	+0.260	+0.262	+0.263	+0.264	+0.265	+0.265
3.8	+ 0.251	+ 0.252	+0.253	+0.254	+0.255	+0.256	+0.257	+0.258	+0.259
3.9	+ 0.246	+ 0.247	+0.248	+0.249	+0.250	+0.250	+0.251	+0.252	+0.252
4.0	+ 0.240	+ 0.241	+0.242	+0.243	+0.244	+0.245	+0.245	+0.246	+0.247

IX

$$\frac{1}{m} = f(\zeta, \psi)$$

ζ	$\psi = 100°$	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
0.0	+0.521	+1.026	+1.500	+1.928	+2.298	+2.598	+2.819	+2.954	+3.000
0.1	0.635	1.070	1.449	1.769	2.029	2.229	2.373	2.458	2.487
0.2	0.721	1.083	1.379	1.615	1.800	1.937	2.032	2.088	2.106
0.3	0.779	1.072	1.299	1.474	1.605	1.701	1.766	1.804	1.816
0.4	0.811	1.044	1.217	1.346	1.441	1.509	1.554	1.580	1.589
0.5	0.823	1.004	1.136	1.232	1.301	1.350	1.383	1.401	1.407
0.6	0.818	0.959	1.059	1.131	1.182	1.218	1.242	1.255	1.260
0.7	0.802	0.911	0.988	1.042	1.080	1.107	1.125	1.135	1.138
0.8	0.779	0.864	0.922	0.963	0.992	1.012	1.026	1.033	1.036
0.9	0.752	0.817	0.862	0.894	0.916	0.931	0.941	0.947	0.949
1.0	+0.722	+0.773	+0.807	+0.832	+0.849	+0.861	+0.869	+0.874	+0.875
1.1	0.691	0.731	0.758	0.777	0.791	0.800	0.806	0.810	0.811
1.2	0.661	0.692	0.713	0.728	0.739	0.747	0.751	0.754	0.755
1.3	0.631	0.656	0.673	0.685	0.693	0.699	0.703	0.705	0.706
1.4	0.603	0.622	0.636	0.645	0.652	0.657	0.660	0.662	0.663
1.5	0.576	0.591	0.602	0.610	0.616	0.619	0.622	0.623	0.624
1.6	0.550	0.563	0.572	0.578	0.583	0.586	0.588	0.589	0.589
1.7	0.526	0.536	0.544	0.549	0.553	0.555	0.557	0.558	0.558
1.8	0.504	0.512	0.518	0.522	0.525	0.528	0.529	0.530	0.530
1.9	0.483	0.490	0.495	0.498	0.501	0.503	0.504	0.504	0.505
2.0	+0.463	+0.469	+0.473	+0.476	+0.478	+0.480	+0.481	+0.481	+0.481
2.1	0.445	0.450	0.453	0.456	0.457	0.459	0.459	0.460	0.460
2.2	0.428	0.432	0.435	0.437	0.438	0.439	0.440	0.440	0.441
2.3	0.412	0.415	0.417	0.419	0.421	0.422	0.422	0.423	0.423
2.4	0.397	0.400	0.402	0.403	0.404	0.405	0.406	0.406	0.406
2.5	0.383	0.385	0.387	0.388	0.389	0.390	0.390	0.391	0.391
2.6	0.369	0.372	0.373	0.374	0.375	0.376	0.376	0.376	0.376
2.7	0.357	0.359	0.360	0.361	0.362	0.362	0.363	0.363	0.363
2.8	0.345	0.347	0.348	0.349	0.350	0.350	0.350	0.351	0.351
2.9	0.335	0.336	0.337	0.338	0.338	0.338	0.339	0.339	0.339
3.0	+0.324	+0.325	+0.326	+0 327	+0.327	+0.328	+0.328	+0.328	+0.328
3.1	0.314	0.315	0.316	0.317	0.317	0.317	0.318	0.318	0.318
3.2	0.305	0.306	0.307	0.307	0.308	0.308	0.308	0.308	0.308
3.3	0.297	0.297	0.298	0.298	0.299	0.299	0.299	0.299	0.300
3.4	0.288	0.289	0.289	0.290	0.290	0.290	0.290	0.291	0.291
3.5	0.280	0.281	0.281	0.282	0.282	0.282	0.282	0.283	0.283
3.6	0.273	0.274	0.274	0.274	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275
3.7	0.266	0.266	0.267	0.267	0.267	0.267	0.268	0.268	0.268
3.8	0.259	0.260	0.260	0.260	0.261	0.261	0.261	0.261	0.261
3.9	0.253	0.253	0.254	0.254	0.254	0.254	0.254	0.254	0.254
4.0	+0.247	+0.247	+0.248	+0.248	+0.248	+0.248	+0.248	+0.248	+0.248

X

Hilfstafel zur genäherten Lösung der Hauptgleichung für die Apsiden als Ausgangsort: $z + bz^3 = 1$

z	b	z	b	z	b
0.50	+ 4.00	0.80	+ 0.391	1.10	− 0.0751
0.51	3.69	0.81	+ 0.357	1.11	− 0.0804
0.52	3.41	0.82	+ 0.326	1.12	− 0.0854
0.53	3.16	0.83	+ 0.297	1.13	− 0.0901
0.54	2.92	0.84	+ 0.270	1.14	− 0.0945
0.55	2.71	0.85	+ 0.244	1.15	− 0.0986
0.56	2.51	0.86	+ 0.220	1.16	− 0.1025
0.57	2.32	0.87	+ 0.197	1.17	− 0.1061
0.58	2.15	0.88	+ 0.176	1.18	− 0.1095
0.59	2.00	0.89	+ 0.156	1.19	− 0.1128
0.60	+ 1.85	0.90	+ 0.137	1.20	− 0.1158
0.61	1.72	0.91	+ 0.119	1.21	− 0.1186
0.62	1.59	0.92	+ 0.103	1.22	− 0.1211
0.63	1.48	0.93	+ 0.087	1.23	− 0.1236
0.64	1.37	0.94	+ 0.072	1.24	− 0.1259
0.65	1.27	0.95	+ 0.058	1.25	− 0.1280
0.66	1.18	0.96	+ 0.045	1.26	− 0.1299
0.67	1.10	0.97	+ 0.033	1.27	− 0.1318
0.68	1.02	0.98	+ 0.021	1.28	− 0.1335
0.69	0.944	0.99	+ 0.010	1.29	− 0.1351
0.70	+ 0.875	1.00	0.000	1.30	− 0.1366
0.71	0.810	1.01	− 0.010	1.31	− 0.1379
0.72	0.750	1.02	− 0.019	1.32	− 0.1391
0.73	0.694	1.03	− 0.027	1.33	− 0.1403
0.74	0.642	1.04	− 0.036	1.34	− 0.1413
0.75	0.593	1.05	− 0.043	1.35	− 0.1423
0.76	0.547	1.06	− 0.050	1.36	− 0.1431
0.77	0.504	1.07	− 0.057	1.37	− 0.1439
0.78	0.464	1.08	− 0.064	1.38	− 0.1446
0.79	0.426	1.09	− 0.070	1.39	− 0.1452
0.80	+ 0.391	1.10	− 0.075	1.40	− 0.1458

ANHANG B

Tafel der Funktionen

$$c_1(\lambda^2) = \frac{\sin\lambda}{\lambda} = 1 - \frac{\lambda^2}{3!} + \frac{\lambda^4}{5!} - \frac{\lambda^6}{7!} + \cdots,$$

$$c_2(\lambda^2) = \frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{2!} - \frac{\lambda^2}{4!} + \frac{\lambda^4}{6!} - \frac{\lambda^6}{8!} + \cdots,$$

$$c_3(\lambda^2) = \frac{\lambda-\sin\lambda}{\lambda^3} = \frac{1}{3!} - \frac{\lambda^2}{5!} + \frac{\lambda^4}{7!} - \frac{\lambda^6}{9!} + \cdots$$

auf sechs Dezimalstellen für jedes Tausendstel des Arguments im Bereich

$$-0.250 \leqq \lambda^2 \leqq +1.250.$$

Man berechnet außerdem leicht:

$$c_0(\lambda^2) = \cos\lambda = 1 - \lambda^2 c_2.$$

λ^2	c_1	c_2	c_3
− 0.250	1.042191	0.510504	0.168762
.249	020	461	754
.248	1.041849	419	746
.247	678	377	737
.246	507	334	729
.245	336	292	720
.244	166	250	712
.243	1.040995	207	703
.242	824	165	695
.241	653	123	687
− 0.240	1.040483	0.510080	0.168678
.239	312	038	670
.238	141	0.509996	661
.237	1.039971	953	653
.236	800	911	644
.235	629	869	636
.234	459	826	628
.233	288	784	619
.232	118	742	611
.231	1.038947	699	602
− 0.230	1.038777	0.509657	0.168594
.229	606	615	585
.228	436	572	577
.227	265	530	569
.226	095	488	560
.225	1.037924	446	552
.224	754	403	543
.223	583	361	535
.222	413	319	526
.221	242	276	518
− 0.220	1.037072	0.509234	0.168510
.219	1.036902	192	501
.218	731	150	493
.217	561	107	484
.216	391	065	476
.215	221	023	468
.214	050	0.508981	459
.213	1.035880	938	451
.212	710	896	442
.211	540	854	434
− 0.210	1.035369	0.508811	0.168425
.209	199	769	417
.208	029	727	409
.207	1.034859	685	400
.206	689	642	392
.205	519	600	383
.204	348	558	375
.203	178	516	367
.202	008	474	358
.201	1.033838	431	350
− 0.200	1.033668	0.508389	0.168341

171	
1	17.1
2	34.2
3	51.3
4	68.4
5	85.5
6	102.6
7	119.7
8	136.8
9	153.9

170	
1	17.0
2	34.0
3	51.0
4	68.0
5	85.0
6	102.0
7	119.0
8	136.0
9	153.0

43	
1	4.3
2	8.6
3	12.9
4	17.2
5	21.5
6	25.8
7	30.1
8	34.4
9	38.7

42	
1	4.2
2	8.4
3	12.6
4	16.8
5	21.0
6	25.2
7	29.4
8	33.6
9	37.8

λ^2	c_1	c_2	c_3
− 0.200	1.033668	0.508389	0.168341
.199	498	347	333
.198	328	305	324
.197	158	262	316
.196	1.032988	220	308
.195	818	178	299
.194	648	136	291
.193	479	094	282
.192	309	051	274
.191	139	009	266
− 0.190	1.031969	0.507967	0.168257
.189	799	925	249
.188	629	883	240
.187	459	840	232
.186	290	798	224
.185	120	756	215
.184	1.030950	714	207
.183	780	672	198
.182	611	629	190
.181	441	587	182
− 0.180	1.030271	0.507545	0.168173
.179	101	503	165
.178	1.029932	461	156
.177	762	419	148
.176	593	376	139
.175	423	334	131
.174	253	292	123
.173	084	250	114
.172	1.028914	208	106
.171	745	166	097
− 0.170	1.028575	0.507124	0.168089
.169	406	081	081
.168	236	039	072
.167	067	0.506997	064
.166	1.027897	955	055
.165	728	913	047
.164	558	871	039
.163	389	829	030
.162	220	787	022
.161	050	744	013
− 0.160	1.026881	0.506702	0.168005
.159	711	660	0.167997
.158	542	618	988
.157	373	576	980
.156	204	534	972
.155	034	492	963
.154	1.025865	450	955
.153	696	408	946
.152	527	366	938
.151	357	323	930
− 0.150	1.025188	0.506281	0.167921

170	
1	17.0
2	34.0
3	51.0
4	68.0
5	85.0
6	102.0
7	119.0
8	136.0
9	153.0

169	
1	16.9
2	33.8
3	50.7
4	67.6
5	84.5
6	101.4
7	118.3
8	135.2
9	152.1

43	
1	4.3
2	8.6
3	12.9
4	17.2
5	21.5
6	25.8
7	30.1
8	34.4
9	38.7

42	
1	4.2
2	8.4
3	12.6
4	16.8
5	21.0
6	25.2
7	29.4
8	33.6
9	37.8

λ^2	c_1	c_2	c_3
− 0.150	1.025188	0.506281	0.167921
.149	019	239	913
.148	1.024850	197	904
.147	681	155	896
.146	512	113	888
.145	342	071	879
.144	173	029	871
.143	004	0.505987	862
.142	1.023835	945	854
.141	666	903	846
− 0.140	1.023497	0.505861	0.167837
.139	328	819	829
.138	159	777	820
.137	1.022990	734	812
.136	821	692	804
.135	652	650	795
.134	483	608	787
.133	315	566	779
.132	146	524	770
.131	1.021977	482	762
− 0.130	1.021808	0.505440	0.167753
.129	639	398	745
.128	470	356	737
.127	301	314	728
.126	133	272	720
.125	1.020964	230	711
.124	795	188	703
.123	626	146	695
.122	458	104	686
.121	289	062	678
− 0.120	1.020120	0.505020	0.167670
.119	1.019952	0.504978	661
.118	783	936	653
.117	614	894	644
.116	446	852	636
.115	277	810	628
.114	109	768	619
.113	1.018940	726	611
.112	771	684	602
.111	603	642	594
− 0.110	1.018434	0.504600	0.167586
.109	266	558	577
.108	097	516	569
.107	1.017929	474	561
.106	761	432	552
.105	592	390	544
.104	424	348	535
.103	255	306	527
.102	087	264	519
.101	1.016919	223	510
− 0.100	1.016750	0.504181	0.167502

170	
1	17.0
2	34.0
3	51.0
4	68.0
5	85.0
6	102.0
7	119.0
8	136.0
9	153.0

169	
1	16.9
2	33.8
3	50.7
4	67.6
5	84.5
6	101.4
7	118.3
8	135.2
9	152.1

168	
1	16.8
2	33.6
3	50.4
4	67.2
5	84.0
6	100.8
7	117.6
8	134.4
9	151.2

43	
1	4.3
2	8.6
3	12.9
4	17.2
5	21.5
6	25.8
7	30.1
8	34.4
9	38.7

42	
1	4.2
2	8.4
3	12.6
4	16.8
5	21.0
6	25.2
7	29.4
8	33.6
9	37.8

41	
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

λ^2	c_1	c_2	c_3
− 0.100	1.016750	0.504181	0.167502
.099	582	139	494
.098	414	097	485
.097	245	055	477
.096	077	013	468
.095	1.015909	0.503971	460
.094	740	929	452
.093	572	887	443
.092	404	845	435
.091	236	803	427
− 0.090	1.015068	0.503761	0.167418
.089	1.014899	719	410
.088	731	677	402
.087	563	636	393
.086	395	594	385
.085	227	552	376
.084	059	510	368
.083	1.013891	468	360
.082	723	426	351
.081	555	384	343
− 0.080	1.013387	0.503342	0.167335
.079	219	300	326
.078	051	258	318
.077	1.012883	217	310
.076	715	175	301
.075	547	133	293
.074	379	091	284
.073	211	049	276
.072	043	007	268
.071	1.011875	0.502965	259
− 0.070	1.011708	0.502923	0.167251
.069	540	882	243
.068	372	840	234
.067	204	798	226
.066	036	756	218
.065	1.010869	714	209
.064	701	672	201
.063	533	631	192
.062	365	589	184
.061	198	547	176
− 0.060	1.010030	0.502505	0.167167
.059	1.009862	463	159
.058	695	421	151
.057	527	380	142
.056	360	338	134
.055	192	296	126
.054	024	254	117
.053	1.008857	212	109
.052	689	170	101
.051	522	129	092
− 0.050	1.008354	0.502087	0.167084

	169		168
1	16.9	1	16.8
2	33.8	2	33.6
3	50.7	3	50.4
4	67.6	4	67.2
5	84.5	5	84.0
6	101.4	6	100.8
7	118.3	7	117.6
8	135.2	8	134.4
9	152.1	9	151.2

	167
1	16.7
2	33.4
3	50.1
4	66.8
5	83.5
6	100.2
7	116.9
8	133.6
9	150.3

	42		41
1	4.2	1	4.1
2	8.4	2	8.2
3	12.6	3	12.3
4	16.8	4	16.4
5	21.0	5	20.5
6	25.2	6	24.6
7	29.4	7	28.7
8	33.6	8	32.8
9	37.8	9	36.9

λ^2	c_1	c_2	c_3
− 0.050	1.008354	0.502087	0.167084
.049	187	045	075
.048	019	003	067
.047	1.007852	0.501961	059
.046	684	920	050
.045	517	878	042
.044	349	836	034
.043	182	794	025
.042	015	752	017
.041	1.006847	711	009
− 0.040	1.006680	0.501669	0.167000
.039	513	627	0.166992
.038	345	585	984
.037	178	544	975
.036	011	502	967
.035	1.005844	460	959
.034	676	418	950
.033	509	377	942
.032	342	335	934
.031	175	293	925
− 0.030	1.005008	0.501251	0.166917
.029	1.004840	210	908
.028	673	168	900
.027	506	126	892
.026	339	084	883
.025	172	043	875
.024	005	001	867
.023	1.003838	0.500959	858
.022	671	917	850
.021	504	876	842
− 0.020	1.003337	0.500834	0.166833
.019	170	792	825
.018	003	750	817
.017	1.002836	709	808
.016	669	667	800
.015	502	625	792
.014	335	584	783
.013	168	542	775
.012	001	500	767
.011	1.001834	459	758
− 0.010	1.001667	0.500417	0.166750
.009	501	375	742
.008	334	333	733
.007	167	292	725
.006	000	250	717
.005	1.000834	208	708
.004	667	167	700
.003	500	125	692
.002	333	083	683
.001	167	042	675
0.000	1.000000	0.500000	6.166667

168	
1	16.8
2	33.6
3	50.4
4	67.2
5	84.0
6	100.8
7	117.6
8	134.4
9	151.2

167	
1	16.7
2	33.4
3	50.1
4	66.8
5	83.5
6	100.2
7	116.9
8	133.6
9	150.3

166	
1	16.6
2	33.2
3	49.8
4	66.4
5	83.0
6	99.6
7	116.2
8	132.8
9	149.4

42	
1	4.2
2	8.4
3	12.6
4	16.8
5	21.0
6	25.2
7	29.4
8	33.6
9	37.8

41	
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

λ^2	c_1	c_2	c_3
0.000	1.000000	0.500000	0.166667
.001	0.999833	0.499958	658
.002	667	917	650
.003	500	875	642
.004	333	833	633
.005	167	792	625
.006	000	750	617
.007	0.998834	708	608
.008	667	667	600
.009	501	625	592
+ 0.010	0.998334	0.499583	0.166583
.011	168	542	575
.012	001	500	567
.013	0.997835	459	558
.014	668	417	550
.015	502	375	542
.016	335	334	533
.017	169	292	525
.018	003	250	517
.019	0.996836	209	508
+ 0.020	0.996670	0.499167	0.166500
.021	504	126	492
.022	337	084	483
.023	171	042	475
.024	005	001	467
.025	0.995839	0.498959	458
.026	672	918	450
.027	506	876	442
.028	340	834	433
.029	174	793	425
+ 0.030	0.995007	0.498751	0.166417
.031	0.994841	710	409
.032	675	668	400
.033	509	627	392
.034	343	585	384
.035	177	543	375
.036	011	502	367
.037	0.993845	460	359
.038	679	419	350
.039	513	377	342
+ 0.040	0.993347	0.498336	0.166334
.041	181	294	325
.042	015	252	317
.043	0.992849	211	309
.044	683	169	300
.045	517	128	292
.046	351	086	284
.047	185	045	275
.048	019	003	267
.049	0.991853	0.497962	259
+ 0.050	0.991687	0.497920	0.166250

	167
1	16.7
2	33.4
3	50.1
4	66.8
5	83.5
6	100.2
7	116.9
8	133.6
9	150.3

	166
1	16.6
2	33.2
3	49.8
4	66.4
5	83.0
6	99.6
7	116.2
8	132.8
9	149.4

	42
1	4.2
2	8.4
3	12.6
4	16.8
5	21.0
6	25.2
7	29.4
8	33.6
9	37.8

	41
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0.050	0.991687	0.497920	0.166250
.051	522	879	242
.052	356	837	234
.053	190	796	226
.054	024	754	217
.055	0.990859	713	209
.056	693	671	201
.057	527	630	192
.058	361	588	184
.059	196	546	176
+0.060	0.990030	0.497505	0.166167
.061	0.989864	463	159
.062	699	422	151
.063	533	381	142
.064	367	339	134
.065	202	298	126
.066	036	256	118
.067	0.988871	215	109
.068	705	173	101
.069	540	132	093
+0.070	0.988374	0.497090	0.166084
.071	209	049	076
.072	043	007	068
.073	0.987878	0.496966	059
.074	712	924	051
.075	547	883	043
.076	381	841	034
.077	216	800	026
.078	051	758	018
.079	0.986885	717	010
+0.080	0.986720	0.496676	0.166001
.081	555	634	0.165993
.082	389	593	985
.083	224	551	976
.084	059	510	968
.085	0.985893	468	960
.086	728	427	951
.087	563	385	943
.088	398	344	935
.089	233	303	927
+0.090	0.985067	0.496261	0.165918
.091	0.984902	220	910
.092	737	178	902
.093	572	137	893
.094	407	096	885
.095	242	054	877
.096	077	013	868
.097	0.983912	0.495971	860
.098	747	930	852
.099	581	889	844
+0.100	0.983416	0.495847	0.165835

166	
1	16.6
2	33.2
3	49.8
4	66.4
5	83.0
6	99.6
7	116.2
8	132.8
9	149.4

165	
1	16.5
2	33.0
3	49.5
4	66.0
5	82.5
6	99.0
7	115.5
8	132.0
9	148.5

42	
1	4.2
2	8.4
3	12.6
4	16.8
5	21.0
6	25.2
7	29.4
8	33.6
9	37.8

41	
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0.100	0.983416	0.495847	0.165835
.101	251	806	827
.102	086	764	819
.103	0.982922	723	810
.104	757	682	802
.105	592	640	794
.106	427	599	786
.107	262	558	777
.108	097	516	769
.109	0.981932	475	761
+0.110	0.981767	0.495433	0.165752
.111	602	392	744
.112	438	351	736
.113	273	309	728
.114	108	268	719
.115	0.980943	227	711
.116	778	185	703
.117	614	144	694
.118	449	103	686
.119	284	061	678
+0.120	0.980120	0.495020	0.165670
.121	0.979955	0.494979	661
.122	790	937	653
.123	626	896	645
.124	461	855	636
.125	296	813	628
.126	132	772	620
.127	0.978967	731	612
.128	803	689	603
.129	638	648	595
+0.130	0.978474	0.494607	0.165587
.131	309	565	578
.132	145	524	570
.133	0.977980	483	562
.134	816	442	554
.135	651	400	545
.136	487	359	537
.137	323	318	529
.138	158	276	520
.139	0.976994	235	512
+0.140	0.976829	0.494194	0.165504
.141	665	153	496
.142	501	111	487
.143	336	070	479
.144	172	029	471
.145	008	0.493987	462
.146	0.975844	946	454
.147	679	905	446
.148	515	864	438
.149	351	822	429
+0.150	0.975187	0.493781	0.165421

	165
1	16.5
2	33.0
3	49.5
4	66.0
5	82.5
6	99.0
7	115.5
8	132.0
9	148.5

	164
1	16.4
2	32.8
3	49.2
4	65.6
5	82.0
6	98.4
7	114.8
8	131.2
9	147.6

	42
1	4.2
2	8.4
3	12.6
4	16.8
5	21.0
6	25.2
7	29.4
8	33.6
9	37.8

	41
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0.150	0.975187	0.493781	0.165421
.151	023	740	413
.152	0.974859	699	405
.153	694	657	396
.154	530	616	388
.155	366	575	380
.156	202	534	371
.157	038	492	363
.158	0.973874	451	355
.159	710	410	347
+0.160	0.973546	0.493369	0.165338
.161	382	328	330
.162	218	286	322
.163	054	245	314
.164	0.972890	204	305
.165	726	163	297
.166	562	121	289
.167	398	080	281
.168	234	039	272
.169	070	0.492998	264
+0.170	0.971907	0.492957	0.165256
.171	743	915	247
.172	579	874	239
.173	415	833	231
.174	251	792	223
.175	087	751	214
.176	0.970924	710	206
.177	760	668	198
.178	596	627	190
.179	433	586	181
+0.180	0.970269	0.492545	0.165173
.181	105	504	165
.182	0.969942	463	157
.183	778	421	148
.184	614	380	140
.185	451	339	132
.186	287	298	124
.187	123	257	115
.188	0.968960	216	107
.189	796	174	099
+0.190	0.968633	0.492133	0.165090
.191	469	092	082
.192	306	051	074
.193	142	010	066
.194	0.967979	0.491969	057
.195	815	928	049
.196	652	887	041
.197	489	845	033
.198	325	804	024
.199	162	763	016
+0.200	0.966998	0.491722	0.165008

	165
1	16.5
2	33.0
3	49.5
4	66.0
5	82.5
6	99.0
7	115.5
8	132.0
9	148.5

	164
1	16.4
2	32.8
3	49.2
4	65.6
5	82.0
6	98.4
7	114.8
8	131.2
9	147.6

	163
1	16.3
2	32.6
3	48.9
4	65.2
5	81.5
6	97.8
7	114.1
8	130.4
9	146.7

	42
1	4.2
2	8.4
3	12.6
4	16.8
5	21.0
6	25.2
7	29.4
8	33.6
9	37.8

	41
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0.200	0.966998	0.491722	0.165008
.201	835	681	000
.202	672	640	0.164991
.203	508	599	983
.204	345	558	975
.205	182	516	967
.206	019	475	958
.207	0.965855	434	950
.208	692	393	942
.209	529	352	934
+0.210	0.965366	0.491311	0.164925
.211	202	270	917
.212	039	229	909
.213	0.964876	188	901
.214	713	147	892
.215	550	106	884
.216	387	065	876
.217	224	023	868
.218	061	0.490982	859
.219	0.963898	941	851
+0.220	735	0.490900	0.164843
.221	572	859	835
.222	409	818	826
.223	246	777	818
.224	083	736	810
.225	0.962920	695	802
.226	757	654	793
.227	594	613	785
.228	431	572	777
.229	268	531	769
+0.230	0.962105	0.490490	0.164760
.231	0.961942	449	752
.232	779	408	744
.233	617	367	736
.234	454	326	727
.235	291	285	719
.236	128	244	711
.237	0.960965	203	703
.238	803	162	695
.239	640	121	686
+0.240	0.960477	0.490080	0.164678
.241	315	039	670
.242	152	0.489998	662
.243	0.959989	957	653
.244	827	916	645
.245	664	875	637
.246	501	834	629
.247	339	793	620
.248	176	752	612
.249	014	711	604
+0.250	0.958851	0.489670	0.164596

164	
1	16.4
2	32.8
3	49.2
4	65.6
5	82.0
6	98.4
7	114.8
8	131.2
9	147.6

163	
1	16.3
2	32.6
3	48.9
4	65.2
5	81.5
6	97.8
7	114.1
8	130.4
9	146.7

162	
1	16.2
2	32.4
3	48.6
4	64.8
5	81.0
6	97.2
7	113.4
8	129.6
9	145.8

42	
1	4.2
2	8.4
3	12.6
4	16.8
5	21.0
6	25.2
7	29.4
8	33.6
9	37.8

41	
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0.250	0.958851	0.489670	0.164596
.251	689	629	587
.252	526	588	579
.253	364	547	571
.254	201	506	563
.255	039	465	555
.256	0.957876	424	546
.257	714	383	538
.258	551	342	530
.259	389	301	522
+0.260	0.957227	0.489260	0.164513
.261	064	219	505
.262	0.956902	178	497
.263	739	137	489
.264	577	096	480
.265	415	055	472
.266	253	014	464
.267	090	0.488974	456
.268	0.955928	933	448
.269	766	892	439
+0.270	0.955604	0.488851	0.164431
.271	441	810	423
.272	279	769	415
.273	117	728	406
.274	0.954955	687	398
.275	793	646	390
.276	631	605	382
.277	469	564	373
.278	306	523	365
.279	144	483	357
+0.280	0.953982	0.488442	0.164349
.281	820	401	341
.282	658	360	332
.283	496	319	324
.284	334	278	316
.285	172	237	308
.286	010	196	299
.287	0.952848	155	291
.288	686	115	283
.289	525	074	275
+0.290	0.952363	0.488033	0.164267
.291	201	0.487992	258
.292	039	951	250
.293	0.951877	910	242
.294	715	869	234
.295	553	829	226
.296	392	788	217
.297	230	747	209
.298	068	706	201
.299	0.950906	665	193
+0.300	0.950745	0.487624	0.164184

	163
1	16.3
2	32.6
3	48.9
4	65.2
5	81.5
6	97.8
7	114.1
8	130.4
9	146.7

	162
1	16.2
2	32.4
3	48.6
4	64.8
5	81.0
6	97.2
7	113.4
8	129.6
9	145.8

	161
1	16.1
2	32.2
3	48.3
4	64.4
5	80.5
6	96.6
7	112.7
8	128.8
9	144.9

	41
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

	40
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

λ^2	c_1	c_2	c_3
+ 0.300	0.950745	0.487624	0.164184
·301	583	583	176
·302	421	543	168
·303	260	502	160
·304	098	461	152
·305	0.949936	420	143
·306	775	379	135
·307	613	339	127
·308	451	298	119
·309	290	257	111
+ 0.310	0.949128	0.487216	0.164102
·311	0.948967	175	094
·312	805	134	086
·313	644	094	078
·314	482	053	069
·315	321	012	061
·316	159	0.486971	053
·317	0.947998	930	045
·318	836	890	037
·319	675	849	028
+ 0.320	0.947514	0.486808	0.164020
·321	352	767	012
·322	191	727	004
·323	029	686	0.163996
·324	0.946868	645	987
·325	707	604	979
·326	545	563	971
·327	384	523	963
·328	223	482	955
·329	062	441	946
+ 0.330	0.945900	0.486400	0.163938
·331	739	360	930
·332	578	319	922
·333	417	278	914
·334	256	237	905
·335	094	197	897
·336	0.944933	156	889
·337	772	115	881
·338	611	074	873
·339	450	034	864
+ 0.340	0.944289	0.485993	0.163856
·341	128	952	848
·342	0.943967	911	840
·343	806	871	832
·344	645	830	823
·345	484	789	815
·346	323	749	807
·347	162	708	799
·348	001	667	791
·349	0.942840	626	782
+ 0.350	0.942679	0.485586	0.163774

	162
1	16.2
2	32.4
3	48.6
4	64.8
5	81.0
6	97.2
7	113.4
8	129.6
9	145.8

	161
1	16.1
2	32.2
3	48.3
4	64.4
5	80.5
6	96.6
7	112.7
8	128.8
9	144.9

	41
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

	40
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0.350	0.942679	0.485586	0.163774
·351	518	545	766
·352	357	504	758
·353	196	464	750
·354	036	423	741
·355	0.941875	382	733
·356	714	342	725
·357	553	301	717
·358	392	260	709
·359	232	220	700
+0.360	0.941071	0.485179	0.163692
·361	0.940910	138	684
·362	749	097	676
·363	589	057	668
·364	428	016	659
·365	267	0.484975	651
·366	107	935	643
·367	0.939946	894	635
·368	785	854	627
·369	625	813	619
+0.370	0.939464	0.484772	0.163610
·371	304	732	602
·372	143	691	594
·373	0.938982	650	586
·374	822	610	578
·375	661	569	569
·376	501	528	561
·377	340	488	553
·378	180	447	545
·379	020	406	537
+0.380	0.937859	0.484366	0.163529
·381	699	325	520
·382	538	285	512
·383	378	244	504
·384	218	203	496
·385	057	163	488
·386	0.936897	122	479
·387	737	082	471
·388	576	041	463
·389	416	000	455
+0.390	0.936256	0.483960	0.163447
·391	096	919	439
·392	0.935935	879	430
·393	775	838	422
·394	615	797	414
·395	455	757	406
·396	295	716	398
·397	134	676	389
·398	0.934974	635	381
·399	814	595	373
+0.400	0.934654	0.483554	0.163365

	161
1	16.1
2	32.2
3	48.3
4	64.4
5	80.5
6	96.6
7	112.7
8	128.8
9	144.9

	160
1	16.0
2	32.0
3	48.0
4	64.0
5	80.0
6	96.0
7	112.0
8	128.0
9	144.0

	41
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

	40
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0.400	0.934654	0.483554	0.163365
.401	494	513	357
.402	334	473	349
.403	174	432	340
.404	014	392	332
.405	0.933854	351	324
.406	694	311	316
.407	534	270	308
.408	374	230	300
.409	214	189	291
+0.410	0.933054	0.483148	0.163283
.411	0.932894	108	275
.412	734	067	267
.413	574	027	259
.414	414	0.482986	250
.415	254	946	242
.416	095	905	234
.417	0.931935	865	226
.418	775	824	218
.419	615	784	210
+0.420	0.931455	0.482743	0.163201
.421	296	703	193
.422	136	662	185
.423	0.930976	622	177
.424	816	581	169
.425	657	541	161
.426	497	500	152
.427	337	460	144
.428	178	419	136
.429	018	379	128
+0.430	0.929858	0.482338	0.163120
.431	699	298	112
.432	539	257	103
.433	380	217	095
.434	220	176	087
.435	061	136	079
.436	0.928901	095	071
.437	742	055	063
.438	582	014	054
.439	423	0.481974	046
+0.440	0.928263	0.481933	0.163038
.441	104	893	030
.442	0.927944	853	022
.443	785	812	014
.444	626	772	006
.445	466	731	0.162997
.446	307	691	989
.447	147	650	981
.448	0.926988	610	973
.449	829	569	965
+0.450	0.926670	0.481529	0.162957

	160
1	16.0
2	32.0
3	48.0
4	64.0
5	80.0
6	96.0
7	112.0
8	128.0
9	144.0

	159
1	15.9
2	31.8
3	47.7
4	63.6
5	79.5
6	95.4
7	111.3
8	127.2
9	143.1

	41
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

	40
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

λ^2	c_1	c_2	c_3
+ 0.450	0.926670	0.481529	0.162957
·451	510	489	948
·452	351	448	940
·453	192	408	932
·454	033	367	924
·455	0.925873	327	916
·456	714	286	908
·457	555	246	900
·458	396	206	891
·459	237	165	883
+ 0.460	0.925077	0.481125	0.162875
·461	0.924918	084	867
·462	759	044	859
·463	600	004	851
·464	441	0.480963	842
·465	282	923	834
·466	123	882	826
·467	0.923964	842	818
·468	805	802	810
·469	646	761	802
+ 0.470	0.923487	0.480721	0.162794
·471	328	681	785
·472	169	640	777
·473	010	600	769
·474	0.922851	559	761
·475	692	519	753
·476	534	479	745
·477	375	438	737
·478	216	398	728
·479	057	358	720
+ 0.480	0.921898	0.480317	0.162712
·481	739	277	704
·482	581	237	696
·483	422	196	688
·484	263	156	679
·485	104	116	671
·486	0.920946	075	663
·487	787	035	655
·488	628	0.479995	647
·489	470	954	639
+ 0.490	0.920311	0.479914	0.162631
·491	152	874	623
·492	0.919994	833	614
·493	835	793	606
·494	677	753	598
·495	518	712	590
·496	359	672	582
·497	201	632	574
·498	042	591	566
·499	0.918884	551	557
+ 0.500	0.918725	0.479511	0.162549

160	
1	16.0
2	32.0
3	48.0
4	64.0
5	80.0
6	96.0
7	112.0
8	128.0
9	144.0

159	
1	15.9
2	31.8
3	47.7
4	63.6
5	79.5
6	95.4
7	111.3
8	127.2
9	143.1

158	
1	15.8
2	31.6
3	47.4
4	63.2
5	79.0
6	94.8
7	110.6
8	126.4
9	142.2

41	
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

40	
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0.500	0.918725	0.479511	0.162549
.501	567	471	541
.502	408	430	533
.503	250	390	525
.504	092	350	517
.505	0.917933	309	509
.506	775	269	500
.507	616	229	492
.508	458	189	484
.509	300	148	476
+0.510	0.917141	0.479108	0.162468
.511	0.916983	068	460
.512	825	027	452
.513	666	0.478987	444
.514	508	947	435
.515	350	907	427
.516	192	866	419
.517	034	826	411
.518	0.915875	786	403
.519	717	746	395
+0.520	0.915559	0.478705	0.162387
.521	401	665	378
.522	243	625	370
.523	085	585	362
.524	0.914926	544	354
.525	768	504	346
.526	610	464	338
.527	452	424	330
.528	294	384	322
.529	136	343	313
+0.530	0.913978	0.478303	0.162305
.531	820	263	297
.532	662	223	289
.533	504	183	281
.534	346	142	273
.535	188	102	265
.536	030	062	257
.537	0.912873	022	248
.538	715	0.477982	240
.539	557	941	232
+0.540	0.912399	0.477901	0.162224
.541	241	861	216
.542	083	821	208
.543	0.911926	781	200
.544	768	740	192
.545	610	700	183
.546	452	660	175
.547	295	620	167
.548	137	580	159
.549	0.910979	540	151
+0.550	0.910821	0.477499	0.162143

159	
1	15.9
2	31.8
3	47.7
4	63.6
5	79.5
6	95.4
7	111.3
8	127.2
9	143.1

158	
1	15.8
2	31.6
3	47.4
4	63.2
5	79.0
6	94.8
7	110.6
8	126.4
9	142.2

157	
1	15.7
2	31.4
3	47.1
4	62.8
5	78.5
6	94.2
7	109.9
8	125.6
9	141.3

41	
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

40	
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0.550	0.910821	0.477499	0.162143
.551	664	459	135
.552	506	419	127
.553	348	379	119
.554	191	339	110
.555	033	299	102
.556	0.909876	258	094
.557	718	218	086
.558	560	178	078
.559	403	138	070
+0.560	0.909245	0.477098	0.162062
.561	088	058	054
.562	0.908930	018	046
.563	773	0.476978	037
.564	615	937	029
.565	458	897	021
.566	301	857	013
.567	143	817	005
.568	0.907986	777	0.161997
.569	828	737	989
+0.570	0.907671	0.476697	0.161981
.571	514	657	973
.572	356	616	964
.573	199	576	956
.574	042	536	948
.575	0.906884	496	940
.576	727	456	932
.577	570	416	924
.578	413	376	916
.579	255	336	908
+0.580	0.906098	0.476296	0.161900
.581	0.905941	256	891
.582	784	216	883
.583	627	176	875
.584	470	135	867
.585	312	095	859
.586	155	055	851
.587	0.904998	015	843
.588	841	0.475975	835
.589	684	935	827
+0.590	0.904527	0.475895	0.161819
.591	370	855	810
.592	213	815	802
.593	056	775	794
.594	0.903899	735	786
.595	742	695	778
.596	585	655	770
.597	428	615	762
.598	271	575	754
.599	114	535	746
+0.600	0.902957	0.475495	0.161738

	158
1	15.8
2	31.6
3	47.4
4	63.2
5	79.0
6	94.8
7	110.6
8	126.4
9	142.2

	157
1	15.7
2	31.4
3	47.1
4	62.8
5	78.5
6	94.2
7	109.9
8	125.6
9	141.3

	41
1	4.1
2	8.2
3	12.3
4	16.4
5	20.5
6	24.6
7	28.7
8	32.8
9	36.9

	40
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0.600	0.902957	0.475495	0.161738
.601	801	455	729
.602	644	415	721
.603	487	375	713
.604	330	335	705
.605	173	295	697
.606	017	255	689
.607	0.901860	215	681
.608	703	175	673
.609	546	135	665
+0.610	0.901390	0.475095	0.161657
.611	233	055	648
.612	076	015	640
.613	0.900919	0.474975	632
.614	763	935	624
.615	606	895	616
.616	449	855	608
.617	293	815	600
.618	136	775	592
.619	0.899980	735	584
+0.620	0.899823	0.474695	0.161576
.621	667	655	568
.622	510	615	559
.623	354	575	551
.624	197	535	543
.625	041	495	535
.626	0.898884	455	527
.627	728	415	519
.628	571	375	511
.629	415	335	503
+0.630	0.898258	0.474295	0.161495
.631	102	255	487
.632	0.897946	215	479
.633	789	175	470
.634	633	135	462
.635	477	095	454
.636	320	055	446
.637	164	016	438
.638	008	0.473976	430
.639	0.896851	936	422
+0.640	0.896695	0.473896	0.161414
.641	539	856	406
.642	383	816	398
.643	226	776	390
.644	070	736	382
.645	0.895914	696	373
.646	758	656	365
.647	602	616	357
.648	446	576	349
.649	290	537	341
+0.650	0.895133	0.473497	0.161333

	157
1	15.7
2	31.4
3	47.1
4	62.8
5	78.5
6	94.2
7	109.9
8	125.6
9	141.3

	156
1	15.6
2	31.2
3	46.8
4	62.4
5	78.0
6	93.6
7	109.2
8	124.8
9	140.4

	40
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

	39
1	3.9
2	7.8
3	11.7
4	15.6
5	19.5
6	23.4
7	27.3
8	31.2
9	35.1

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0.650	0.895133	0.473497	0.161333
.651	0.894977	457	325
.652	821	417	317
.653	665	377	309
.654	509	337	301
.655	353	297	293
.656	197	257	285
.657	041	218	277
.658	0.893885	178	268
.659	729	138	260
+0.660	0.893573	0.473098	0.161252
.661	418	058	244
.662	262	018	236
.663	106	0.472978	228
.664	0.892950	938	220
.665	794	899	212
.666	638	859	204
.667	482	819	196
.668	327	779	188
.669	171	739	180
+0.670	0.892015	0.472699	0.161172
.671	0.891859	660	164
.672	704	620	155
.673	548	580	147
.674	392	540	139
.675	236	500	131
.676	081	460	123
.677	0.890925	421	115
.678	769	381	107
.679	614	341	099
+0.680	0.890458	0.472301	0.161091
.681	303	261	083
.682	147	222	075
.683	0.889991	182	067
.684	836	142	059
.685	680	102	051
.686	525	062	042
.687	369	023	034
.688	214	0.471983	026
.689	058	943	018
+0.690	0.888903	0.471903	0.161010
.691	748	863	002
.692	592	824	0.160994
.693	437	784	986
.694	281	744	978
.695	126	704	970
.696	0.887971	665	962
.697	815	625	954
.698	660	585	946
.699	505	545	938
+0.700	0.887349	0.471505	0.160930

156	
1	15.6
2	31.2
3	46.8
4	62.4
5	78.0
6	93.6
7	109.2
8	124.8
9	140.4

155	
1	15.5
2	31.0
3	46.5
4	62.0
5	77.5
6	93.0
7	108.5
8	124.0
9	139.5

40	
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

39	
1	3.9
2	7.8
3	11.7
4	15.6
5	19.5
6	23.4
7	27.3
8	31.2
9	35.1

λ^2	c_1	c_2	c_3
+ 0.700	0.887349	0.471505	0.160930
.701	194	466	922
.702	039	426	913
.703	0.886883	386	905
.704	728	346	897
.705	573	307	889
.706	418	267	881
.707	263	227	873
.708	107	187	865
.709	0.885952	148	857
+ 0.710	0.885797	0.471108	0.160849
.711	642	068	841
.712	487	029	833
.713	332	0.470989	825
.714	177	949	817
.715	022	909	809
.716	0.884867	870	801
.717	712	830	793
.718	557	790	785
.719	402	751	777
+ 0.720	0.884247	0.470711	0.160769
.721	092	671	760
.722	0.883937	631	752
.723	782	592	744
.724	627	552	736
.725	472	512	728
.726	317	473	720
.727	162	433	712
.728	007	393	704
.729	0.882853	354	696
+ 0.730	0.882698	0.470314	0.160688
.731	543	274	680
.732	388	235	672
.733	233	195	664
.734	079	155	656
.735	0.881924	116	648
.736	769	076	640
.737	614	036	632
.738	460	0.469997	624
.739	305	957	616
+ 0.740	0.881150	0.469917	0.160608
.741	0.880996	878	599
.742	841	838	591
.743	687	798	583
.744	532	759	575
.745	377	719	567
.746	223	679	559
.747	068	640	551
.748	0.879914	600	543
.749	759	560	535
+ 0.750	0.879605	0.469521	0.160527

156	
1	15.6
2	31.2
3	46.8
4	62.4
5	78.0
6	93.6
7	109.2
8	124.8
9	140.4

155	
1	15.5
2	31.0
3	46.5
4	62.0
5	77.5
6	93.0
7	108.5
8	124.0
9	139.5

154	
1	15.4
2	30.8
3	46.2
4	61.6
5	77.0
6	92.4
7	107.8
8	123.2
9	138.6

40	
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

39	
1	3.9
2	7.8
3	11.7
4	15.6
5	19.5
6	23.4
7	27.3
8	31.2
9	35.1

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0 750	0.879605	0.469521	0.160527
·751	450	481	519
·752	296	442	511
·753	141	402	503
·754	0.878987	362	495
·755	832	323	487
·756	678	283	479
·757	524	244	471
·758	369	204	463
·759	215	164	455
+0.760	0.878060	0.469125	0.160447
·761	0.877906	085	439
·762	752	046	431
·763	598	006	423
·764	443	0.468966	415
·765	289	927	407
·766	135	887	399
·767	0.876980	848	390
·768	826	808	382
·769	672	768	374
+0.770	0.876518	0.468729	0.160366
·771	364	689	358
·772	210	650	350
·773	055	610	342
·774	0.875901	571	334
·775	747	531	326
·776	593	492	318
·777	439	452	310
·778	285	412	302
·779	131	373	294
+0.780	0.874977	0.468333	0.160286
·781	823	294	278
·782	669	254	270
·783	515	215	262
·784	361	175	254
·785	207	136	246
·786	053	096	238
·787	0.873899	057	230
·788	745	017	222
·789	591	0.467978	214
+0.790	0.873437	0.467938	0.160206
·791	284	899	198
·792	130	859	190
·793	0.872976	819	182
·794	822	780	174
·795	668	740	166
·796	514	701	158
·797	361	661	150
·798	207	622	142
·799	053	582	134
+0.800	0.871900	0.467543	0.160126

155	
1	15.5
2	31.0
3	46.5
4	62.0
5	77.5
6	93.0
7	108.5
8	124.0
9	139.5

154	
1	15.4
2	30.8
3	46.2
4	61.6
5	77.0
6	92.4
7	107.8
8	123.2
9	138.6

153	
1	15.3
2	30.6
3	45.9
4	61.2
5	76.5
6	91.8
7	107.1
8	122.4
9	137.7

40	
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

39	
1	3.9
2	7.8
3	11.7
4	15.6
5	19.5
6	23.4
7	27.3
8	31.2
9	35.1

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0.800	0.871900	0.467543	0.160126
.801	746	503	118
.802	592	464	110
.803	438	425	102
.804	285	385	094
.805	131	346	085
.806	0.870978	306	077
.807	824	267	069
.808	670	227	061
.809	517	188	053
+0.810	0.870363	0.467148	0.160045
.811	210	109	037
.812	056	069	029
.813	0.869903	030	021
.814	749	0.466990	013
.815	596	951	005
.816	442	911	0.159997
.817	289	872	989
.818	135	833	981
.819	0.868982	793	973
+0.820	0.868829	0.466754	0.159965
.821	675	714	957
.822	522	675	949
.823	368	635	941
.824	215	596	933
.825	062	557	925
.826	0.867908	517	917
.827	755	478	909
.828	602	438	901
.829	449	399	893
+0.830	0.867295	0.466359	0.159885
.831	142	320	877
.832	0.866989	281	869
.833	836	241	861
.834	683	202	853
.835	529	162	845
.836	376	123	837
.837	223	084	829
.838	070	044	821
.839	0.865917	005	813
+0.840	0.865764	0.465965	0.159805
.841	611	926	797
.842	458	887	789
.843	305	847	781
.844	152	808	773
.845	0.864999	769	765
.846	846	729	757
.847	693	690	749
.848	540	650	741
.849	387	611	733
+0.850	0.864234	0.465572	0.159725

154	
1	15.4
2	30.8
3	46.2
4	61.6
5	77.0
6	92.4
7	107.8
8	123.2
9	138.6

153	
1	15.3
2	30.6
3	45.9
4	61.2
5	76.5
6	91.8
7	107.1
8	122.4
9	137.7

152	
1	15.2
2	30.4
3	45.6
4	60.8
5	76.0
6	91.2
7	106.4
8	121.6
9	136.8

40	
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

39	
1	3.9
2	7.8
3	11.7
4	15.6
5	19.5
6	23.4
7	27.3
8	31.2
9	35.1

λ^2	c_1	c_2	c_3
+ 0.850	0.864234	0.465572	0.159725
.851	081	532	717
.852	0.863928	493	709
.853	775	454	701
.854	622	414	693
.855	469	375	685
.856	316	336	677
.857	164	296	669
.858	011	257	661
.859	0.862858	218	653
+ 0.860	0.862705	0.465178	0.159645
.861	553	139	637
.862	400	100	629
.863	247	060	621
.864	094	021	613
.865	0.861942	0.464982	605
.866	789	942	597
.867	636	903	589
.868	484	864	581
.869	331	824	573
+ 0.870	0.861178	0.464785	0.159565
.871	026	746	557
.872	0.860873	706	549
.873	721	667	541
.874	568	628	533
.875	416	589	525
.876	263	549	517
.877	111	510	509
.878	0.859958	471	501
.879	806	431	493
+ 0.880	0.859653	0.464392	0.159485
.881	501	353	477
.882	348	314	469
.883	196	274	461
.884	043	235	453
.885	0.858891	196	445
.886	739	157	437
.887	586	117	429
.888	434	078	421
.889	282	039	413
+ 0.890	0.858129	0.463999	0.159405
.891	0.857977	960	397
.892	825	921	389
.893	673	882	381
.894	520	843	373
.895	368	803	365
.896	216	764	357
.897	064	725	349
.898	0.856911	686	341
.899	759	646	333
+ 0.900	0.856607	0.463607	0.159325

153	
1	15.3
2	30.6
3	45.9
4	61.2
5	76.5
6	91.8
7	107.1
8	122.4
9	137.7

152	
1	15.2
2	30.4
3	45.6
4	60.8
5	76.0
6	91.2
7	106.4
8	121.6
9	136.8

40	
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

39	
1	3.9
2	7.8
3	11.7
4	15.6
5	19.5
6	23.4
7	27.3
8	31.2
9	35.1

λ^2	c_1	c_2	c_3
+0.900	0.856607	0.463607	0.159325
.901	455	568	317
.902	303	529	309
.903	151	489	301
.904	0.855999	450	293
.905	847	411	285
.906	695	372	277
.907	543	333	270
.908	391	293	262
.909	239	254	254
+0.910	0.855087	0.463215	0.159246
.911	0.854935	176	238
.912	783	137	230
.913	631	097	222
.914	479	058	214
.915	327	019	206
.916	175	0.462980	198
.917	023	941	190
.918	0.853871	901	182
.919	719	862	174
+0.920	0.853567	0.462823	0.159166
.921	416	784	158
.922	264	745	150
.923	112	706	142
.924	0.852960	666	134
.925	809	627	126
.926	657	588	118
.927	505	549	110
.928	353	510	102
.929	202	471	094
+0.930	0.852050	0.462432	0.159086
.931	0.851898	392	078
.932	747	353	070
.933	595	314	062
.934	443	275	054
.935	292	236	046
.936	140	197	038
.937	0.850989	158	030
.938	837	118	022
.939	686	079	014
+0.940	0.850534	0.462040	0.159006
.941	382	001	0.158998
.942	231	0.461962	990
.943	080	923	982
.944	0.849928	884	975
.945	777	845	967
.946	625	805	959
.947	474	766	951
.948	322	727	943
.949	171	688	935
+0.950	0.849020	0.461649	0.158927

	152
1	15.2
2	30.4
3	45.6
4	60.8
5	76.0
6	91.2
7	106.4
8	121.6
9	136.8

	151
1	15.1
2	30.2
3	45.3
4	60.4
5	75.5
6	90.6
7	105.7
8	120.8
9	135.9

	40
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20.0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0

	39
1	3.9
2	7.8
3	11.7
4	15.6
5	19.5
6	23.4
7	27.3
8	31.2
9	35.1

λ^2	c_1	c_2	c_3
+ 0.950	0.849020	0.461649	0.158927
.951	0.848868	610	919
.952	717	571	911
.953	566	532	903
.954	414	493	895
.955	263	454	887
.956	112	415	879
.957	0.847960	376	871
.958	809	336	863
.959	658	297	855
+ 0.960	0.847507	0.461258	0.158847
.961	356	219	839
.962	204	180	831
.963	053	141	823
.964	0.846902	102	815
.965	751	063	807
.966	600	024	799
.967	449	0.460985	791
.968	298	946	783
.969	147	907	775
+ 0.970	0.845995	0.460868	0.158768
.971	844	829	760
.972	693	790	752
.973	542	751	744
.974	391	712	736
.975	240	673	728
.976	089	634	720
.977	0.844939	595	712
.978	788	556	704
.979	637	516	696
+ 0.980	0.844486	0.460477	0.158688
.981	335	438	680
.982	184	399	672
.983	033	360	664
.984	0.843882	321	656
.985	731	282	648
.986	581	243	640
.987	430	204	632
.988	279	165	624
.989	128	126	616
+ 0.990	0.842978	0.460087	0.158608
.991	827	048	601
.992	676	009	593
.993	525	0.459970	585
.994	375	932	577
.995	224	893	569
.996	073	854	561
.997	0.841923	815	553
.998	772	776	545
.999	622	737	537
+ 1.000	0.841471	0.459698	0.158529

	152		151
1	15.2	1	15.1
2	30.4	2	30.2
3	45.6	3	45.3
4	60.8	4	60.4
5	76.0	5	75.5
6	91.2	6	90.6
7	106.4	7	105.7
8	121.6	8	120.8
9	136.8	9	135.9

	150		40
1	15.0	1	4.0
2	30.0	2	8.0
3	45.0	3	12.0
4	60.0	4	16.0
5	75.0	5	20.0
6	90.0	6	24.0
7	105.0	7	28.0
8	120.0	8	32.0
9	135.0	9	36.0

	39		38
1	3.9	1	3.8
2	7.8	2	7.6
3	11.7	3	11.4
4	15.6	4	15.2
5	19.5	5	19.0
6	23.4	6	22.8
7	27.3	7	26.6
8	31.2	8	30.4
9	35.1	9	34.2

λ^2	c_1	c_2	c_3
+ 1.000	0.841471	0.459698	0.158529
1.001	320	659	521
1.002	170	620	513
1.003	019	581	505
1.004	0.840869	542	497
1.005	718	503	489
1.006	568	464	481
1.007	417	425	473
1.008	267	386	465
1.009	116	347	458
+ 1.010	0.839966	0.459308	0.158450
1.011	815	269	442
1.012	665	230	434
1.013	515	191	426
1.014	364	152	418
1.015	214	114	410
1.016	064	075	402
1.017	0.838913	036	394
1.018	763	0.458997	386
1.019	613	958	378
+ 1.020	0.838462	0.458919	0.158370
1.021	312	880	362
1.022	162	841	354
1.023	012	802	346
1.024	0.837861	763	338
1.025	711	724	331
1.026	561	686	323
1.027	411	647	315
1.028	261	608	307
1.029	111	569	299
+ 1.030	0.836960	0.458530	0.158291
1.031	810	491	283
1.032	660	452	275
1.033	510	413	267
1.034	360	374	259
1.035	210	336	251
1.036	060	297	243
1.037	0.835910	258	235
1.038	760	219	227
1.039	610	180	219
+ 1.040	0.835460	0.458141	0.158212
1.041	310	102	204
1.042	160	064	196
1.043	010	025	188
1.044	0.834860	0.457986	180
1.045	710	947	172
1.046	560	908	164
1.047	411	869	156
1.048	261	831	148
1.049	111	792	140
+ 1.050	0.833961	0.457753	0.158132

	151
1	15.1
2	30.2
3	45.3
4	60.4
5	75.5
6	90.6
7	105.7
8	120.8
9	135.9

	150
1	15.0
2	30.0
3	45.0
4	60.0
5	75.0
6	90.0
7	105.0
8	120.0
9	135.0

	149
1	14.9
2	29.8
3	44.7
4	59.6
5	74.5
6	89.4
7	104.3
8	119.2
9	134.1

	39
1	3.9
2	7.8
3	11.7
4	15.6
5	19.5
6	23.4
7	27.3
8	31.2
9	35.1

	38
1	3.8
2	7.6
3	11.4
4	15.2
5	19.0
6	22.8
7	26.6
8	30.4
9	34.2

λ^2	c_1	c_2	c_3
+ 1.050	0.833961	0.457753	0.158132
1.051	811	714	124
1.052	662	675	116
1.053	512	636	108
1.054	362	598	101
1.055	212	559	093
1.056	063	520	085
1.057	0.832913	481	077
1.058	763	442	069
1.059	613	403	061
+ 1.060	0.832464	0.457365	0.158053
1.061	314	326	045
1.062	165	287	037
1.063	015	248	029
1.064	0.831865	209	021
1.065	716	171	013
1.066	566	132	005
1.067	417	093	0.157998
1.068	267	054	990
1.069	118	016	982
+ 1.070	0.830968	0.456977	0.157974
1.071	819	938	966
1.072	669	899	958
1.073	520	860	950
1.074	370	822	942
1.075	221	783	934
1.076	071	744	926
1.077	0.829922	705	918
1.078	772	667	910
1.079	623	628	903
+ 1.080	0.829474	0.456589	0.157895
1.081	324	550	887
1.082	175	512	879
1.083	026	473	871
1.084	0.828877	434	863
1.085	727	395	855
1.086	578	357	847
1.087	429	318	839
1.088	279	279	831
1.089	130	240	823
+ 1.090	0.827981	0.456202	0.157816
1.091	832	163	808
1.092	683	124	800
1.093	534	086	792
1.094	384	047	784
1.095	235	008	776
1.096	086	0.455969	768
1.097	0.826937	931	760
1.098	788	892	752
1.099	639	853	744
+ 1.100	0.826490	0.455815	0.157736

	150
1	15.0
2	30.0
3	45.0
4	60.0
5	75.0
6	90.0
7	105.0
8	120.0
9	135.0

	149
1	14.9
2	29.8
3	44.7
4	59.6
5	74.5
6	89.4
7	104.3
8	119.2
9	134.1

	39
1	3.9
2	7.8
3	11.7
4	15.6
5	19.5
6	23.4
7	27.3
8	31.2
9	35.1

	38
1	3.8
2	7.6
3	11.4
4	15.2
5	19.0
6	22.8
7	26.6
8	30.4
9	34.2

λ^2	c_1	c_2	c_3
+ 1.100	0.826490	0.455815	0.157736
1.101	341	776	729
1.102	192	737	721
1.103	043	699	713
1.104	0.825894	660	705
1.105	745	621	697
1.106	596	582	689
1.107	447	544	681
1.108	298	505	673
1.109	149	466	665
+ 1.110	0.825000	0.455428	0.157657
1.111	0.824851	389	649
1.112	703	350	642
1.113	554	312	634
1.114	405	273	626
1.115	256	234	618
1.116	107	196	610
1.117	0.823958	157	602
1.118	810	118	594
1.119	661	080	586
+ 1.120	0.823512	0.455041	0.157578
1.121	363	002	570
1.122	215	0.454964	563
1.123	066	925	555
1.124	0.822917	887	547
1.125	769	848	539
1.126	620	809	531
1.127	471	771	523
1.128	323	732	515
1.129	174	693	507
+ 1.130	0.822026	0.454655	0.157499
1.131	0.821877	616	492
1.132	729	578	484
1.133	580	539	476
1.134	431	500	468
1.135	283	462	460
1.136	134	423	452
1.137	0.820986	385	444
1.138	838	346	436
1.139	689	307	428
+ 1.140	0.820541	0.454269	0.157420
1.141	392	230	413
1.142	244	192	405
1.143	095	153	397
1.144	0.819947	114	389
1.145	799	076	381
1.146	650	037	373
1.147	502	0.453999	365
1.148	354	960	357
1.149	205	921	349
+ 1.150	0.819057	0.453883	0.157342

149	
1	14.9
2	29.8
3	44.7
4	59.6
5	74.5
6	89.4
7	104.3
8	119.2
9	134.1

148	
1	14.8
2	29.6
3	44.4
4	59.2
5	74.0
6	88.8
7	103.6
8	118.4
9	133.2

39	
1	3.9
2	7.8
3	11.7
4	15.6
5	19.5
6	23.4
7	27.3
8	31.2
9	35.1

38	
1	3.8
2	7.6
3	11.4
4	15.2
5	19.0
6	22.8
7	26.6
8	30.4
9	34.2

λ^2	c_1	c_2	c_3
+ 1.150	0.819057	0.453883	0.157342
1.151	0.818909	844	334
1.152	761	806	326
1.153	612	767	318
1.154	464	729	310
1.155	316	690	302
1.156	168	652	294
1.157	020	613	286
1.158	0.817872	574	278
1.159	723	536	271
+ 1.160	0.817575	0.453497	0.157263
1.161	427	459	255
1.162	279	420	247
1.163	131	382	239
1.164	0.816983	343	231
1.165	835	305	223
1.166	687	266	215
1.167	539	228	208
1.168	391	189	200
1.169	243	151	192
+ 1.170	0.816095	0.453112	0.157184
1.171	0.815947	074	176
1.172	799	035	168
1.173	651	0.452996	160
1.174	503	958	152
1.175	355	919	145
1.176	207	881	137
1.177	059	842	129
1.178	0.814912	804	121
1.179	764	765	113
+ 1.180	0.814616	0.452727	0.157105
1.181	468	689	097
1.182	320	650	089
1.183	173	612	081
1.184	025	573	074
1.185	0.813877	535	066
1.186	729	496	058
1.187	582	458	050
1.188	434	419	042
1.189	286	381	034
+ 1.190	0.813139	0.452342	0.157026
1.191	0.812991	304	019
1.192	843	265	011
1.193	696	227	003
1.194	548	188	0.156995
1.195	401	150	987
1.196	253	111	979
1.197	105	073	971
1.198	0.811958	035	963
1.199	810	0.451996	956
+ 1.200	0.811663	0.451958	0.156948

	149
1	14.9
2	29.8
3	44.7
4	59.6
5	74.5
6	89.4
7	104.3
8	119.2
9	134.1

	148
1	14.8
2	29.6
3	44.4
4	59.2
5	74.0
6	88.8
7	103.6
8	118.4
9	133.2

	147
1	14.7
2	29.4
3	44.1
4	58.8
5	73.5
6	88.2
7	102.9
8	117.6
9	132.3

	39
1	3.9
2	7.8
3	11.7
4	15.6
5	19.5
6	23.4
7	27.3
8	31.2
9	35.1

	38
1	3.8
2	7.6
3	11.4
4	15.2
5	19.0
6	22.8
7	26.6
8	30.4
9	34.2

λ^2	c_1	c_2	c_3
+1.200	0.811663	0.451958	0.156948
1.201	515	919	940
1.202	368	881	932
1.203	220	842	924
1.204	073	804	916
1.205	0.810925	766	908
1.206	778	727	900
1.207	631	689	893
1.208	483	650	885
1.209	336	612	877
+1.210	0.810189	0.451573	0.156869
1.211	041	535	861
1.212	0.809894	497	853
1.213	747	458	845
1.214	599	420	838
1.215	452	381	830
1.216	305	343	822
1.217	157	305	814
1.218	010	266	806
1.219	0.808863	228	798
+1.220	0.808716	0.451189	0.156790
1.221	569	151	783
1.222	421	113	775
1.223	274	074	767
1.224	127	036	759
1.225	0.807980	0.450998	751
1.226	833	959	743
1.227	686	921	735
1.228	539	882	727
1.229	392	844	720
+1.230	0.807245	0.450806	0.156712
1.231	097	767	704
1.232	0.806950	729	696
1.233	803	691	688
1.234	656	652	680
1.235	509	614	672
1.236	363	576	665
1.237	216	537	657
1.238	069	499	649
1.239	0.805922	461	641
+1.240	0.805775	0.450422	0.156633
1.241	628	384	625
1.242	481	346	618
1.243	334	307	610
1.244	187	269	602
1.245	041	231	594
1.246	0.804894	192	586
1.247	747	154	578
1.248	600	116	570
1.249	453	077	563
+1.250	0.804307	0.450039	0.156555

	148
1	14.8
2	29.6
3	44.4
4	59.2
5	74.0
6	88.8
7	103.6
8	118.4
9	133.2

	147
1	14.7
2	29.4
3	44.1
4	58.8
5	73.5
6	88.2
7	102.9
8	117.6
9	132.3

	146
1	14.6
2	29.2
3	43.8
4	58.4
5	73.0
6	87.6
7	102.2
8	116.8
9	131.4

	39
1	3.9
2	7.8
3	11.7
4	15.6
5	19.5
6	23.4
7	27.3
8	31.2
9	35.1

	38
1	3.8
2	7.6
3	11.4
4	15.2
5	19.0
6	22.8
7	26.6
8	30.4
9	34.2

LITERATURVERZEICHNIS

Abkürzungen: A.J. = Astronomical Journal
A.N. = Astronomische Nachrichten
B.A. = Bulletin astronomique
M.N. = Monthly Notices of the Royal Astronomical Society
L.M. = Meddelande från Lunds Observatorium

Åkesson, O.A.: Über eine symmetrische Form der analytischen Lösung des Bahnbestimmungsproblems. L.M. Nr. *48* (1912).

Andoyer, H.: Sur la détermination d'une orbite keplerienne par trois observations. B.A. *34*, 36 (1917).

– Formules et tables nouvelles relatives à l'étude du mouvement des comètes et à differents problèmes de la théorie des orbites. B.A. *35*, 5 (1918).

– *Cours de mécanique céleste*, Tome I, Paris 1923.

Angelitti, F.: Alcune considerazioni sull'impiego dell'equazione di Gauss nella determinazione delle orbite dei corpi celesti attorne al Sole. A.N. *229*, 93 (1926).

Baženow, G.: Über die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. A.N. *234*, 427 (1929).

– Bestimmung einer elliptischen Bahn mit einer unbedeutenden Exzentrizität nach drei durch große Zeiträume getrennten Beobachtungen. A.N. *238*, 319 (1930).

– Untersuchung der Konvergenz einer Reihe in der Theorie der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen (russisch). Publ. des Astr. Observ. Charkow *1*, 29 (1951).

Batson, L.: A simplification in orbit computation. A.J. *58*, 169 (1953).

Bauschinger, J.: *Die Bahnbestimmung der Himmelskörper*. Leipzig 1906. 2. Aufl. 1928.

Berberich, A.: Abgekürzte Berechnung einer elliptischen Planetenbahn aus vier Beobachtungen. Veröff. d. Astron. Recheninstituts Berlin *20*, 81 (1902).

Block, H.G.: Die singuläre Kurve der hyperbolischen Bewegung. L.M. *23* (1904).

Boda, K.: Über die Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten. A.N. *185*, 207 (1910).

Bohlin, K.: Über einige neuere Formeln zur Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen. A.N. *219*, 317 (1923).

Brenke, W.C.: An angle connected with the mean place in the elliptic motion. Popular Astronomy *44*, 76 (1936).

Brown, E.W.: On a method of solving Kepler's equation. M.N. *92*, 104 (1932).

Bucerius, H.: Zur Fourier-Analyse der Lösungen des Zweikörperproblems. A.N. *275*, 193 (1947).

– Bahnbestimmung als Randwertproblem I–V. A.N. *278*, 193, 204, *280*, 73; *281*, 97; *282*, 107 (1950–1955).

– Determinierung der klassischen Mechanik durch zeitliche Randwerte. A.N. *280*, 233 (1952).

Buchholz, H.: Über die Berechnung einer Kreisbahn nach der Laplace-Leuschnerschen Methode. A.N. *195*, 461 (1913).

Carathéodory, C.: Über die Integration der Differentialgleichungen der Keplerschen Planetenbewegung. Sitzungsber. d. Bayerischen Akad. d. Wiss. math.-natw. Abt. 1945–46 (1947).

CHARLIER, C.V.L.: *Die Mechanik des Himmels.* Band I–II. Leipzig 1902–1905. 2. Aufl. Berlin und Leipzig 1927.
– On the singular curve of the elliptic motion. L.M. *22*, (1904).
– On multiple solutions in the determination of orbits from three observations. M.N. *71*, 120, 454 (1910–1911).
– Die analytische Lösung des Bahnbestimmungsproblems. L.M. *45–47* (1911).
– Die LAGRANGEsche Gleichung im Bahnbestimmungsproblem. L.M. Serie II, *7* (1911).
COHN, F.: Neue Methoden der Bahnbestimmung. Vierteljahrsschrift der Astron. Ges. *53*, 27 (1918).
COX, J.F.: Le nombre des solutions qui se présentent dans la détermination d'une orbite elliptique. M.N. *86*, 59 (1925).
DUPORT, H.: Détermination d'une orbite d'une planète ou d'une comète par quatre observations. B.A. *26*, 150 (1909).
EBERT, W.: Une simple méthode pour le calcul d'une orbite elliptique par trois observations. B.A. *23*, 209 (1906).
EICHHORN, H.: Die Ausnahmefälle bei der Bestimmung einer Kreisbahn. Mitt. d. Univ.-Sternwarte Wien *5*, 103, 111 (1951).
EMERSLEBEN, O.: Die mittlere Entfernung Sonne–Planet. A.N. *275*, 263 (1947).
FABRITIUS, W.: Über eine leichte Methode der Bahnbestimmung mit Zugrundelegung des Prinzips von GIBBS. A.N. *128*, 225 (1891).
FINLAY–FREUNDLICH, E., *Celestial Mechanics,* London 1958.
FRISCHAUF, J.: *Grundriß der theoretischen Astronomie.* Leipzig 1902, 2. Aufl. 1922.
– Die GAUSS-GIBBSsche Methode der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Leipzig 1905.
HALL, A.: Note on the elliptic motion. M.N. *64*, 540 (1904).
– Relation of the true anomalies in a parabola and a very excentric ellipse having the same perihelion distance. A.J. *25*, 22 (1905).
HAMILTON, W.A.: On the convergency of the series used in the determination of the elements of parabolic orbits. A.J. *23*, 49 (1903).
HARTMANN, J.: Zur Auflösung der KEPLERschen Gleichung. A.N. *205*, 309 (1918).
– Beiträge zur Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen. A.N. *248*, 277 (1933).
HARZER, P.: Über eine allgemeine Methode der Bahnbestimmung. A.N. *141*, 177 (1896).
– Über die Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern nach drei Beobachtungen. Publ. der Sternwarte Kiel *11* (1901).
– Über die geometrische Methode zur Bestimmung der Bahnen von Himmelskörpern nach fünf Beobachtungen. Publ. der Sternwarte Kiel *12*; A.N. *184*, 105 (1910).
– Über eine kurze Methode der Bestimmung einer Planetenbahn nach drei Beobachtungen bei den gewöhnlichen kleinen und mäßigen Zwischenzeiten. A.N. *195*, 345, 361 (1913).
HEPPERGER, J.v.: Zur Ableitung der EULERschen Gleichung. A.N. *191*, 371 (1912).
HERGET, P.: A note on the computation of orbits. A.N. *251*, 53 (1934).
– The determination of orbits. A.J. *44*, 153 (1935).
– A method for determining preliminary orbits adapted to machine computation. Publ. of the Observatory of Cincinnati *21*, 1 (1936).
– Indeterminate cases on the Laplacian orbit methods. A.J. *48*, 122 (1939).
– *The computation of orbits.* (Selbstverlag) Ann Arbor 1948.
HERGLOTZ, G.: *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen.* Enzyklopädie der math. Wiss. VI, 2 (1910). Mit ausführlichem Literaturverzeichnis.

HERRICK, S.: On the LAPLACIAN and GAUSSIAN orbit methods. Publ. of the Astron. Soc. of the Pacific *49*, 17 (1937).
– Nearly parabolic and nearly rectilinear orbits. A.J. *51*, 123 (1945).
HIRAYAMA, S.: On the mean distance of a planet as a function of three heliocentric distances and the observed times. M.N. *62*, 620 (1902).
– On the ratios of the triangles in the determination of the elliptic motion from three observations. M.N. *66*, 420 (1906).
HOWE, H.A.: A desideratum in solving KEPLERS equation. Popular Astronomy *27*, 569 (1919).
ILJINSKY, J.: Über die Bewegung in sehr parabelnahen Bahnen. A.N. *238*, 325 (1930).
INNES, R.T.A.: The advantage of the GIBBS ratios in determining the orbits of minor planets. A.N. *245*, 345 (1932).
– The parabolic orbit. A.N. *246*, 431 (1932).
JARDETZKY, W.: Einige Bemerkungen zur Einführung neuer Elemente in der Bahnbestimmung. A.N. *275*, 223 (1947).
JEKHOVSKY, B. DE: Sur la détermination des distances géocentriques ϱ et héliocentriques r d'astéroides dans la méthode de LAPLACE. Comptes rendues *234*, 1436 (1952).
KAISER, F.: Eine rasch fördernde Variante der GAUSSschen Gleichung in der Bahnbestimmung. A.N. *228*, 123 (1926).
– Eine weitere rasch fördernde Variante der GAUSSschen Gleichung in der Bahnbestimmung. A.N. *277*, 255 (1949).
KLINKERFUES, W., und H. BUCHHOLZ: *Theoretische Astronomie*. 3. Aufl. Braunschweig 1912.
KOPAL, Z.: Beiträge zum Zweikörperproblem. A.N. *265*, 113 (1938).
KOZIEL, K.: Accurate formulae for f and g used in the LAPLACE-LEUSCHNER method of determining orbits. A.J. *53*, 5 (1947).
KULASCHKO, B.: Zur Lösung der Gleichung $\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2} = \frac{\varkappa(t-T)}{\sqrt{2}\cdot q^{\frac{3}{2}}}$. A.N. *274*, 217 (1944).
LEUSCHNER, A.O.: *A short method of determining orbits from three observations*. Publ. of the Lick Observatory 7 (1902–1914).
LEVI-CIVITÀ, T.: Sopre la equazione de KEPLER. Rendiconti dei Lincei 1904. A.N. *165*, 314 (1904).
MACMILLAN, W.D.: The motion of a particle attracted towards a fixed centre by a force varying as the fifth power of the distance. The Amer. Journ. of Math. *30*, 282 (1908).
MANITIUS, K.: *Des CLAUDIUS PTOLEMÄUS Handbuch der Astronomie* (Übersetzung aus dem Griechischen, mit zahlreichen Anmerkungen). Leipzig 1912.
MERTON, G.: A modification of GAUSS' method for the determination of orbits. M.N. *85*, 693 (1925); *89*, 451 (1929).
MOULTON, F.R.: Theory of the determination of the elements of a parabolic orbit from two observations of apparent positions and one of the motion in the line of sight. Astrophys. Journ. *10*, 14 (1899).
– A general method of determining the elements of orbits of all excentricities from three observations. A.J. *22*, 43 (1901).
– *An introduction to celestial mechanics*. New York 1902. Deutsch von W. FENDER, Leipzig und Berlin 1927.
– The true radii of convergence of the expressions for the ratios of the triangles, when developped as power series in the timeintervals. A.J. *23*, 93 (1903).
– Direct computation of the expressions for the coordinates in elliptic motion. A.J. *25*, 145 (1907).

NUMEROW, B.: Méthode nouvelle de la détermination des orbites et le calcul des éphémerides en tenant compte des perturbations. Publ. de l'Observatoire astrophysique central de Russie *2*. Moskau 1923.
– Sur la détermination des éléments. Bulletin de l'Inst. astron. de Leningrad *8*, 49 (1925).
– Bahnbestimmung nach der Methode der Variation der heliozentrischen Koordinaten. Bulletin de l'Inst. astron. de Leningrad *10*, 69 (1926).
PLUMMER, H.C.: Note on the use of Mr. ALDIS' tables of the function $\frac{1}{2}(\Theta + \cos\Theta)$ in determining the elements of an orbit. M.N. *63*, 147 (1903).
– On some points connected with the determination of orbits. M.N. *66*, 491 (1906).
– *An introductory treatise on dynamical astronomy.* Cambridge 1918.
– On Prof. HOWE's method of solving KEPLER's equation. M.N. *80*, 207 (1919).
– On multiple solutions in the determination of orbits. M.N. *89*, 682 (1929).
POINCARÉ, H.: Sur la détermination des orbites par la méthode de LAPLACE. B.A. *23*, 161 (1906).
RUBBERT, F.K.: Vektorielle Ableitung der Zentralbewegung. A.N. *276*, 127 (1948).
– Direkte Integration des Zweikörperproblems. A.N. *277*, 112 (1949).
– Zur Integration des Zweikörperproblems. A.N. *278*, 105 (1950)
RUNGE, C.: Graphische Methoden der Bahnbestimmung eines Planeten oder Kometen aus drei Beobachtungen. Nachr. der Göttinger Ges. d. Wiss., math.-phys. Kl. *1922*, 56.
ROURE, H.: Sur le calcul des orbites. Journ. der observateurs *13*, 185 (1930).
SALET: Détermination des orbites au moyen d'observations éloignées. B.A. *18*, 96 (1901).
SCHÜTTE, K.: Die Bahnbestimmung aus dem Vektor der Bahngeschwindigkeit und der Einfluß einer Änderung desselben auf die Bahnelemente. Weltraumfahrt *1953*, 98.
SEARLE, G.M.: A method of computing a parabolic orbit. A.J. *27*, 29 (1911).
SPRAGUE, R.: Notes on the computation of preliminary orbits. A.N. *153*, 385 (1900).
STRACKE, G.: *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen.* Berlin 1929 (mit ausführlichem Literaturverzeichnis).
STRASSL, H.: Nomogramme zur Auflösung der KEPLERschen Gleichung. A.N. *279*, 25 (1950).
STUMPFF, K.: Über eine kurze Methode der Bahnbestimmung aus drei oder mehr Beobachtungen. A.N. *243*, 317 (1931); *244*, 433 (1932).
– Untersuchungen über das Problem der speziellen Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten. A.N. *273*, 105 (1942).
– Über die Reihenentwicklung der rechtwinkligen Bahnkoordinaten im Zweikörperproblem. A.N. *274*, 49 (1943); *275*, 203 (1947).
– Über eine Eigenschaft des zweiten Brennpunkts der KEPLERschen Bahnellipse und ihre Verwendung in der Ephemeridenrechnung. A.N. *273*, 179 (1943).
– Neue Formeln und Hilfstafeln zur Ephemeridenrechnung. A.N. *275*, 108 (1947).
– Neue Theorie und Methode der Ephemeridenrechnung. Abhandl. der Deutschen Akad. d. Wiss. Berlin, Jahrg. 1947 (1949).
– Über die Beziehungen zwischen den Anomalien der KEPLER-Bewegung. A.N. *277*, 55 (1949).
– Über die EULERsche Gleichung und verwandte Beziehungen in der Theorie der Parabelbewegung. A.N. *276*, 164 (1948).
– Hauptgleichung und Entwicklungssätze in punktmechanischen Problemen, insbesondere in der Zweikörperbewegung. A.N. *280*, 97 (1951).
– Neue Wege zur Bahnberechnung der Himmelskörper. Fortschr. der Physik *1*, 554 (1954).

SUBBOTIN, M.: Determination of the elements of the orbit of a planet or comet by means of the variation of two geocentric distances. M.N. *82*, 383 (1922).
– On the application of LAMBERT's theorem to the determination of orbits. M.N. *82*, 419 (1922).
– Sur le calcul des coordonnées héliocentriques des comètes. A.N. *234*, 287 (1928).
SUNDMAN, K.: Über die Bestimmung geradliniger Bahnen. Vierteljahrsschrift d. Astron. Ges. *70*, 318 (1935).
TISSERAND, F.: *Traité de mécanique céleste*, Tome I. Paris 1889.
TROUSSET, J.: Sur l'équation de KEPLER. B.A. *28*, 389 (1911).
TSCHERNY, S.: Auflösung der EULERschen Gleichung. A.N. *179*, 117 (1908).
TSCHERNY, S.D.: Die Bewegung eines materiellen Punktes unter der Wirkung einer Kraft, die ihm die Beschleunigung $-\frac{\mu_1}{r^2} - 3\frac{\mu_2}{r^4}$ erteilt (russisch). Bull. de l'Inst. astron. de USSR (1949).
VÄISÄLÄ, Y.: Über die LAPLACEsche Methode der Bahnbestimmung. Annales Univ. Fennicae Aboensis *2* (1924).
– Eine einfache Methode der Bahnbestimmung. Annales Acad. Sci. Fennicae (A) *52* (1939).
VOGEL, R.: Eine Methode für Bahnbestimmungen. A.N. *129*, 38 (1892).
– Zur Theorie der Bahnbestimmung. A.N. *193*, 197 (1912).
WEDEMEYER, A.: Zur Auflösung der KEPLERschen Gleichung. A.N. *206*, 147 (1918).
WEISS, E.: Über die Berechnung einer Ellipse aus zwei Radien und dem eingeschlossenen Winkel. Sitz. Ber. der Akad. d. Wiss. (IIa) *116*, 345, Wien 1907.
WILKENS, A.: Zur Auflösung der KEPLERschen Gleichung. A.N. *206*, 21 (1918).
– Eine Methode der Bahnbestimmung für alle Exzentrizitäten. A.N. *210*, 81, 127 (1919).
– Die geometrische Deutung der CHARLIERschen singulären Fläche des Bahnbestimmungsproblems. A.N. *212*, 37 (1920).
– Über die Multiplizität der Lösungen der Bahnbestimmung der Kometen. Sitz. Ber. der Bayer. Akad. d. Wiss. München, math.-phys. Abt. *1928*, 113.
– Zur Auflösung der Grundgleichungen der parabolischen und parabelnahen Kometenbahnbestimmung aus fünf Beobachtungsdaten. A.N. *235*, 273 (1929).
– Die Analogie zum dritten KEPLERschen Gesetz bei den parabolischen Kometenbahnen. A.N. *241*, 9, 55 (1931).
– Über mehrfache Lösungen bei der parabolischen Kometenbahnbestimmung. A.N. *246*, 253 (1932).
– Das Problem der mehrfachen Lösungen der Kometenbahnbestimmung. Sitz. Ber. der Bayer. Akad. d. Wiss. München, math.-phys. Abt. *1951*, 55 (1952).
WITT, G.: Zur numerischen Auflösung zweier Gleichungen in der Planetentheorie. A.N. *172*, 129, 239 (1906).
– Nomogramme der GAUSSschen Gleichung. A.N. *199*, 257 (1914).

NAMEN- UND SACHREGISTER